

TIAGO DE OLIVEIRA DIAS

**CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA ALTERNATIVA
PARA O ATUAL CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

D541c
2014

Dias, Tiago de Oliveira, 1982-
Cálculo no ensino médio : uma proposta alternativa para o
atual currículo da educação básica no Brasil / Tiago de Oliveira
Dias. – Viçosa, MG, 2014.
vii, 69f. : il. ; 29 cm.

Inclui anexos.

Orientador: Simone Maria de Moraes.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.60-61.

1. Ensino Médio - Brasil. 2. Matemática - Estudo e Ensino.
3. Currículos - Avaliação. 4. Cálculo. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Matemática. Mestrado em Matemática
- Profissional. II. Título.

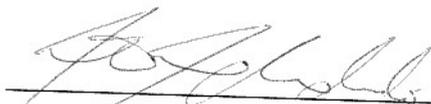
CCD 22 ed. 373.81

TIAGO DE OLIVEIRA DIAS

**CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA ALTERNATIVA
PARA O ATUAL CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de Junho de 2014.



Airton Carrião Machado



Marli Regina dos Santos



Simone Maria de Moraes
(Orientadora)

Agradecimentos

À única pessoa que jamais duvidou que eu conseguiria alcançar todos os meus objetivos e que se realizou neles tanto quanto eu. A pessoa que sempre acende suas velas para mim nos momentos difíceis e me guarda em suas orações: a melhor mãe do mundo.

Aos meus irmãos que acompanharam de perto o antes, suportaram o durante e estarão juntos na comemoração do depois: Rodrigo e Igor, ambos me inspiram e motivam, cada um do seu jeito, em tudo que faço.

À minha revisora particular, sem a qual eu não teria notado quão ruim tudo estava e pela qual terei admiração, gratidão e carinho eterno: Júlia.

À minha orientadora, Profa. Dra. Simone Moraes, obrigado pela paciência e pelos apontamentos sempre precisos e preciosos.

Aos colegas de PROFMAT: Wadson, Wagner, Haroldo, Fabrício, Lilian e Ailton. Apreendi muito com todos vocês, mestres!

À todos da Escola Estadual Pedro II, em especial ao meu braço esquerdo que foi muito compreensiva com minhas faltas às sexta-feiras. Sem sua generosidade não seria possível conciliar essas duas grandes responsabilidades.

Aos familiares: Vó Maria, Didica, Zé, Orestes, Lia, Tia (segunda mãe) Dalva, Fernanda, Matoso e Mamãe.

Aos amigos e amigas: Ana, Vanessa, Renatinha, Iale, Alex, Carlene, Gilmar, Cláudio, Gabi, Danielzinho, Presunto, Camila, Suely, Sr. Adilson, que entenderam minhas várias ausências nesses últimos dois anos.

Ao grande Raul, é claro, Mestre pra sempre!

“Diga-lhes que esta vida não cessou de me maravilhar.”

Ludwig Wittgenstein

Resumo

DIAS, Tiago de Oliveira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, junho de 2014. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta Alternativa para o Atual Currículo da Educação Básica no Brasil.** Orientadora: Simone Maria de Moraes.

Na perspectiva de justificar a presença do *Cálculo Diferencial e Integral* como tema obrigatório nos currículos de Matemática do Ensino Médio, neste trabalho é realizada uma pesquisa histórica dos currículos de Matemática, assim como das diretrizes do ensino de Matemática no Ensino Médio no Brasil, buscando entender o processo que culminou na retirada desse conteúdo dos currículos. Além disso, é apresentado um estudo comparativo entre currículos de Matemática do Ensino Médio para estudantes da mesma faixa etária do Brasil e de outros países, a fim de se ter uma indicação sobre qual a tendência atual do ensino de *Cálculo* no mundo. Finalmente, é apresentada uma proposta de currículo de Matemática no Ensino Médio que contemple o ensino de Cálculo e sugestões para a abordagem desse tema através de sequências didáticas.

Abstract

DIAS, Tiago de Oliveira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, June, 2014. **Calculus in Upper Secondary Education: An Alternative Proposal to the Basic Education Curriculum Current in Brazil.** Adviser: Simone Maria de Moraes.

From the perspective of justifying the presence of the *emph* Differential and Integral Calculus as required in the curricula of Upper Secondary Education Math, in this work is held a historical research of mathematics curricula , as well as the guidelines of teaching Mathematics Teaching in the Middle Brazil, seeking to understand the process that culminated in the withdrawal of that curriculum content. Furthermore, a comparative study of curricula Middle School Math for students in the same age group in Brazil and other countries is presented in order to get an indication of what the current trend of teaching *emph* Calculus in the world . Finally, we present a proposal of the mathematics curriculum in Upper Secondary Education that includes teaching Calculus and suggestions for addressing this issue through didactic sequences.

Sumário

1	Introdução	1
2	Panorama Histórico: Ensino, Currículo e Matemática no Brasil	3
2.1	Período Colonial (1500 - 1822)	3
2.2	Período Imperial (1822 - 1889)	6
2.3	Período da República Velha (1889 - 1930)	7
2.4	Período Vargas (1930 - 1945)	9
2.5	Período das Leis de Diretrizes e Bases da Educação - LDB (1961 - atual)	10
3	Sistemas Educacionais, Propostas Curriculares e a Presença de Cálculo no Ensino Básico de alguns Países	13
3.1	Portugal	15
3.1.1	Sistema Educacional Português	15
3.2	Espanha	20
3.2.1	Sistema Educacional Espanhol	20
3.3	França	25
3.3.1	Sistema Educacional Francês	25
3.4	Chile	31
3.4.1	Sistema Educacional Chileno	32
4	O estudo de Cálculo no Ensino Médio	38
4.1	Porque estudar Cálculo no Ensino Médio	38
4.2	Proposta de currículo para o Ensino Médio	41
4.2.1	O currículo nacional atual	41
4.2.2	O currículo do estado de Minas Gerais	43
4.2.3	O currículo proposto	44
4.3	Proposta de sequência didática	51
4.3.1	Atividade 1 - Derivada e a tangente	53
4.3.2	Atividade 2 - Integral e a área	54
5	Considerações Finais	57
	Referências	60

1 Introdução

Este trabalho pretende discutir a viabilidade do estudo de Cálculo na escola básica do Brasil hoje e, mais que isso, discutir os ganhos que isso traria em primeiro plano para o próprio aluno do ensino secundário e em um plano mais geral a todo o sistema educacional do Brasil, com reflexos tanto na escola básica quanto no ensino superior.

Um dos motivadores deste trabalho foram os questionamento colocados por Ávila (1991, p.1):

Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por quê? Como fazer isso?

Partindo de tais questões o trabalho foi organizado de modo a percorrer historicamente os currículos de Matemática do Brasil, analisar currículos de outros países e apresentar uma proposta alternativa de currículo para o Ensino Médio com a inclusão do Cálculo Diferencial e Integral.

Inicialmente é apresentada uma revisão histórica dos currículos de Matemática do Brasil com base principalmente nos documentos curriculares oficiais e em outros trabalhos acadêmicos que discorrem sobre o tema. Passando desde a chegada dos portugueses no Brasil e das primeiras escolas ligadas à ordens religiosas até as Leis de diretrizes e base recentes, apresentamos elementos que possam enriquecer a discussão do porquê da retirada do Cálculo do currículo da escola básica no Brasil.

Após delinear um panorama nacional, apresentamos alguns currículos atuais de outros países. Portugal, Espanha, França e Chile foram escolhidos com intuito de trazer uma amplitude mais diversa possível de sistemas educacionais. Antagônicos em diversos sentidos, os países foram analisados dentro de critérios de classificação e avaliação de sistemas educacionais internacionais, tais como o ISCED da UNESCO e o PISA da OECD. Com base nessa análise será discutida se a exclusão do Cálculo da escola básica pode ser uma

tendência internacional ou um fato específico do Brasil, dando subsídio a proposta aqui apresentada.

Partindo do currículo atual de Matemática do Ensino Médio no Brasil e usando elementos dos currículos dos países estudados apresentamos uma proposta alternativa que contemple o Cálculo. Essa proposta será feita especificamente sobre o Currículo do estado de Minas Gerais (CBC) mas contempla as prescrições educacionais dos documentos federais.

A proposta de currículo contempla a escolha de temas específicos do Cálculo, a organização dentro dos anos de ensino dos temas selecionados, discussões metodológicas sobre cada tema e, por fim, a título de ilustração, apresentamos duas sequências didáticas acerca de dois dos temas propostos e que são fundamentais no ensino de Cálculo: a derivada e a integral.

2 Panorama Histórico: Ensino, Currículo e Matemática no Brasil

O estudo da evolução histórica do currículo da escola básica no Brasil está bastante fundamentado na literatura. Análises das principais reformas ocorridas no sistema educacional brasileiro são amplamente conhecidas tanto de trabalhos científicos quanto dos próprios documentos oficiais. Neste capítulo realizaremos uma narrativa das ideias atreladas a cada momento da evolução dos currículos, na forma de uma apresentação em ordem cronológica dos fatos com enfoque nos marcos históricos mais relevantes, seguida da análise das propostas e das alterações de políticas públicas educacionais. Será destacada a presença ou não do Cálculo Diferencial e Integral sempre que existirem registros no currículo em dada época.

As principais fontes de dados são os documentos históricos oficiais, o livro de Gomes (2012) sobre a história do ensino de Matemática e a Tese de Costa (2011) acerca do currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil.

2.1 Período Colonial (1500 - 1822)

Admite-se como marco histórico do início da Educação no Brasil a chegada dos primeiros padres de diversas ordens à Ilha de Santa Cruz em 1549. Franciscanos, beneditinos, jesuítas, dentre outros, percorriam as aldeias realizando um letramento básico com intuito de catequizar os nativos e impor os modos e costumes lusos aos indígenas.

Costa (2011) observa que o ensino brasileiro, em suas origens, estava fundado no conceito de educação pública religiosa. E dentro dessa perspectiva, coube aos jesuítas a implantação do primeiro sistema de ensino no Brasil. Estima-se que no período compreendido entre a chegada dos jesuítas em 1549 até 1759, ano que foram expulsos, vinte colégios e doze seminários foram criados e administrados pelos padres da Companhia de Jesus.

Segundo Gomes (2012), nas escolas elementares, no que diz respeito aos conhecimentos matemáticos, contemplava-se o ensino da escrita dos números no sistema de numeração

decimal e o estudo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais.

Paralelo ao ensino voltado à catequização uma nova necessidade de formação para os colonos que aqui estavam fez surgir um ensino mais qualificado e que estivesse em consonância com os ideais das instituições europeias. A respeito desse modelo de importação dos formatos europeus de ensino, Mattos (1958 *apud* Costa, 2011, p.65) cita:

com suas bibliotecas organizadas, com corpo docente especializado e dedicadas exclusivamente aos estudos e ao ensino. Os alunos, em classes seriadas, mergulhavam no estudo das sutilezas e dos aspectos formais da cultura, programadas em um currículo que na época era considerado o melhor e mais moderno. Com pequenas adaptações, em que se destacava a substituição do grego pelo tupi, nossos jovens nobres e burgueses estavam estudando as mesmas coisas que os jovens nobres e burgueses de Paris, Bordéus, Colônia, Roma, Florença, Nápoles, Messina, Madri, Salamanca, Lisboa e Coimbra.

Todo o currículo de ensino do período era baseado nos preceitos do *Ratio Studiorum*, texto originalmente em latim e que tinha como intuito unificar os procedimentos pedagógicos dos jesuítas em seus colégios. O texto traz uma série de regras a serem seguidas por todos envolvidos no processo de ensino, desde o prefeito até os professores, bem como conteúdo programático, atividades, metodologias e modos de avaliação. O *Ratio Studiorum* ainda apresenta os níveis de ensino que deveriam ser adotados, à saber: Humanidades, Filosofia e Teologia. Dentro do *Ratio Studiorum* a Matemática estava presente nos estudos do Currículo Filosófico, nível intermediário do ensino, com duração de 3 anos, em que era reservada uma hora de estudo diária para o conteúdo. O Anexo A apresenta toda organização curricular da versão definitiva do documento que vigorou em todos os colégios da Campanha de Jesus, datado de 1599.

O período de controle do sistema educacional pela igreja finda quando Sebastião José de Carvalho e Melo, o Marquês de Pombal, primeiro ministro português, expulsa os jesuítas do Brasil em 1759 para em seguida impor um modelo educacional que fosse ao mesmo tempo consonante com os ideais Iluministas da época e controlado pelo poder real. Entretanto, como os jesuítas controlavam grande parte das instituições educacionais, o sistema educacional entrou em colapso, retrocedendo em sua estruturação.

Foram necessárias cerca de três décadas para o Estado português realmente controlar o sistema educacional. Segundo Niskier (2001 *apud* Costa, 2011, p.69),

a organicidade da educação jesuítica foi consagrada quando Pombal os expulsou levando o ensino brasileiro ao caos, através de suas famosas “aulas régias”, a despeito da existência de escolas fundadas por outras ordens religiosas, como os beneditinos, os franciscanos e os carmelitas.

O Alvará Régio de 1759, que instituiu as citadas “aulas régias”, arruinava o método sistemático dos jesuítas e do seu *Ratio Studiorum*. Em contraposição a um sistema organizado, com níveis de ensino e regras bem estabelecidas, instaurou-se um leque de aulas avulsas, sem qualquer planejamento sequencial e que tinha como principal função prover uma educação mais simples aos nobres e encurtar o caminho para o ensino superior na pátria mãe.

Em relação a Matemática, após um estudo básico das línguas e da filosofia podia-se passar a um estudo de disciplinas matemáticas: aritmética, álgebra e geometria. Gomes (2012) pontua que há indícios que as poucas classes de conhecimentos matemáticos ofertadas possuíam poucos alunos e baixa frequência, além de uma dificuldade de se conseguir professores para tal.

Ainda assim, alguns aspectos positivos dentro da reforma pombalina devem ser destacados no que tange o modelo educacional, como a preocupação em tratar de aspectos mais científicos, a característica laica do ensino e uma maior preocupação em estudar e desenvolver a língua portuguesa. Esse modelo foi a primeira experiência de ensino público no Brasil.

Outro fato importante ocorrido durante a era Pombal, e citado por Saviani (2007), foi a criação do Seminário de Olinda, pelo bispo de Pernambuco, Dom Azeredo Coutinho, em 1798. Considerado um dos melhores, senão o melhor colégio de instrução secundária, comparável a um liceu francês e um disseminador de ideias liberais. Ainda sobre o educandário, Gomes (2012) enfatiza que a instituição trabalhava em moldes totalmente diferentes das “aulas régias”, com uma estrutura bem definida de duração dos cursos e de seriamento, e além disso, conferia uma importância aos métodos matemáticos e científicos.

A chegada da família Real Portuguesa em 1808 provocou a ampliação dos investimentos nas áreas de educação e cultura, uma vez que os nobres que aqui aportavam demandavam tal infraestrutura. Foram criados no Rio de Janeiro a Academia Real de Marinha (1808), a Academia Real Militar (1810), a Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios (1816) e o Museu Nacional (1818). Nesse período, cursos de engenharia para militares já contemplavam cadeiras significativas na área de Matemática.

2.2 Período Imperial (1822 - 1889)

Após a independência e a formulação da primeira constituição em 1824, os debates sobre os rumos da educação na nova nação culminaram na criação da primeira lei da instrução pública nacional. Com a lei das “primeiras letras” de 1827, começava uma tentativa de universalização do ensino, com a determinação de que deveriam existir escolas em todas as vilas e cidades.

A escola deveria ensinar a ler, escrever, as quatro operações de aritmética, a prática dos quebrados (frações ordinárias), os decimais, as proposições, as noções mais gerais da geometria prática, a gramática, a língua nacional, os princípios da moral cristã e de doutrina da religião católica e apostólica romana visando à compreensão dos meninos (SAVIANI, 2007).

Uma das instituições de ensino de destaque na história da educação nacional foi criada nesse período. O Colégio Pedro II, criado na Corte em 1837, foi a primeira instituição a tentar organizar um ensino secundário com estrutura seriada e currículo padronizado. A seus estudantes aprovados em todas as disciplinas durante os sete anos do curso era concedido o grau de bacharel em letras e, além disso, os mesmos eram dispensados dos exames de ingresso aos cursos superiores.

Apesar do predomínio das disciplinas literárias e humanistas, as disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria, e, posteriormente a Trigonometria, sempre estiveram presentes em todas as séries do curso do Colégio de Pedro II mesmo com as várias reformas que modificaram o seu plano de estudos ao longo do tempo. Haidar (2008, p.100) comenta que:

ressalta-se, contudo, que o predomínio das letras clássicas no ensino do Colégio Pedro II não impediu a inclusão das línguas modernas, das ciências naturais, física, história e matemática. A distribuição se dava da seguinte forma: Nas séries elementares (8^a e 7^a), figuravam, ao lado da gramática nacional, a latina, a aritmética, a geografia, o desenho e a música vocal. Já nas séries 6^a, 5^a, 4^a e 3^a, havia o predomínio das humanidades clássicas (grego e latim). A partir da 6^a série, juntavam-se as línguas modernas e as ciências naturais e físicas. Na 2^a e 1^a séries, havia grande predominância da filosofia e retórica. As matemáticas faziam parte de todas as séries do curso, sendo que cessavam os estudos literários, permanecendo, contudo, o ensino das ciências físicas. Também permaneciam os estudos históricos introduzidos na 6^a série, até as séries superiores.

O Colégio Pedro II tornou-se a instituição modelo para o ensino secundário no Brasil até o período da República. Ali eram concentrados inicialmente todos os exames de acesso às escolas de nível superior, criados os modelos de currículo do ensino secundário

para o reconhecimento e equiparação dos ginásios estaduais e das escolas particulares. O Colégio projetou-se como personagem da História da Educação no Brasil, por meio de seus professores-catedráticos de notório saber, dos livros didáticos de utilização nacional e dos ex-alunos ilustres, formando grande parte dos agentes históricos do poder constituído, grupo considerável de homens públicos, formados pelos paradigmas europeus de civilização e progresso.

2.3 Período da República Velha (1889 - 1930)

O primeiro grande marco para educação no período da 1ª República foi a grande reforma feita pelo então ministro de Instrução, Correios e Telégrafos, Benjamin Constant, em 1890. Dessa vez a proposta dava à educação um caráter mais científico e técnico, quebrando o longo paradigma da tradição humanista e literária que caracterizava o ensino no Brasil. Baseada no ideário positivista do filósofo e matemático francês Auguste Comte (1798-1857) a Reforma Constant, como ficou conhecida, colocava a Matemática no patamar mais alto das ciências. Tal reforma instaurou um modelo bastante enciclopedista à educação, em consonância com os modelos europeus da época.

O currículo de Matemática ficou mais rico e novas áreas de estudo foram incorporadas ao ensino secundário. Segundo Gussi (2011), passou-se a ensinar a Matemática Abstrata e a Matemática Concreta dentro da hierarquia preconizada por *Comte*:

1º Ano: Aritmética

2º Ano: Geometria preliminar, trigonometria retilínea, geometria espacial (cônicas, conoide, limaçon de Pascal e a espiral de Arquimedes).

3º Ano: Geometria geral e seu complemento Algébrico, Cálculo Diferencial e Integral.

4º Ano - 1º período: Mecânica Geral.

4º Ano - 2º período: Astronomia, Geometria Celeste e noções sucintas de Gravitação Universal.

É o primeiro momento na história dos currículos do Brasil que de forma oficial é apresentado o estudo de Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário.

Algumas outras reformas menos expressivas ocorreram ainda na República Velha, das quais a Reforma Epitácio Pessoa (1901) fracassou ao tentar implantar os cursos seriados no Ginásio Nacional^[1] ; a Reforma Rivadávia (1911) que determinou como condição para ingresso no ensino superior apenas a idade mínima de 16 anos e a aprovação nos

¹Nome pelo qual o Colégio Pedro II foi rebatizado no período.

exames vestibulares, o que diminuiu consideravelmente a frequência de alunos no ensino secundário; problema solucionado para Reforma Rocha Vaz (1925) que novamente impôs a frequência obrigatória.

Já na década de vinte um movimento bastante difundido nos Estados Unidos e na Europa passa a afetar as diretrizes educacionais brasileiras. O movimento da Escola Nova tinha como princípios a centralidade da criança nas relações de aprendizagem, o respeito às normas higiênicas na disciplinarização do corpo do aluno e de seus gestos, a cientificidade da escolarização de saberes e fazeres sociais e a exaltação do ato de observar, de intuir, na construção do conhecimento do aluno.

Gomes (2012) destaca duas ideias fundamentais comuns às diversas correntes escolanovistas: o “princípio da atividade” e o “princípio de introduzir na escola situações da vida real”, que trouxeram mudanças no ensino dos anos iniciais da escolarização, com reflexos específicos na abordagem da Matemática. Esse movimento de renovação pedagógica não alcançou logo a educação secundária, que continuou pautando sua ação “num ensino livre, sem relação com a vida do aluno, baseado na memorização e na assimilação passiva dos conteúdos”.

No que se refere a mudança do currículo de Matemática, destaca-se a contribuição de Euclides Roxo (1890-1950), catedrático do Colégio Pedro II, que propôs a unificação das antigas disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria em uma única disciplina. A Matemática foi então homologada como disciplina pelo Decreto 18.564 de 1929, não mais sendo ensinada por docentes distintos ou fazendo uso de livros diferentes.

Sobre o currículo do Colégio Pedro II, ou Ginásio Nacional, após a implementação desse modelo Gomes (2012, p.20) salienta:

o ensino deveria partir da intuição. Para a geometria, em particular, o estudo das demonstrações formais precisa ser precedido de atividades de experimentação e construção. A proposta atribuía papel importantíssimo ao conceito de função, como “ideia central do ensino”, apresentada primeiro intuitivamente e desenvolvida gradativamente ao longo das séries. Na quinta série, prescrevia-se o ensino das noções básicas do cálculo diferencial e integral: limite, derivada e integral

Sendo assim, o **ensino de Cálculo tanto estava presente** no currículo quanto contemplava os três grandes conceitos trabalhados nas atuais cadeiras das disciplina à nível superior. Apenas dois séculos e meio após sua criação por Newton e Leibniz, o domínio do Cálculo já era exigido ao estudante secundarista brasileiro.

2.4 Período Vargas (1930 - 1945)

Em 1930 foi criado o Ministério da Educação e Saúde; estruturou-se a universidade pela fusão de várias instituições isoladas de ensino superior e criou-se o sistema nacional de ensino, até então inexistente.

A Reforma Francisco Campos de 1931 foi uma das ações iniciais do líder primeiro da nova pasta. Na questão curricular, o curso Fundamental, com duração de cinco anos, priorizava estudos relativos às humanidades e a formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional. Já no curso complementar, de dois anos, foi mantida a concepção de preparação para o ensino superior com três diferentes opções a seguir: Engenharia e Agronomia; Medicina, Odontologia, Farmácia e Veterinária; e Direito.

No curso fundamental as disciplinas Português, Matemática, História da Civilização, Geografia e Desenho estavam seriadas em todos os cinco anos. Nos cursos complementares as disciplinas-chave de cada ramo específico de ensino também estavam presentes nas suas duas séries. Desta forma, Latim e Literatura eram disciplinas seriadas nos dois anos do curso complementar que preparava para o ingresso em Direito; Física, Química e História Natural para o ingresso em Medicina, Farmácia e Odontologia, e Matemática para o ingresso em Engenharia e Arquitetura.

Tal reforma não trouxe grandes inovações para o sistema educativo brasileiro, sobretudo no âmbito curricular, pois não ocorreram rupturas com as tradicionais visões pedagógicas até então introduzidas no país. Entretanto o que se efetivou foi o compromisso pedagógico com a formação intelectual da elite do país.

A reforma Capanema foi a próxima a atuar no sistema educacional brasileiro. A lei Orgânica de 17 de julho de 1942 organizou o ensino secundário em dois ciclos: o ginásial, de quatro anos, e o colegial, de três anos, nas modalidades clássico e científico. Criou-se o ramo secundário técnico-profissional, subdividido em industrial, comercial e agrícola, além do normal, para formar professores para a escola primária.

Os programas de Matemática das duas primeiras séries se subdividem em dois temas: Geometria Intuitiva e Aritmética Prática, enquanto os das duas últimas séries contêm, separadamente, os itens relativos à Álgebra e à Geometria Dedutiva. Já no currículo dos cursos clássico e científico pode-se notar a presença do estudo das Derivadas em seu terceiro ano.

É pontuado por Gomes (2012) que diferentemente do ocorrido com a reforma Francisco Campos, a reforma Capanema não detalhou esses programas, limitando-se a portaria a

apresentar listas de conteúdo, sem quaisquer indicações metodológicas para a abordagem dos diversos assuntos.

2.5 Período das Leis de Diretrizes e Bases da Educação - LDB (1961 - atual)

Por cerca de vinte anos o ensino secundário foi conduzido de acordo com os preceitos da reforma Capanema, visando formar, segundo Costa (2011, p.86), uma nova elite “católica, masculina, de formação clássica e disciplina militar. A ela caberia a condução das massas e a ela estaria reservado o acesso ao ápice da pirâmide educacional”. Panorama que seria alterado somente em 1961.

Conhecida como a primeira LDB, a Lei 4.024/61, trazia em seu texto uma importante modificação, que equiparava os cursos de nível médio, dando direito de acesso ao ensino superior àqueles detentores tanto dos cursos propedêuticos (clássico ou científico) quanto dos cursos profissionalizantes. Outra modificação significativa foi a eliminação de algumas disciplinas obrigatórias e o acréscimo de disciplinas optativas, “desingessando” assim o currículo que até então comum para todos.

Em relação ao currículo de Matemática, bastante influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna ², deu-se uma extrema atenção a teoria de conjuntos e sua forte simbologia iniciando um período de “abandono da Geometria” que, segundo Gomes (2012), ocorreu tanto pela falta de preparo dos professores para lidar com a proposta modernista para a área quanto pela importância exagerada atribuída a Álgebra naquele momento.

Ainda estava presente no currículo o estudo do Cálculo Diferencial no ano final da escolarização secundária, aplicado principalmente ao problema da obtenção de tangentes ao gráfico de funções polinomiais. Entretanto já se começa a notar a retirada de tópicos referentes ao cálculo do programa, pois sua formalização, essencial para a ideia modernista, era bastante complexa e despendia tempo em excesso. Situações intuitivas como motivadoras do estudo do Cálculo iam de encontro com o que se pretendia fazer com a Matemática naquele período. O formalismo dos modernistas foi o precursor da eliminação do Cálculo do currículo do Ensino Médio, e ironicamente, nas palavras do próprio Whitehead, uma mazela foi criada: “o rigor pode salvar a Matemática, mas seguramente perderá os alunos”.

²Movimento que teve início na década de 50 com encontros promovidos pela “*Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*” e se baseava nas ideias do logicismo, corrente filosófica lançada por Bertrand Russell e Alfred North Whitehead que propunha reduzir toda Matemática à lógica.

Uma nova configuração do sistema educacional foi implementada pela Lei de Diretrizes e Bases para o Ensino de 1º e 2º graus, a LDB 5.692 de 1971. Essa lei dividiu o ensino em dois níveis. O primeiro grau, com duração de oito anos, unia os antigos primário e ginásio sem a necessidade de que o estudante se submetesse, como anteriormente, ao chamado Exame de Admissão que o habilitava a prosseguir os estudos depois dos quatro primeiros anos de escolarização. O 2º grau foi proposto como curso de preparação profissional, mas em geral continuou bastante propedêutico pela dificuldade de encontrar profissionais qualificados para trabalhar sob esse prisma.

Esta modificação tornou difícil a comparação entre os indicadores brasileiros e os dos demais países. As principais diferenças são a longa duração do ensino fundamental obrigatório (oito anos) e seu início aos 7 anos de idade (e não aos 6).

Durante a década de oitenta fortes mudanças nas concepções do ensino de Matemática começam a ser implantadas devido à grande crítica que passou a ser feita ao modelo modernista por matemáticos de renome, como Morris Kline e Renè Thom. Uma Matemática que partisse de situações do cotidiano do aluno, de objetos concretos, de situações tangíveis tomava o lugar do formalismo exacerbado e da grande preocupação com a linguagem e a simbologia. Nesse ponto, Godoy (2002, p. 26) destaca:

A linguagem utilizada na introdução dos conceitos deve aproximar-se, o mais possível, da linguagem do aluno. Cada conceito precisa ser interiorizado pelos estudantes antes de qualquer tentativa de formalização. Uma linguagem Matemática precisa é o fim de um processo de aprendizagem e não o início.

Apesar da LDB de 1971 e sua modificação que aconteceria por meio de um Decreto em 1982 não prescreverem orientações quantos os conteúdos programáticos das disciplinas, os livros didáticos da época e a Proposta pedagógica do Colégio Pedro II ainda continham referências ao ensino de Cálculo Diferencial, trazendo noções de limite e o estudo de derivadas de funções elementares, como as polinomiais, exponencial, logarítmica e trigonométrica.

Em 1996 publicou-se a atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9394/96), que contém os principais parâmetros relacionados à educação em nosso país, inclusive sua estruturação.

Três fatores influenciaram bastante as propostas curriculares elaboradas a partir da LDB de 1996: as mudanças ocorridas em relação às recomendações para o ensino da Matemática vinculadas à crise do Movimento da Matemática Moderna; à urgência por mudanças no currículo visto como ultrapassado; e o desenvolvimento da área da Educação Matemática, com a realização de pesquisas que contemplam muitas tendências e os mais diversos

contextos em que se ensina a Matemática. Entre essas novas propostas, a de maior relevância é a dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCN), de responsabilidade do Ministério da Educação (MEC), publicada em 1997-1998.

Já para o Ensino Médio os principais documentos produzidos pelo Governo Federal após a LDB de 1996 foram os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) em 2002, os PCN + Ensino Médio contendo orientações complementares ao primeiro e por último Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCEN), já em 2006. Nesse ponto, apesar dos documentos serem recomendações para elaboração de currículos, pode-se observar a **ausência de qualquer tópico relacionado ao ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio**. O modo como os conteúdos foram apresentados, bastante reduzidos, e a necessidade de se ter uma proposta única para um país de dimensões continentais e que possui diferentes realidades socioeconômicas pode ter sido motivo para essa exclusão de um tema que gera muitas possibilidades de contextualização e interdisciplinaridade, preceitos discutidos doravante e almejados no ensino da Matemática.

Outra mudança recente a ser sublinhada na atualidade brasileira é a extensão do Ensino Fundamental de oito para nove anos, com a inclusão das crianças de seis anos nesse nível. Essa modificação traz novas demandas à formação de professores e à produção de materiais didáticos, no contexto da alfabetização, proposta para ser iniciada mais cedo e coloca a estruturação do sistema educacional brasileiro bem semelhante a de diversos países europeus, exceto pelo percurso único ainda vigente no Brasil.

O Anexo B deste documento traz um apanhado da estrutura do sistema educacional no período de vigência de cada uma das LDB.

3 Sistemas Educacionais, Propostas Curriculares e a Presença de Cálculo no Ensino Básico de alguns Países

Traçado o panorama histórico da educação no Brasil com uma especial atenção à presença do Cálculo nos currículos de Matemática e feita a constatação que tal conteúdo foi excluído do programa desde a Lei de Diretrizes de Base de 1996, passamos a verificar se essa é uma tendência mundial.

Uma análise de produções científicas, extratos de organizações educacionais internacionais e de documentos oficiais dos órgãos responsáveis pelo sistema educacional de outros países foi feita com o intuito mencionado acima e descrevemos no presente capítulo.

Para fins de uma comparação entre níveis equivalentes de ensino foi usada a Classificação Internacional Padrão da Educação (*International Standard Classification of Education*) - ISCED¹, criada pela Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), uma vez que os percursos, faixa etária e nomenclaturas são diferentes para cada país.

Foram selecionados para estudo Portugal, Espanha, França e Chile. Sendo que para cada país fazemos uma breve apresentação do sistema educacional, para contextualização da análise do currículo proposto no nível *Upper Secondary Education* - ISCED 3, que no Brasil equivale ao Ensino Médio, sempre destacando os tópicos relacionados ao Cálculo. A apresentação dos sistemas educacionais europeus foi baseada nos relatórios da *Eurydice*², sendo essa a principal fonte de pesquisa do Capítulo. Foi feita uma tradução pelo próprio autor adaptando os termos, quando necessário, para melhor compreensão do leitor no Brasil.

¹Para maiores detalhes consultar ISCED (2011)

²A Rede Eurydice fornece informações e análises sobre os sistemas e políticas de ensino europeus. Desde 2013, é composta por 40 unidades nacionais com base em todos os 36 países participantes no Programa de Aprendizagem ao Longo da Vida da União Europeia coordenado e gerido pela *Education, Audiovisual and Culture Executive Agency*, em Bruxelas, que elabora os seus estudos e oferece uma gama de recursos *on-line*. Disponível em: <http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/index_en.php>. Acesso em: 22/02/2014.

No nível de ensino em questão os países estudados possuem, em geral, uma diversidade muito grande de percursos formativos pelos quais o aluno pode passar e estes diferentes currículos. Para países em que a quantidade de diferentes currículos é muito grande, como o caso da Espanha que chega a apresentar cerca de trinta diferentes opções entre a formação obrigatória e a complementar, optou-se por analisar os currículos com formação essencialmente propedêutica e compulsória, características que mais se assemelham ao modelo brasileiro atual³.

A escolha dos países foi feita com base em critérios diversos:

Portugal: Foi selecionado por possuir um sistema educacional muito semelhante ao brasileiro, além da facilidade da língua oficial.

Espanha: Pelo contraste com Portugal, pois apesar da proximidade geográfica o sistema educacional espanhol é diferente do luso e com uma grande diversidade de percursos formativos.

França: País com contrastes com os demais, com um sistema único para todos os estudantes até o nível ISCED 2 e somente em seguida se oferece uma diversificação dos percursos e, além disso, possui um nível já considerado superior mais prematuro em relação ao apresentado nos outros países estudados.

Chile: Devido aos resultados obtidos nas duas últimas edições do *Programme for International Student Assessment* (PISA), estudo trienal que avalia o sistema educacional de cerca de setenta países associados ou colaboradores da *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD) através de testes aplicados a estudantes de 15 anos de idade.

Além disso, existem produções acadêmicas feitas no Brasil sobre as características que aproximam ou distanciam os modelos educacionais dos três primeiros países do brasileiro, tais como Costa (2011) e Godoy (2002).

O Chile foi escolhido também para aportar uma amplitude maior ao trabalho, pois proporciona uma comparação com um país de condições socioeconômicas semelhantes a brasileira e que, ao contrário dos demais, está geograficamente mais próximo. Além disso, foi o país sul americano mais bem colocado na edição 2012 do PISA: 51º dentro os 65 países avaliados, enquanto o Brasil ocupa a posição de número 58⁴. Somado a isto, a facilidade de obtenção de informação, foi um diferencial, pois o sítio do Ministério da Educação do

³Apesar do recente movimento de diversificação dos percursos do Ensino Médio através de programas como o Programa Ensino Médio Inovador - PROEMI e o Programa Nacional de acesso ao Ensino Técnico e Emprego - PRONATEC, ambos do governo federal e o Reinventando o Ensino Médio - REM do governo de Minas Gerais, o Brasil ainda possui um modelo estritamente propedêutico e padrão para todos.

⁴A título de informação, a posição dos demais países estudados nesse trabalho é: Portugal (31), Espanha (33) e França (25)

Chile é bastante informativo e fornece toda a documentação tanto de legislação educacional, como de modelo de currículo e propostas pedagógicas.

3.1 Portugal

Em Portugal o Ministério da Educação e Ciência (MEC) é o departamento governamental que tem por missão definir, coordenar, promover, executar e avaliar as políticas nacionais dirigidas aos sistemas educativo e científico e tecnológico, articulando-as com as políticas de qualificação e formação profissional.

O ensino obrigatório é assegurado por estabelecimentos públicos (gratuito) e estabelecimentos particulares ou cooperativos. A escolaridade obrigatória inicia-se aos 6 anos e tem uma duração de 12 anos e compreende o Ensino Básico e o Ensino Secundário. O Ensino Básico tem a duração de 9 anos e organiza-se em três ciclos sequenciais:

1.º ciclo: corresponde aos primeiros quatro anos da escolaridade.

2.º ciclo: corresponde aos dois anos seguintes (estes dois ciclos em conjunto correspondem ao ensino primário).

3.º ciclo: que tem a duração de três anos e que corresponde ao *Lower Secondary Education* - ISCED 2.

Sendo a articulação dos três ciclos sequencial, cabe a cada um dos ciclos completar e aprofundar o anterior, numa perspectiva de unidade global.

3.1.1 Sistema Educacional Português

Ensino Básico

O objetivo geral do Ensino Básico é, de acordo com o desenvolvimento etário correspondente, assegurar a todos os portugueses uma formação geral de base comum que lhes garanta a descoberta e o desenvolvimento dos seus interesses, aptidões, capacidade de raciocínio crítico, memória, sentido moral e sensibilidade estética; promover a realização pessoal em harmonia com os valores de solidariedade social.

Ensino Secundário - ISCED 3

O Ensino Secundário tem a duração de três anos e é organizado segundo formas diferenciadas, contemplando a existência de cursos predominantemente orientados para a vida ativa ou para o prosseguimento de estudos. É garantida ao aluno a passagem de um curso para outro durante o percurso formativo mediante adaptação do currículo já percorrido.

Uma mostra do sistema educacional português é apresentada na figura 3.1.



Figura 3.1: Sistema Educacional de Portugal

Fonte: Eurydice

Focando no nível ISCED 3, as ofertas formativas no ensino secundário foram regulamentadas pelo Artigo 6.º do Decreto-Lei n.º 139/2012 de 5 de julho, e são elas:

1. Cursos científico-humanísticos vocacionados para o prosseguimento de estudos de nível superior.
2. Cursos com planos próprios⁵, como, por exemplo, cursos de eletrônica, informática e marketing.
3. Cursos artísticos especializados, vocacionados, consoante a área artística, para o prosseguimento de estudos ou orientados na dupla perspectiva da inserção no mundo do trabalho e do prosseguimento de estudos.
4. Cursos profissionais vocacionados para a qualificação profissional dos alunos, privilegiando a sua inserção no mundo do trabalho e permitindo o prosseguimento de estudos.
5. Ensino secundário na modalidade de ensino recorrente.
6. Cursos de ensino vocacional.

A figura 3.2 mostra que apesar do grande número de opções que o estudante português possui, 9 em cada 10 estão alocados nos Cursos Gerais/Científico-humanístico ou nos cursos profissionais. Para essa maioria de alunos existe dois programas para a disciplina de Matemática:

Matemática A: para os Cursos Científico-Humanísticos, Curso de Ciências e Tecnologias e Curso de Ciências Socio-econômicas

⁵No Brasil chamados de cursos profissionalizantes.

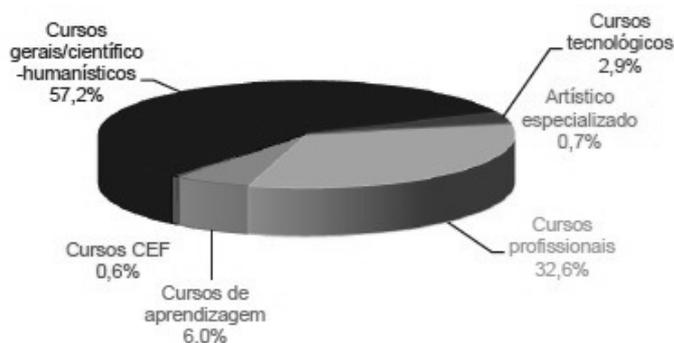


Figura 3.2: Alunos do ensino secundário, por modalidade em Portugal

Fonte: www.dgeec.mec.pt/np4/96/. Acesso em: 22/02/2014.

- **Carga horária semanal:** 4h 30m dividida em unidades letivas de 90 minutos ao longo de 33 semanas para cada um dos três anos do Ensino Secundário.
- **Temas:** números e geometria, incluindo vetores e trigonometria; funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades.
- **Programa:** Nove módulos sequenciais (veja Anexo C).

Matemática B: para o Curso Científico-Humanísticos de Artes Visuais e Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Eletrotécnica e Eletrônica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto.

Os módulos 5 e 8 do programa Matemática A são os que possuem temas relacionados ao estudo de **Cálculo** sendo apresentada uma descrição mais pormenorizada de cada um em Silva *et al* (2005a) a qual segue:

Módulo 5: Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.

Duração: 11 semanas - 33 unidades letivas de 90 minutos

Temas e conteúdos:

1. Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação.
2. Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções: $f(x) = a + \frac{b}{cx + d}$. Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.
3. Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$.
4. Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação.
5. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.

6. Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).
7. Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.
8. Constatação, por argumentos geométricos, de que:

se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;

se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. Referência à hipérbole; informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.
9. Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
10. Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinômios do 2º e 3º grau.
11. Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.
12. Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário.
13. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).

Módulo 8: Funções Exponenciais e Logarítmicas. Teoria de limites. Cálculo diferencial.

Duração: 11 semanas - 33 unidades lectivas de 90 minutos

Temas e conteúdos:

Funções exponenciais e logarítmicas

1. Função exponencial de base superior a um; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$ com $a > 1$.
2. Função logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = \log_a x$ com $a > 1$.
3. Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.

- Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.

Teoria de limites

- Limite de função segundo Heine ⁶. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assíntotas.
- Continuidade.
- Teorema de Bolzano-Cauchy ⁷ (informação) e aplicações numéricas.

Cálculo Diferencial

- Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto e informação das restantes regras).
- Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica).
- Segunda definição do número e .
- Teorema da derivada da função composta (informação).
- Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica).
- Estudo de funções em casos simples.
- Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.
- Problemas de optimização.
(* Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.

Uma fração significativa dos alunos trabalha dentro do programa de Matemática B, mais enxuto e prático que o anterior, com maior número de ferramentas necessárias para aplicação de conceitos matemáticos em problemas cotidianos e/ou da área de interesse específica do aluno e de métodos numéricos e computacionais.

Podemos então concluir, com base no exposto e nos Anexos C e D que, mesmo em diferentes níveis de profundidade o estudante secundarista em Portugal trabalha com temas do Cálculo Diferencial, chegando inclusive a utilização de importantes teoremas da área. Para os cursos técnicos (Matemática B) a utilização da derivada para resolução de problemas de taxa de variação e a ideia de limite são ferramentas a disposição do aluno no nível ISCED 3.

⁶Definição de limite utilizando seqüências. Usada como alternativa à definição de Cauchy, comumente encontrada nos livros de Cálculo de ensino superior no Brasil.

⁷Também conhecido como Teorema do Valor Intermediário para funções.

3.2 Espanha

O sistema educacional espanhol foi construído sobre dois pilares: o da qualidade e o da equidade de ensino, que são vistos como inseparáveis e nunca como conflitantes. Dentro dessas perspectivas têm-se como características marcantes da educação espanhola o acompanhamento e a inovação, sendo feita uma reflexão constante das práticas e auto-avaliação do sistema pelos elementos que o compõem.

O princípio da equidade garante a igualdade de oportunidades, a inclusão de todos e a não discriminação, agindo como um elemento para compensar as desigualdades sociais e econômicas. Na educação básica, a atenção à diversidade é estabelecida como um princípio fundamental em todas as intervenções pedagógicas, tentando satisfazer as necessidades temporárias ou permanentes de cada estudante. O Estado atua como fornecedor das condições de trabalho dos profissionais da educação a fim de compensar desigualdades sociais, atendendo grupos ou zonas territoriais em situação de vulnerabilidade com a disponibilização de recursos e com o apoio para que toda população possa receber serviços de educação de qualidade.

3.2.1 Sistema Educacional Espanhol

O sistema espanhol de educação está organizado da seguinte maneira:

Educação Infantil

Ocorre até 6 anos de idade e embora não seja uma etapa do ensino obrigatório, é gratuito em todas as escolas com financiamento público (escolas públicas ou escolas privadas com financiamento público).

Educação Básica

É obrigatória e gratuita nas escolas com financiamento público, com duração de dez anos e é dividida em duas etapas.

Educação Primária: abrange seis anos letivos, geralmente estudados entre as idades de 6 e 12 anos.

Educação Secundária Obrigatória (ESO): realizada em escolas secundárias, entre as idades de 12 e 16 anos. No final desta etapa, os alunos recebem o primeiro certificado oficial, o título de graduado em Educação Secundária Obrigatória, o que lhes permite acessar o próximo nível de ensino ou o mercado de trabalho.

Educação Secundária Superior (ISCED 3)

É oferecida nas escolas secundárias, tem duração de dois anos letivos, geralmente estudado entre as idades de 16 e 18 anos.

Oferece duas modalidades:

Bachillerato: é um curso acadêmico de dois anos de duração e formação propedêutica.

Ensino Secundário Profissional: também chamado Ciclos Formativos de Formação Profissional (FP) está organizado em diferentes ciclos de treinamento com uma organização modular de duração variável e adequado às diversas áreas profissionais de conteúdo teórico e prático.

Todos os ciclos de formação existentes são encaminhados para o Catálogo Nacional de Qualificações Profissionais e o currículo deve estar em conformidade com os requisitos no âmbito do Sistema Nacional de Qualificações e Formação Profissional.

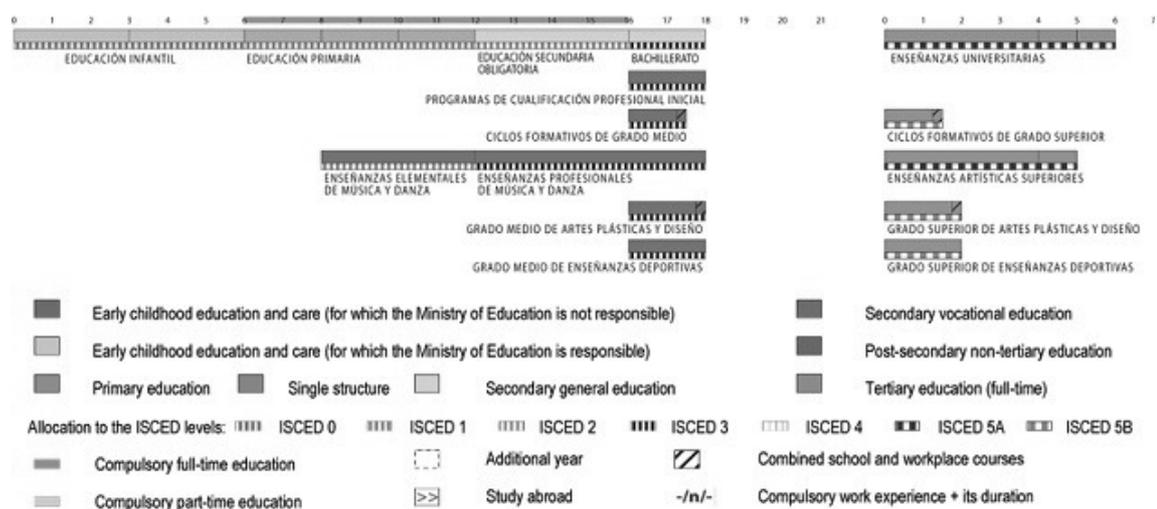


Figura 3.3: Sistema Educacional da Espanha

Fonte: Eurydice

A figura 3.3 auxilia a notar um forte contraste em relação ao modelo português, e também ao brasileiro: a educação é obrigatória somente até a conclusão do ESO, que é um curso de nível ISCED 2, o que seria equivalente aos anos finais do ensino fundamental no Brasil. A partir daí o estudante pode ingressar em alguma modalidade de nível ISCED 3, tanto para continuidade dos estudos quanto para formação profissional. A diversidade de opções nesse ponto é bastante extensa, pois existem diversos tipos de cursos na modalidade FP e estes com currículos diversos, a seguir descreveremos a estrutura do *Bachillerato*.

Dentro do *Bachillerato* existem três modalidades de ensino:

- Ciências e Tecnologias.

- Humanidades e Ciências Sociais.
- Artes, subdividida em duas possibilidades: plástica, imagem e desenho; e cênica, música e dança.

Para todo o *Bachillerato* existe um grupo de disciplinas obrigatórias, no qual a **Matemática não está incluída**, um grupo de disciplinas específicas de cada modalidade e que são compulsórias e um grupo de disciplinas optativas. A **Matemática é obrigatória somente para os estudantes de Ciências e Tecnologias**, sendo optativa para as artes. Existe ainda um curso de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) que é optativo para a modalidade de Humanidades e Ciências Sociais. O Anexo E apresenta as disciplinas que estruturam o *Bachillerato*.

As disciplinas de Matemática e MACS se diferem pela proposta de cada uma. Enquanto a primeira é bastante geral, tratando das diversas áreas de Matemática em um nível mais profundo, a segunda é mais aplicada e, assim como currículo de Matemática B de Portugal, possui diversos tópicos sobre métodos computacionais. A seguir o conteúdo detalhado relacionado a parte de Análise⁸ dos dois cursos.

Matemática: para Ciências e Tecnologia

Análise (1º ano)

1. Funções reais de variável real: Domínio, Imagem e extremos de uma função.
2. Classificação e características básicas das funções polinomiais, racionais simples, valor absoluto, função maior inteiro, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.
3. Função simétrica, função par, função ímpar. Função periódica.
4. Operações algébricas e composição de funções. Função inversa.
5. Introdução ao conceito de limite de uma função em um ponto. Limite e continuidade. Estudo de descontinuidades.
6. Introdução ao conceito de derivada de uma função em um ponto. Interpretação geométrica da derivada da função em um ponto.
7. Introdução à função derivada e ao cálculo de derivadas de uma função em um ponto. Função derivada. Regras de derivação.
8. Extremos relativos de uma função em um intervalo.

⁸Em alguns países é comum a utilização do termo Análise para todo o ramo do Cálculo Diferencial e Integral. Já no Brasil o termo Análise refere-se a área que trata dos fundamentos dos conceitos introduzidos nas disciplinas de Cálculo.

9. Interpretação intuitiva das propriedades globais e locais através da análise de seu domínio, imagem, crescimento, extremos, limites e continuidade.
10. Esboço do gráfico de funções elementares.
11. Valorização do uso de tecnologias para o estudo e a representação gráfica de funções.
12. Disposição para a modelagem de situações e fenômenos com a ajuda de funções gráficas conhecidas.

Análise (2° ano)

1. Conceito de limite de uma função. Cálculo dos limites. Limites infinito e no infinito. Assíntotas.
2. Continuidade de uma função em um ponto e num intervalo. Tipos de descontinuidade.
3. Interpretação geométrica e física do conceito de derivada de uma função em um ponto.
4. Função derivada. Cálculo de derivadas. Derivada da soma, produtos e quociente de funções e da função composta. Aplicação da derivada ao estudos das propriedades locais de uma função e à resolução de problemas de otimização.
5. Uso das propriedades globais e locais de uma função para seu estudo gráfico.
6. Introdução ao conceito de integral definida a partir do cálculo de áreas sob uma curva. Teorema fundamental do Cálculo. Regra de Barrow. Integral imediata. Técnicas elementares para o cálculo de primitivas: por partes, mudança de variável e decomposição em frações parciais. Aplicação ao cálculo de áreas de regiões planas.
7. Utilização de recursos tecnológicos para apoiar a análise gráfica e algébrica das propriedades de funções e para sua representação gráfica.

Matemática: Aplicada às Ciências Sociais (MACS)

Análise (1° ano)

1. Funções reais de variável real. Expressão de uma função em forma algébrica usando tabelas ou gráficos. Aspectos globais de uma função. Utilização das funções como ferramentas para resolver problemas e interpretação dos fenômenos sociais e econômicos.
2. Interpolação e extrapolação linear. Aplicação a problemas reais ou concretos.

3. Identificação da expressão analítica e gráfica de funções polinomiais, exponencial e logarítmica, função maior inteiro, valor absoluto e racional simples a partir de suas características. Funções definidas por partes.
4. Ideia intuitiva de limite de uma função num ponto. O limite como uma ferramenta para o estudo de descontinuidades de uma função.
5. Taxa de variação média. Aplicação ao estudo de fenômenos econômicos e sociais.
6. Tendência de uma função: limites infinitos e no infinito. Esboço de assíntotas horizontais e verticais.

Análise (2° ano)

1. Introdução ao conceito de limite. Conceito de descontinuidade. Interpretação dos diferentes tipos de descontinuidade e das tendências assintóticas no tratamento da informação.
2. Derivada de uma função em um ponto. Interpretação geométrica.
3. Derivada de funções elementares. Regras de derivação. Aplicação das derivadas ao estudo das propriedades locais de funções elementares e a resolução de problemas de otimização relacionados com as ciências sociais e a economia.
4. Estudo e representação gráfica de uma função polinomial ou racional simples a partir de suas propriedades globais.
5. O problema do cálculo de áreas sob uma curva. Introdução intuitiva à integral definida.
6. Integral indefinida. Propriedades elementares. Cálculo de integrais indefinidas ou redutíveis às integrais imediatas. Aplicação da integral na resolução de problemas relacionados com as ciências sociais e a economia.

O programa de Matemática para Ciências e Tecnologias apresentado possui muitas semelhanças com um curso de Cálculo I ofertado na grande maioria das universidades do Brasil. É uma ementa bastante extensa e que trata dos três conceitos básicos do Cálculo (limite, derivada e integral) em um nível bastante razoável para estudantes secundaristas. Para os moldes brasileiros atuais se vê até com certa estranheza tal programa, pois deixamos de tratar desses temas na escola básica mesmo em nível superficial.

Apesar de um pouco menor, o programa de MACS também trabalha com os conceitos principais do Cálculo, chegando até a determinação de funções primitivas. As orientações metodológicas constantes no programa sugerem abordagens mais aplicadas, deixando de

lado algumas técnicas um pouco mais minuciosas e alguns teoremas, como o Teorema Fundamental do Cálculo.

Diante do exposto, nota-se que o currículo espanhol para o ISCED 3 tem forte presença do Cálculo Diferencial e Integral, em um nível até mais aprofundado que o português. Grande parte da ementa de uma disciplina (ou disciplinas) sobre o Cálculo em funções de uma variável do ensino superior brasileiro é distribuído nos dois anos do *Bachillerato* para estudantes recém concluintes do ISCED 2 em idade na faixa de 16 a 18 anos.

3.3 França

O sistema de ensino francês é caracterizado pela forte presença do Estado na organização e financiamento da Educação. O Estado: define os detalhes dos currículos de todos os níveis de ensino; organiza o processo de admissões dos professores, que se tornam funcionários públicos, e proporciona-lhes formação continuada em serviço; recruta e capacita inspetores, responsáveis pelo controle de qualidade do sistema educacional; é o principal órgão de financiamento do sistema de educação pública e subsidia “escolas privadas através de contratos”, que recebem cerca de 20% dos alunos.

A educação é obrigatória entre as idades de 6 e 16 anos. No entanto, a França tem uma longa tradição de educação pré-escolar: nos últimos 20 anos, quase todas as crianças frequentam a creche a partir de três anos de idade e, embora seja opcional, é uma parte integrante do sistema de ensino francês e está sob a responsabilidade do Ministério da Educação Nacional que define os currículos.

Os alunos franceses tendem a especializar-se, ou possuir diferentes opções de formação, bastante precocemente em relação aos alunos espanhóis, por exemplo. Desde a lei de 1975, eles possuem um currículo comum a todos até a idade de 15 anos dentro de uma *collège unique* (ISCED 2). O primeiro estágio de especialização ocorre no final do *Collège* (*lower secondary education*) quando os alunos optam por seguir em um liceu geral e tecnológicos ou um liceu profissional. Ambas escolas preparam os alunos para ingressar no *baccalauréat* em três anos, finalizando assim o ensino secundário e obtendo o diploma de *baccalauréat* emitidos pelo Estado (geral, tecnológico ou profissional), que permite o acesso ao ensino superior e lhes dá direito a matricular-se na universidade.

3.3.1 Sistema Educacional Francês

O sistema educacional francês está organizado em três níveis de ensino:

Ensino Pré-primário (ISCED 0)

É oferecido em “creches” e atende as crianças a partir de 2 até 6 anos de idade. Quase todas as crianças frequentam a creche a partir de três anos de idade, embora seja opcional. Esse nível é parte integrante do “nível primário de educação” francês.

Ensino Primário (ISCED 1)

As aulas ocorrem em “escolas elementares” e são destinadas a crianças entre as idades de 6 e 11 anos. Ele marca o início da escolaridade obrigatória, e é secular e gratuita quando oferecida nas escolas estaduais. No final deste curso de 5 anos, os alunos podem acessar automaticamente o nível secundário de educação.

Ensino Secundário Inferior (ISCED 2)

Ocorre em *collèges* e tem duração de 4 anos atendendo alunos com idades entre 11 e 15 anos. A educação nos *collèges* é obrigatória e comum a todos os alunos. Um diploma nacional (o *brevet*) é concedido no final desse nível. A admissão no nível seguinte de ensino não está condicionada ao sucesso no *brevet*. Ao final desse nível a escola recomenda o caminho escolar mais adequado às famílias, baseando-se nos relatórios escolares do aluno e interesses específicos. As crianças vão continuar a sua escolaridade ou em educação tecnológica ou profissional ou geral.

Ensino Secundário Superior (ISCED 3)

O ensino neste nível ocorre em “liceus gerais e tecnológicos” ou em “liceus profissionais” e se estende por mais 3 anos (alunos com idades entre 15 e 18 anos).

A educação compulsória é estendida até o primeiro ciclo do Liceu e este possui dois ciclos e a ordem da escolaridade diminui com o passar dos anos:

1º Ciclo: chamado ciclo de observação.

Duração: 1 ano.

Público: Atende alunos na faixa de 15 anos nas chamadas *classe de seconde*.

2º Ciclo: chamado ciclo terminal.

Duração: 2 anos.

Classes: compreende a *classe première* e a *classe terminale*.

O ensino secundário superior tem três percursos educativos:

Caminho geral: prepara os alunos para o ingresso nos estudos superiores

Constituído de três percursos:

- Literário.
- Económico e Social.
- Científico.

Caminho tecnológico: prepara principalmente alunos para os estudos tecnológicos de nível superior.

Aqui o estudante têm as seguintes opções:

- Ciências de gestão e tecnologias (STG).
- Ciências e tecnologias industriais (IST).
- Ciências e tecnologias de laboratório (STL).
- Saúde e ciências sociais e tecnologias (ST2S).
- Música e dança técnicas (DTM).
- Indústria hoteleira.
- Ciências e tecnologias de agronomia e organismos vivos (*baccalauréat* preparado nos liceus que dependem do Ministério da Agricultura).

Caminho profissional: prepara os alunos para o mercado de trabalho, mas também permite que dêem continuidade aos seus estudos no ensino superior.

Um diploma nacional é concedido ao final do ensino secundário: o *baccalauréat*, que é tanto documento de conclusão de estudos secundários e o primeiro passo na formação universitária, uma vez que o acesso aos estudos superiores é condicionado à sua obtenção. Alunos dos liceus profissionais recebem o *Certificat d'aptitude professionnelle* (CAP), ou certificado de aptidão profissional, em um curso de estudo que se estende por dois anos, após o qual eles podem integrar o mercado de trabalho ou se preparar para o *baccalauréat* profissional.

A figura 3.4 apresenta o modelo educacional francês.

Matemática no Liceu

A Matemática é uma das disciplinas comuns e está presente com carga horária de 4 horas semanais.

O programa é subdividido em 3 grandes capítulos:

- Funções.

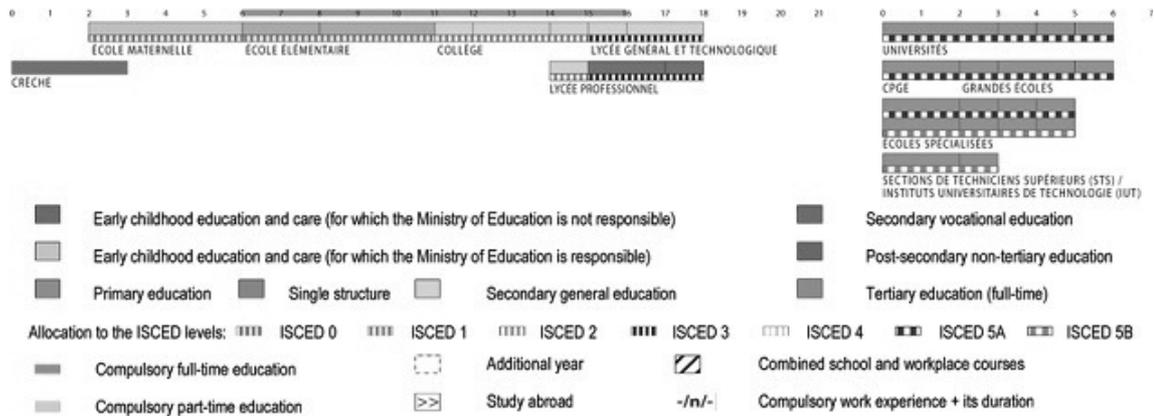


Figura 3.4: Sistema Educacional da França
Fonte: Eurydice

- Geometria.
- Estatística e Probabilidade.

Os conteúdos referentes ao capítulo de funções estão apresentados no Anexo F, sendo que neste não há presença de temas de Cálculo.

Existem dois currículos de Matemática para o caminho geral, um para a série científica e outro para as duas restantes. Será analisado com mais detalhes o percurso escolhido pela maioria dos jovens franceses, conforme mostra a figura 3.5: a série científica do caminho geral que em 2013 teve cerca de 170 mil concluintes.

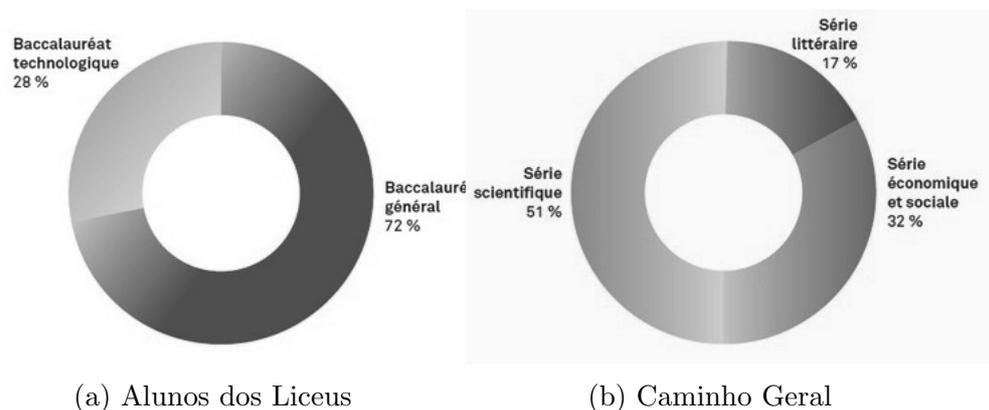


Figura 3.5: Dados do *baccalauréat* 2013

Fonte: www.education.gouv.fr/cid72352/baccalaureat-2013.html. Acesso em 02/03/2014.

O programa de Matemática estabelece os objetivos em termos de capacidades. Ele é projetado para promover a aquisição gradual de conceitos e sua fixação. É esperado do aluno a capacidade de dominar os algoritmos por um lado, e por outro o raciocínio por detrás desses ao final do programa. São exigidas demonstrações dos principais resultados

e, quando possível a aplicação computacional do conceito. O programa também está dividido nos três grandes capítulos supra citados e ainda conta com uma seção extra que trata de problemas computacionais e que se propõe a fazer as ligações com os conteúdos estudados.

O conteúdo do capítulo de Análise, conforme o Ministério da Educação Nacional ⁹, é exposto a seguir:

Classe de première - 2º ano

1. Equação do Segundo Grau

- Forma canônica de uma função polinomial do segundo grau.
- Equação do segundo grau e discriminante.
- Sinal do trinômio.

2. Estudos de funções

- Funções de referência: $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = |x|$.
- Significado das variações de $u + k$, λu , \sqrt{u} e $\frac{1}{u}$ da função u com k uma função constante e λ um número real.

3. Derivadas

- Derivada da função em um ponto.
- Tangente à uma curva de uma função derivável em um ponto.
- Funções deriváveis.
- Derivadas das funções de referência estudadas.
- Derivada da soma, do produto e do quociente.
- Ligação entre o sinal da derivada e o comportamento da função.

4. Sequências

- Modos de se gerar uma sequência numérica.
- Progressões aritméticas e geométricas.
- Significado da variação de uma sequência numérica.
- Noção de limite de uma sequência através de exemplos.

⁹Disponível em: http://eduscol.education.fr/cid46522/programmes-du-cycle-terminal-de-la-voie-generale.html#serie_S_term. Acesso em: 02/03/2014.

Classe de terminale - 3° ano

1. Sequências

- Formas de recorrência.
- Limite finito ou infinito de uma sequência.
- Limites por comparação.
- Operações com limites.
- Comportamento no infinito da sequência q^n para q real.
- Sequências limitadas inferiormente e superiormente.

2. Limites de funções

- Limite finito e infinito de uma função no infinito.
- Limite infinito de uma função em um ponto.
- Limite da soma, do produto, do quociente e da função composta.
- Limites por comparação.
- Assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

3. Continuidade em um intervalo e o teorema do valor intermediário

4. Cálculo de derivadas: complementação

- item Cálculo de derivada das funções potência, raiz enésima, exponencial e logarítmica.
- Derivada de funções composta com funções lineares.

5. Função Seno e Cosseno

6. Função exponencial

7. Sequências

- Caracterização da função exponencial.
- Propriedades da função exponencial.
- Relação fundamental.

8. Função logaritmo neperiano

- Caracterização da função logaritmo.
- Propriedades da função logaritmo.

9. Integral

- Integral definida de uma função contínua e positiva em um intervalo.
- Relação entre a integral e a derivada.
- Teorema fundamental do Cálculo.
- Primitiva de uma função contínua em um intervalo.
- Teorema: toda função contínua em um intervalo admite primitivas.
- Integral de uma função contínua de sinal qualquer.
- Linearidade, positividade e a relação de Chasles ¹⁰.
- Teorema do Valor Médio

Finalizando a análise sobre o currículo francês nos liceus, verificamos também a presença de um ramo de Cálculo bastante extenso e como Costa (2011) observa é o mais distante do Brasil, sendo os conteúdos compatíveis com o ciclo básico de um curso superior, o que é coerente com o fato deste nível na França ser considerado o primeiro título de grau superior.

3.4 Chile

A organização do sistema educacional e o Currículo Nacional do Chile estão atualmente em um período de transição, devido à aprovação da Lei Geral de Educação (LGE) - 20.370 de 12 de setembro de 2009. Durante esse processo de transição estarão em vigor os dois documentos:

- Marco Curricular.
- Bases Curriculares.

As bases curriculares é o novo documento do Currículo Nacional e estabelecem uma lista única de objetivos mínimos de aprendizagem. Gradativamente alguns conteúdos estão sendo adaptados e a previsão é de total incorporação dos novos modelos até 2015.

A educação formal ou regular é organizada em quatro níveis: pré-escolar, ensino primário, secundário e superior, sendo que a pré-escola não possui duração definida e não é compulsória. O nível de educação básica é compulsório e inicia-se aos seis anos, possuindo uma duração de seis anos. O estudante deve ingressar no nível de educação média regular

¹⁰ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, com $a < c < b$

com no máximo dezesseis anos e este nível possui duração de também seis anos, dos quais quatro são de formação geral e os últimos dois de formação diferenciada, de acordo com os interesses do aluno.

3.4.1 Sistema Educacional Chileno

Apesar do texto da LGE definir a subdivisão supracitada do sistema educacional, nos documentos oficiais, currículos e orientações educacionais, ainda se apresenta o ensino básico com oito anos, dos quais os dois últimos (7° e 8°) sempre aparecem recortados dos demais e o ensino Médio, ou secundário, com quatro anos de duração, dos quais os dois últimos se ramificam nos percursos diferenciados. Sem definir as etapas dentro de cada nível, pode-se entender o sistema chileno da seguinte forma:

Educação Pré-Escolar (ISCED 0)

Nível educacional destinado integralmente as crianças desde o nascimento até o ingresso no ensino primário. Sua finalidade é promover de forma sistemática, atempada e adequada o desenvolvimento integral e aprendizado relevante e significativo para os bebês, de acordo com a base curricular determinada em lei e o apoio à família no seu papel insubstituível como primeiro educador.

Educação Básica (ISCED 1 e ISCED 2)

Nível educacional que é orientado para a formação integral dos alunos em suas dimensões físicas, emocionais, capacidades cognitivas, sociais, culturais, morais e espirituais de desenvolvimento. De acordo com os conhecimentos, habilidades e atitudes definidos nas regras de currículo determinado lei, e permitir-lhes continuar o processo de educação formal.

Educação Média (ISCED 3)

Nível educacional que atende aos concluintes da educação básica e visa assegurar que cada aluno possa expandir e aprofundar a sua formação geral e desenvolver os conhecimentos, habilidades e atitudes que lhe permitam exercer integralmente e ativamente na sociedade sua cidadania. Este nível educacional oferece uma formação geral comum e percursos diferenciados:

- **Humanístico-científico**

Direcionado para áreas mais profundas do ensino geral de interesse dos alunos.

- **Profissional**

Destinado ao treinamento para a qualificação em setores de interesse econômico dos alunos.

- **Artístico**

Formação especializada em diferentes áreas artísticas de interesse dos alunos.

A educação neste nível permite ao aluno continuar seu processo de educação formal através do ensino superior ou juntar-se ao mercado de trabalho.

A Matemática está presente como disciplina em todos os anos da educação comum, ou seja, até o segundo ano do ensino Médio. Para os dois anos finais das formações diferenciadas temos a Matemática como disciplina dos percursos humanístico-científico e de algumas áreas profissionais. Pela grande diversidade de currículos dos percursos profissionais (atualmente 11 e previsão de ampliação para 34 até 2015) faremos a análise apenas dos anos comuns e do percurso humanístico-científico.

O sítio do Ministério da Educação do Chile ¹¹ apresenta todos os currículos para todos os percursos formativos com fácil acesso, além de orientações pedagógicas, propostas didáticas, ferramentas computacionais educacionais e até mesmo sugestões de organização do tempo para os professores. Dentre os documentos disponíveis está a base curricular do ensino médio para Matemática de Maio de 2013 e que está dividido em quatro temas:

- Números.
- Álgebra e Funções.
- Geometria.
- Estatística e Probabilidade.

Cada tema é descrito para o 7° e 8° anos do ensino básico (ainda com nomenclatura ultrapassada) e para os dois primeiros anos do ensino Médio. A seguir apresentamos o conteúdo, em forma de habilidades, relativo ao tema Álgebra e Funções.

7° ano - do Ensino Básico

1. Reconhecer o papel desempenhado pelas variáveis na vida cotidiana e as vantagens que da linguagem e do cálculo simbólico.
2. Explicar de forma concreta, gráfica ou simbólica, a comutatividade, a associatividade da adição e da multiplicação e a distributividade da multiplicação em relação a soma de números naturais e racionais positivos.

¹¹<http://www.mineduc.cl/> Acesso em: 02/03/2014.

3. Traduzir expressões da linguagem textual para linguagem algébrica e vice-versa.
4. Reduzir expressões algébricas agrupando os termos semelhantes para obter expressões da forma $ax + by + cz$ com $a, b, c \in \mathbb{N}$
5. Modelar e resolver os problemas que podem ser representados por equações e inequações da forma $ax + b = c$, $ax + b < c$, $ax + b > c$ com $a, b, c \in \mathbb{N} : b < c$, de maneira concreta, gráfica¹² e simbólica.
6. Resolver problemas da vida cotidiana e das ciências, relativos às quantidades diretamente proporcionais usando tabelas e gráficos.

8º ano - do Ensino Básico

1. Descobrir em situações concretas ou de forma geométrica os produtos notáveis e aplicá-los a problemas do cotidiano.
2. Transformar expressões algébricas que contenham potências em produtos notáveis.
3. Mostrar que compreendem as noções de função, através de fenômenos lineares da forma $f(x) = a \cdot x$ metaforizando com máquinas de entrada e saída.
4. Mostrar que compreendem o significado de função uma linear $y = f(x)$ através da metáfora de máquinas, na qual a soma e o produto na entrada se mantém na saída.
5. Modelar problemas que podem ser representados por equações e inequações da forma $ax + b = c$, $ax + b < c$, $ax + b > c$ com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ de maneira concreta, algébrica e gráfica.
6. Mostrar que compreendem a função afim como a soma de uma constante e uma variação constante em situações do cotidiano.
7. Descobrir algebricamente a troca de intervalos reconhecendo quando é da forma $f(t + 1) - f(t) = c$ (variação constante) modelando situações da vida real, da Economia e das Ciências Naturais e Sociais.
8. Descobrir por meio de situações reais a modelagem e representação gráfica da solução de um sistema linear 2x2.
9. Modelar problemas de Geografia, Ciências Naturais e Economia que podem ser representados por funções em duas variáveis da forma $f(x, y) = ax + by$

Iº ano - do Ensino Médio

¹²tradução do original em espanhol *pictórica* que pode ser entendido ora como uma gráfica, ora como representação geométrica

1. Aplicar o conhecimento das operações sobre expressões algébricas não fracionárias, operando polinômios e utilizando produtos notáveis.
2. Descobrir variações quadráticas em situações das ciências naturais e da vida cotidiana, representando-os por meio da função quadrática $f(x) = ax^2$.
3. Resolver equações quadráticas da forma $(x - a)^2 = b$ e outras que se reduzam a esta forma completando quadrados, de maneira concreta, gráfica e simbólica.
4. Representar graficamente o conjunto de soluções de inequações da forma $y > (x - a)^2$ e também $y < (x - a)^2$.
5. Interpretar funções valor absoluto da forma $f(x) = |ax + b|$ através de gráficos e resolvendo equações e inequações da forma $|ax + b| \leq c$ e da forma $|ax + b| \geq c$.
6. Modelar problemas de Geografia, Ciências Naturais e Sociais que podem ser representados por funções de duas variáveis da forma $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2$, traçando suas curvas de nível.
7. Estudar modelos recursivos lineares com ruído aditivo como $x(t+1) = ax(t) + bn(t)$ com entradas de valores equiprováveis 1 e -1, simulando manualmente ou computacionalmente situações ou fenômenos em Ciências Naturais e Sociais.

IIº ano - do Ensino Médio

1. Transformar expressões algébricas fracionárias simples para resolver problemas de Ciências Naturais e Sociais.
2. Mostrar que compreende a função quadrática geral $f(x) = ax^2 + bx + c$ aplicando-a em modelos de Ciências Naturais e Sociais.
3. Resolver de maneira gráfica e algébrica equações algébricas da forma $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Mostrar que compreende as funções potência: $y = ax^n$, $a > 0$ para n inteiro com $|n| \leq 3$ aplicando-as em modelos de Ciências Naturais e Sociais.
5. Modelar situações de variação percentual constante da vida real, Economia, Ciências Naturais e Sociais através da variação de intervalos de tempo $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$.
6. Entender a função inversa com a metáfora da máquina que trabalha ao contrário e determinar as funções inversas de funções linear e afim.
7. Investigar o comportamento da função raiz quadrada e outras raízes enésimas identificando-as como função inversa da função potência para $x \geq 0$ e aplicá-la

na modelagem de situações da vida real e das ciências.

8. Investigar o comportamento de função exponencial $y = a^x$ identificando-a como a função com variação percentual constante para aplicá-la na modelagem de situações da vida real e das Ciências.
9. Investigar o comportamento de função logarítmica $y = \log_a x$ identificando-a como a função inversa da exponencial para aplicá-la na modelagem de situações da vida real e das Ciências.

O currículo até aqui apresentado equivaleria ao 8° e 9° anos do ensino fundamental e o 1° ano do ensino médio no Brasil, no que diz respeito aos temas de Álgebra e Funções. Entretanto, nota-se uma extrema preocupação em apresentar uma Matemática prática e aplicável, sempre remetendo a ligação do conceito com situações do cotidiano e aplicações em diversas áreas, em especial as Ciências Naturais e Sociais.

Para os dois anos finais do nível ISCED 3 chileno, o aluno poderá percorrer caminhos diversos. Apesar da reforma em andamento, o programa de Matemática do 3° e 4° anos do ensino médio no Chile ainda data de 2005. O governo disponibilizou recentemente apenas uma sugestão de planejamento com base nos livros indicado por ele, tal sugestão encontra-se no Anexo G e o capítulo relacionado a Álgebra e Funções do currículo oficial de 2005 é apresentado na sequência.

III° ano - do Ensino Médio

1. Expressões racionais. Operações algébricas. Fatoração, simplificação, racionalização. Equações simples com expressões racionais.
2. Raízes enésimas de números positivos. Potências com expoente fracionário. Operações. Relação entre o potências de expoente fracionário e raízes.
3. Equação quadrática. Demonstração da fórmula para obter as soluções da equação quadrática. Análise das soluções e sua relação com o gráfico da função. Estudo do gráfico da função quadrática considerando o sinal do discriminante.

IV° ano - do Ensino Médio

1. Polinômios de uma variável com coeficientes reais. Grau. Algoritmo da divisão. Função polinomial associada a um polinômio. Raízes ou zeros de polinômios. Condição para um polinômio ser divisível por $x - a$, Teorema do Fator¹³ e Teorema do resto.

¹³Se c é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $x - c$ é um fator de $p(x)$.

2. Fatoração de polinômios como produto de fatores lineares e quadráticos. Raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros. Aplicação na solução de algumas equação de grau maior que dois.
3. Notas históricas sobre as equações de 3º e 4º grau. Comentários sobre as equações de grau superior ou igual a cinco.

Uma importante observação deve ser feita em relação a extensão dos dois últimos programas apresentados. Estes são bem menores pois a carga horária de Matemática que era em torno de 6 horas/aula em toda a parte comum do sistema educacional é reduzida pela metade nos dois últimos anos, contendo apenas 3 horas/aula semanais.

Outro ponto a ser ressaltado é novamente a semelhança com os programas dos anos equivalentes do ensino brasileiro, em que nos dois últimos anos do ensino médio é praticamente nula a presença do estudo de funções pela prescrição dos PCNEM. Por fim, analisando o currículo do caminho científico-humanista poder-se-á notar outra semelhança com o atual currículo brasileiro para o nível em questão: a ausência de temas relacionado ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

4 O estudo de Cálculo no Ensino Médio

Neste capítulo são apresentados argumentos que embasarão a proposta de retomada do estudo de Cálculo na escola básica, apoiados em passagens de alguns documentos oficiais do Brasil e citação de autores como Geraldo Ávila, Luis Carlos Duclos, José Carlos Oliveira Costa, Fernando Rodrigues de Oliveira que defendem a mesma tese.

Mais adiante apresentaremos uma proposta de adequação dos conteúdos abordados no Ensino Médio no Brasil. Esta será antecedida de uma pequena discussão dos textos que orientam a organização curricular das escolas brasileiras, Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 2000, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ Ensino Médio (PCN+) de 2002 e as Orientação Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) de 2006 e do texto do estado de Minas Gerais, Conteúdos Básicos Comuns (CBC) Matemática, a fim de mostrar a viabilidade da proposta e indicar os pontos nos quais ela pode ser implementada. Para cada alteração, será destacado seu propósito e apresentadas possíveis aplicações e recursos didáticos que podem ser utilizados.

Feito isso, serão apresentadas duas sequências didáticas, que abordam dois dos principais conceitos do Cálculo, a **Derivada** e a **Integral**, como ilustração da possibilidade de se tratar desses assuntos em um primeiro momento de forma intuitiva e investigativa e, ao mesmo tempo, utilizar a tecnologia como aliada no processo de ensino/aprendizagem através do uso de um *software* computacional.

4.1 Porque estudar Cálculo no Ensino Médio

A característica interdisciplinar do Cálculo como ferramenta para resolver problemas em diversas áreas, tais como Física, Química, Biologia, Engenharia e Ciências Sociais, o torna uma das mais importantes construções matemáticas já realizadas pelo homem. Não obstante, o Cálculo também veio responder a questões próprias da Matemática e seu estudo encontra significação também dentro da Matemática Pura.

Ambas vertentes do estudo de Cálculo, como teoria e como aplicação, estão altamente

conectadas e são inerentes a seu conteúdo desde seu cerne com Leibniz e Newton. Fato esse que é importante na justificativa do estudo de Cálculo, tanto para estudantes de Ensino Médio, quanto no Ensino Superior.

O *PCN+ - Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* (MEC, 2002, p.111), coloca a seguinte referência em relação ao ensino de Matemática na etapa final da escolarização básica:

Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber.

Nota-se a importância da significação de conceitos matemáticos através de aplicações em outras áreas e do papel exercido pela Matemática de validar modelos e fornecer ferramentas nas diversas áreas científicas. Os conceitos fundamentais do Cálculo contemplam exatamente as premissas explicitadas na passagem supracitada do PCN+. A título de exemplo a aplicação do conceito de derivada na área da física pode ser mostrada pela passagem de Oliveira (2010, p.12):

O ensino e a aprendizagem de conceitos de velocidade aceleração e posição, bem como os estudos do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) ficariam muito facilitados quando relacionados com taxas de variação instantânea.

A retomada do Cálculo é coerente com os aspectos expostos anteriormente. Trata-se de um tema com extrema riqueza de aplicações e contextualização, que em diversos momentos, poderá ser apresentado de forma interdisciplinar. Além disso, deve-se considerar que a relevância histórica do tema é notável, sendo um marco na construção da Matemática pela revolução que seu advento causou. “O cálculo é a matemática dos movimentos e das variações. Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada. Isto era verdade quando essa disciplina surgiu e continua a valer hoje”. (THOMAS, 2006, p.XV)

Pode-se pensar que a inclusão, ou retomada, do Cálculo ao currículo traria ainda mais problemas à um programa tão extenso e que dificilmente é cumprido pelos professores da educação básica, mas esse pensamento é no mínimo questionável. Ávila (1991) afirma que os programas não são extensos e sim mal estruturados e após a LDB de 1996, mesmo com as diversas mudanças feitas, ainda existem resquícios de ideias totalmente ultrapassadas e

que “incham” o currículo. O próprio PCN+, já destaca, por exemplo, que “se o único caso de funções inversas que os alunos verão no ensino médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis” (MEC, 2002, p.120).

Podemos levantar algumas questões sobre a extensão e os temas do atual currículo nacional:

- a) Qual o sentido em se despender tanto tempo na formalização de conceitos da teoria de conjuntos antecedendo o estudo de funções?
- b) É realmente útil e acessível ao aluno o estudo geral de funções, como um caso particular de relação entre conjuntos, antes de lhe serem apresentados exemplos concretos?
- c) Os conceitos de domínio, contra domínio, imagem, injeção, bijeção são tangíveis para quem ainda não vivenciou a utilidade de uma função?
- d) A ideia de função inversa, por exemplo, somente aparece no Cálculo quando precisamos obter a derivada de uma função conhecida a derivada de sua inversa, sem o Cálculo qual a utilidade desse conceito?

Duclos (1992) já acreditava que generalizar antes de particularizar ou preceder a abstração ao concreto é contrário à boa prática pedagógica. Muito do tempo que se perde hoje para cumprir o programa de Ensino Médio vem de ideias ainda da Matemática Moderna que ficaram enraizadas desde o século passado. Tempo esse que poderia ser preenchido com tópicos de real significância prática para o aluno. Ao se tratar de temas com aplicações diretas dá-se ao aluno subsídio para justificar o porquê da necessidade de formalizar tais conceitos adiante. É preciso primeiro aprender a falar para somente depois ver significado no estudo da gramática.

O problema da determinação da reta tangente a uma curva é extremamente motivador pois possui um enunciado simples e solicita ao aluno uma intuição do comportamento de elementos gráficos em uma escala infinitesimal, atrelando assim também o conceito de limite, que de fato determina algebricamente a derivada. Além do problema em si, as aplicações são inúmeras. Se trabalhado em paralelo com o estudo de Cinemática torna a tarefa do professor de Física muito menos sofrível, pois este poderá deixar de usar de subterfúgios para relacionar a inclinação da função horária com a velocidade e desta com a aceleração. Apresentar em Física o modelo newtoniano de movimento sem a ferramenta do Cálculo à disposição é negar sua própria construção e simplificar de forma bruta um modelo que já é, por definição, uma simplificação do real.

Trabalhar com problemas de cálculo de extremos de uma função também possui apli-

cabilidade direta na indústria ou mesmo em problemas do cotidiano. Associado a esses problemas temos conceitos de Geometria plana, como planificações e cálculo de áreas, o que faz da situação rica pela interconexão de temas da própria Matemática também. Tais problemas podem ser resolvidos sem o uso do Cálculo para funções quadráticas, por exemplo, mas e para funções polinomiais de grau maior que dois? Pode-se ainda recorrer ao Teorema de D'Alembert ¹, mas este, em casos de polinômios com raízes não inteiras, por exemplo, pode ter sua aplicação bastante dificultada, entrave que as ferramentas do Cálculo não possuem, nesse caso.

A determinação de áreas é um problema que ocupa a mente dos matemáticos desde a Grécia antiga e desse problema nasce a ideia da uma das aplicações da Integral: o cálculo de áreas sob curvas. É um motivador bastante rico a utilização de um problema com elementos históricos significativos, que fomentou a criação de uma ferramenta totalmente nova e que, além disso, pode ser trabalhado numericamente a fim de se gerar soluções aproximadas e induzir a obtenção da solução real.

Um outro dado importante que é consequência, dentre outros fatores, da ausência do Cálculo no Ensino Médio é o alto índice de reprovação da disciplina de Cálculo I dos cursos superiores. Garzella (2013), em sua tese de Doutorado analisou a série histórica de 1997 à 2009 a respeito da reprovação da disciplina de Cálculo I da Unicamp e constatou taxas de até 77,5% entre reprovação e evasão nos doze anos estudados. A autora também sugere que a retomada de temas sobre Cálculo no Ensino Médio prepararia melhor os alunos para enfrentar a disciplina no nível superior.

4.2 Proposta de currículo para o Ensino Médio

4.2.1 O currículo nacional atual

O primeiro marco legal referente a organização de currículos para o Ensino Médio em escala nacional após a Lei nº 9394/96 foram os PCNEM de 2000. Sua maior intenção era nortear o trabalho de confecção dos currículos dentro de cada escola e passar orientações gerais na forma de sugestões de ordem metodológica e pedagógica. O enfoque nas competências e habilidades, predominante atualmente nas discussões sobre currículo, é o ponto central do documento e segue a linha do que já havia sido proposto no texto da LDB. Em sua introdução MEC (2000, p.4) já enfatiza que será apresentada:

¹Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, $P(a) = 0$.

[...] uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade.

Os PCN+ já avançam na discussão e são uma construção coletiva que envolveu acadêmicos de todas as áreas do conhecimento ligadas a Educação Básica. Mais bem estruturado que seu anterior, o texto possui extenso detalhamento do que denomina “temas estruturadores” com bastante foco na interligação das disciplinas, principalmente dentro da mesma área. São apresentadas também habilidades e competências para cada tema, uma parte de conteúdos, justificada no fato de que, “não se trata de separar o ensino de conteúdos específicos das competências, pelo contrário, essas são duas dimensões da aprendizagem que devem ocorrer conjuntamente”. (MEC, 2002, p.113)

Um dos temas estruturadores, denominado Álgebra: números e funções, aparece nos três anos do ensino médio, indicado pelo número 1, conforme tabela 4.1.

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Tabela 4.1: Organização de Temas e Unidades para o Ensino Médio
 Fonte: MEC, 2002, p.128.

O terceiro e mais recente documento sobre o tema, lançado pelo governo federal, o OCEM,

trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. Inicialmente são reestruturados os eixos definidos nos PCN+, passando agora a quatro grandes temas:

1. Números e operações.
2. Funções.
3. Geometria.
4. Análise de dados e probabilidade.

Para cada tema é feita uma discussão detalhada das habilidades associadas e também das formas de abordagem de cada conteúdo em si, destacando pontos que merecem mais atenção do professor e sinalizando outros que podem ser deixados de lado.

De linguagem bastante fluente, o texto do OCEM apresenta ao leitor situações problema que podem ser usadas como gatilho para apresentação dos conteúdos, perpassando por todos os tópicos determinados como essenciais para o aprendizado do aluno. Ainda apresenta um capítulo sobre metodologias, destacando o pensamento construtivista adotado, outro sobre organização do currículo e finaliza ilustrando alguns temas complementares, nos quais **não se inclui o Cálculo Diferencial**, citado inclusive como conteúdo a ser visto no ensino superior.

4.2.2 O currículo do estado de Minas Gerais

O documento com a proposta mineira para educação secundária nas escolas públicas difere um pouco dos já citados. Apesar da presença também das habilidades a serem trabalhadas e da constante citação dos textos federais, fica clara a determinação de uma lista de conteúdos a serem trabalhados obrigatoriamente por todos. Fica aí um ponto de divergência com a proposta anterior de trabalhar com sugestões que podem, e devem, ser adaptadas a realidade de cada escola e grupo de alunos. Tal caráter mais impositivo fica visível na seguinte passagem de Carneiro *et al* (2007, p.9):

Os CBCs não esgotam todos os conteúdos a serem abordados na escola, mas expressam os aspectos fundamentais de cada disciplina, que não podem deixar de ser ensinados e que o aluno não pode deixar de aprender. Ao mesmo tempo, estão indicadas as habilidades e competência que ele não pode deixar de adquirir e desenvolver. No ensino médio, foram estruturados em dois níveis para permitir uma primeira abordagem mais geral e semiquantitativa no primeiro ano, e um tratamento mais quantitativo e aprofundado no segundo ano.

Os conteúdos estão organizados dentro dos seguintes eixos temáticos:

1. Números, contagem e análise de dados.
2. Funções elementares e modelagem.
3. Geometria e medidas.

A divisão apresentada difere da proposta tanto dos PCN+ quanto das OCEM. O texto justifica a presença do eixo 2 pela fato das “funções elementares associadas à modelagem possuem um papel importante na conexão com as outras disciplinas da área de Ciências da Natureza e mesmo com outras áreas, adquirindo um caráter estruturador e integrador.” (CARNEIRO *et al*, 2007, p.37)

4.2.3 O currículo proposto

Por trazer uma descrição mais detalhada dos conteúdos por ano de escolaridade, o CBC de Minas Gerais para Matemática será utilizado como base para proposta de currículo e de pontos nos quais seria possível a inserção de temas relativos ao Cálculo. É importante deixar claro que tal proposta, apesar de ser feita sobre o CBC, é muito mais consonante com as ideias dos textos federais e busca suscitar uma discussão sobre o tema e uma possibilidade de trabalho.

A proposta apresentada foi construída considerando alguns aspectos já discutidos anteriormente:

1. Os currículos de Matemática dos sistemas educacionais apresentados no Capítulo 2.
2. As justificativas apresentadas para que o conteúdo de Cálculo seja parte integrante do currículo de Matemática do Ensino Médio.

Trataremos agora da proposta por ano de escolaridade, apresentando inicialmente a proposta contida no CBC (tabelas em rosa), em seguida a nossa proposta (tabelas brancas) e por fim uma análise das alterações sugeridas.

1º ano

Nesse ponto, desejamos fazer a primeira intervenção na estrutura do currículo apresentado no CBC. Um tópico sobre a noção intuitiva de limite, seguido do estudo de derivadas de funções polinomiais pode ser inserido logo após o estudo da função do segundo grau, que por sua vez, também poderia ser ampliado para o estudo de funções polinomiais de graus superiores, haja visto que a ferramenta da derivada traz mais possibilidades de entendimento tanto algébrico como gráfico dessas funções. O conteúdo sobre progressão geométricas e função exponencial foi deslocado para o segundo ano e tratado juntamente

TÓPICOS	HABILIDADES
8. Função do primeiro grau	8.1. Identificar uma função linear a partir de sua representação algébrica ou gráfica. 8.2. Utilizar a função linear para representar relações entre grandezas diretamente proporcionais. 8.3. Reconhecer funções do primeiro grau como as que têm variação constante. 8.4. Identificar uma função do primeiro grau a partir de sua representação algébrica ou gráfica. 8.5. Representar graficamente funções do primeiro grau. 8.6. Reconhecer funções do primeiro grau crescentes ou decrescentes. 8.7. Identificar os intervalos em que uma função do primeiro grau é positiva ou negativa relacionando com a solução algébrica de uma inequação. 8.8. Identificar geometricamente uma semi-reta como uma representação gráfica de uma inequação do primeiro grau. 8.9. Reconhecer uma progressão aritmética como uma função do primeiro grau definida no conjunto dos números inteiros positivos. 8.10. Resolver problemas que envolvam inequações do primeiro grau.
9. Progressão aritmética	9.1. Reconhecer uma progressão aritmética em um conjunto de dados apresentados em uma tabela, seqüência numérica ou em situações-problema. 9.2. Identificar o termo geral de uma progressão aritmética.

Tabela 4.2: Conteúdos do eixo Funções Elementares e Modelagem - 1º ano

Fonte: Carneiro *et al*, 2007, p.46.

com o tópico sobre logaritmos. Dessa forma apresentamos uma proposta bastante similar a portuguesa, principalmente, e não muito distante da francesa, pois ambas apresentam os conceitos de limite e derivada logo após as funções polinomiais, diferindo apenas no caso da França que também trata de funções modulares, raiz e racionais antes disso.

Algumas vantagens, já citadas, de ser inserir a noção de limite e derivada nesse ponto é a utilização desses conceitos na Física, que trabalha no mesmo momento a Cinemática. Além disso, problemas de otimização são algumas das diversas aplicações envolvendo derivadas e funções do segundo grau ou superior podem ser trabalhadas, dentre eles o cálculo de área máxima ou consumo de matéria prima mínima, sem recorrer as fórmulas em geral apresentadas aos alunos.

TÓPICOS	HABILIDADES
10. Função do segundo grau	10.1. Identificar uma função do segundo grau a partir de sua representação algébrica ou gráfica. 10.2. Representar graficamente funções do segundo grau. 10.3. Identificar os intervalos em que uma função do segundo grau é positiva ou negativa. 10.4. Resolver situações-problema que envolvam as raízes de uma função do segundo grau. 10.5 Resolver problemas de máximos e mínimos que envolvam uma função do segundo grau.
11. Progressão Geométrica	11.1. Identificar o termo geral de uma progressão geométrica.
12. Função exponencial	12.1. Identificar exponencial crescente e exponencial decrescente. 12.2. Resolver problemas que envolvam uma função do tipo $y(x) = ka^x$. 12.3. Reconhecer uma progressão geométrica como uma função da forma $y(x) = ka^x$ definida no conjunto dos números inteiros positivos.

Tabela 4.3: Conteúdos do eixo Funções Elementares e Modelagem - 1º ano
 Fonte: Carneiro *et al*, 2007, p.47.

Mantendo então os tópicos 8, 9 e 10, assinalados nas tabelas 4.2 e 4.3 construímos o restante de tal eixo conforme as tabelas 4.4, 4.5 e 4.6.

Tópicos	Habilidades
Funções polinomiais	Identificar algebricamente um polinômio de grau n .
	Decompor um polinômio em fatores de menor grau.
	Determinar algebricamente as raízes de polinômios de graus 3 e 4 por meio de decomposição.
	Reconhecer graficamente o significado das raízes de um polinômio.

Tabela 4.4: Funções polinomiais para o 1º ano do Ensino Médio
 Fonte: Proposta do autor

A ampliação dos estudos da função quadrática para as polinomiais de graus superiores traz para o aluno uma visão mais completa dessa família de funções, ficando assim apto a resolver uma gama maior de problemas. Trabalhar o Teorema do Resto e de D'Alembert para decompor polinômios de graus superiores também auxiliará em estudos futuros e justifica-se pela pouca eficiência das fórmulas das equações polinomiais de graus 3 e 4,

por exemplo, que devem inclusive ser mencionadas dentro do contexto histórico em que foram concebidas.

Tópicos	Habilidades
Noções de limite	Entender o significado de limite de uma forma geral.
	Trabalhar com a noção de infinito.
	Reconhecer graficamente a determinação do limite de uma função.
	Distinguir graficamente os limites laterais em um ponto.
	Reconhecer graficamente o conceito de continuidade de funções.
	Determinar algebricamente limites das funções polinomiais.
	Associar domínio e descontinuidade com a determinação de limites de funções racionais simples (hipérbole).

Tabela 4.5: Noções de limite para o 1º ano do Ensino Médio
Fonte: Proposta do autor

Seguindo os moldes do modelo português, o conceito de limite deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral à esquerda e à direita). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, devendo chamar-se a atenção para o fato de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso. Deve-se sempre usar o recurso gráfico para o maior entendimento do conceito e para investigação, trabalhando com os mais variados casos possíveis. Ao se tratar de continuidade (e descontinuidade) optar sempre pela ideia intuitiva apenas e apresentar como exemplo de função descontínua em um ponto a hipérbole, atrelando a essa discussão a importância de se determinar domínio de uma função.

Iniciar as discussões sobre derivadas partindo da taxa de variação média, a princípio da função afim, motivará os pontos seguintes. Novamente recorrer a visualização gráfica acompanhada de uma análise algébrica simples traz um recurso a mais para o entendimento do conceito e interliga duas áreas que não podem estar desassociadas, a Geometria e a Álgebra. Passando para o problema da obtenção da reta tangente a uma curva, pode-se iniciar o tema com a questão da posição relativa entre uma reta e uma circunferência e estender esse conceito para a tangente a uma curva, ressaltando agora a característica local da reta tangente à uma curva.

Ao adentrar no cálculo da derivada de funções polinomiais não há necessidade, ou obrigatoriedade, em se tratar do estudo formal de limite, podendo ser feita uma análise intuitiva, em primeiro momento geométrica e em seguida algébrica com a análise do comportamento da razão da variação média quando o tamanho do intervalo tende a zero, sendo interessante, inclusive, o estudo de casos particulares manualmente e computacionalmente,

Tópicos	Habilidades
Derivada	Calcular a taxa de variação média de uma função em um intervalo
	Interpretar geometricamente a taxa de variação de uma função
	Analisar intuitivamente a taxa de variação em um intervalo com amplitude tendendo a zero
	Traçar a reta tangente a uma curva em um dado ponto
	Associar taxa de variação e reta tangente à derivada
	Calcular a derivada de funções polinomiais
	Relacionar crescimento e decrescimento de uma função com a sinal de sua derivada
	Resolver problemas de valores extremos com o uso da derivada

Tabela 4.6: Derivada para o 1° ano do Ensino Médio
 Fonte: Proposta do autor

simulando valores cada vez menores para a amplitude desses intervalos.

Ao final devem ser mostrados e trabalhados diversos problemas que envolvem valores extremos, regiões de crescimento e decrescimento, preferencialmente que envolvem questões de outras áreas de conhecimento, como a Física, a Química e as Ciências Sociais. É uma boa oportunidade para discutir com os estudantes o processo de modelagem matemática e a sua importância no mundo atual. Nesse ponto, o estudo das derivadas é justificado para os alunos pela diversidade de problemas que podem ser resolvidos e por se tratar de uma ferramenta poderosa e simples de ser utilizada.

2º ano

TÓPICOS	HABILIDADES
22. Função do primeiro grau	22.1. Relacionar o gráfico de uma função do primeiro grau, no plano cartesiano, com uma reta.
23. Progressão aritmética	23.1. Resolver problemas que envolvam a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.
24. Inequações do segundo grau	24.1. Identificar geometricamente uma inequação com parte de um gráfico de uma função do segundo grau. 24.2. Resolver problemas que envolvam inequações do segundo grau.
25. Progressão geométrica	25.1. Resolver problemas que envolvam a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.
26. Função logarítmica	26.1. Reconhecer a função logarítmica como a inversa da função exponencial. 26.2. Utilizar em problemas as propriedades operatórias da função logarítmica. 26.3. Resolver problemas que envolvam a função logarítmica. 26.4. Reconhecer o gráfico de uma função logarítmica.
27. Sistema de equações lineares	27.1. Reconhecer se uma tripla ordenada é solução de um sistema de equações lineares. 27.2. Resolver um sistema de equações lineares com duas variáveis e interpretar o resultado geometricamente. 27.3. Resolver problemas que envolvam um sistema de equações lineares.

Tabela 4.7: Conteúdos do eixo Funções Elementares e Modelagem - 2º ano
Fonte: Carneiro *et al*, 2007, p.51.

Transferindo para o segundo ano os conteúdos relativos à função exponencial e a progressão geométrica e unindo a isso o estudo da função logarítmica, seria agora pertinente tratar da definição de função inversa e questões relativas a taxa de variação percentual constante. Uma primeira ideia sobre a integral definida como área sob uma curva já pode ser discutida aqui, o que torna a proposta bastante ambiciosa, pois de todos os currículos estudados apenas o Francês opta por tal estudo dentro do ensino secundário. Para uma melhor organização, o conteúdo de sistemas lineares seria transferido para o terceiro ano

e apresentado juntamente com a Geometria Analítica, fato que será justificado adiante.

Em termos de organização, os tópicos 11 e 12 da tabela 4.3 seriam alocados no segundo ano e o tópico 27 da tabela 4.7 seria retirado desse ponto. Acrescentaria-se, ao final de tal trecho um tópico sobre integral e seria adicionado aos tópicos de função exponencial e logarítmica habilidades relacionadas a derivadas de tais funções, explicitadas na tabela 4.8.

Tópicos	Habilidades
Função exponencial	Perceber a taxa de variação da função exponencial como sendo percentualmente constante.
	Relacionar a função exponencial à problemas de juros.
	Determinar a derivada da função exponencial.
Função logarítmica	Determinar a derivada da função logarítmica.
Integral	Calcular a área sob o gráfico de funções polinomiais por aproximação.
	Calcular a primitiva de funções polinomiais e exponencial.
	Diferenciar e relacionar o conceito de primitiva e o de área abaixo da curva.
	Determinar a área sob a hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$ em um intervalo fechado.
	Resolver problemas que envolvam áreas sob curvas.
	Resolver problemas que envolvam primitivas de uma função.

Tabela 4.8: Tópicos para o 2º ano do Ensino Médio

Fonte: Proposta do autor

Novamente aqui foi apropriada a ideia do currículo francês, que aproveita exatamente o mesmo momento para apresentação da integral, ainda que em nível mais profundo que a nossa proposta, pois chega ao teorema fundamental do Cálculo, mas usando de situações semelhantes e partindo sempre da investigação para somente ao final formalizar os conceitos.

A ligação desses conteúdos com outras áreas é enorme e deve ser explorada nesse ponto. Na Geografia, crescimentos populacionais pode ser modelados com funções exponenciais, assim como, fazendo uso do mesmo raciocínio, desenvolvimento de colônias de bactérias na Biologia e, dentro da própria Matemática, uma ligação com a parte financeira e o cálculo de juros. A escala Richter e o pH estão associados a função logarítmica, sendo que essa ainda possui um referencial histórico dentro da Matemática riquíssimo. É também um momento propício para apresentar a hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$ e determinar a área abaixo dela com o uso do mesmo logaritmo, problema esse que pode ser o primeiro motivador para o estudo da integral definida.

3º ano

TÓPICOS	HABILIDADES
42. Funções trigonométricas	42.1. Identificar o gráfico das funções seno, cosseno e tangente. 42.2. Reconhecer o período de funções trigonométricas. 42.3. Resolver equações trigonométricas simples.
43. Estudo de funções	43.1. Reconhecer funções definidas por partes em situações-problema. 43.2. Reconhecer os efeitos de uma transição ou mudança de escala no gráfico de uma função. 43.3. Usar a função logarítmica para efetuar mudança de escala.

Tabela 4.9: Conteúdos do eixo Funções Elementares e Modelagem - 3º ano

Fonte: Carneiro *et al*, 2007, p.57-58.

Dentro da proposta apresentada todo o conteúdo básico do Cálculo já estaria trabalhado nas duas séries iniciais e caberia agora apenas expandir os conceitos para as funções trigonométricas, propostas pelo CBC para serem estudadas nesse momento, com a inclusão de apenas uma habilidade referente a derivadas de tais funções ao conteúdo mostrado na tabela 4.9. Como o conteúdo relativo a sistemas lineares foi repassado para esse ano e grande parte do que é tratado no terceiro é referente à Geometria Analítica, seria proveitoso para o aluno poder trabalhar o significado geométrico da resolução de um sistema 2×2 (ou 3×3) em paralelo com os estudos do plano cartesiano e em sequência do espaço. Um bom momento para fazer conexões com problemas que podem ser resolvidos com o uso de recursos computacionais, como sistemas de ordem superior que modelam diversos fenômenos físicos, químicos e até mesmo sociais.

4.3 Proposta de sequência didática

O ensino de Matemática na escola básica possui diversos desafios atrelados a incorporação de práticas diversificadas de ensino que atinjam os alunos de hoje. Além disso, as diretrizes educacionais determinadas nos documentos oficiais indicam também para diversificação e apropriação de práticas que façam sentido ao cotidiano do aluno e se utilizem das tecnologias disponíveis. Também é crucial para a eficácia do processo de ensino

aprendizagem a abordagem de temas que sejam relevantes para a vida do aluno, para a construção do conhecimento matemática e que, evidentemente, sigam as prescrições das políticas públicas de educação.

Em relação a utilização de recursos computacionais no ensino da Matemática, Borba (1999, p.285) pontua que “os ambientes de aprendizagem gerados por aplicativos informáticos podem dinamizar os conteúdos curriculares e potencializar o processo de ensino e da aprendizagem”.

Já que no que tange a seleção dos temas que irão compor o currículo de Matemática, o seguinte trecho dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio MEC (2000, p.87-88) ressalta:

[...] o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados [...] o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Utilizando como motivação os dois aspectos destacados: uso de tecnologias e a seleção de temas curriculares, propomos através da descrição de duas sequências didáticas apresentar uma reflexão sobre as possibilidades do ensino de alguns conceitos e aplicações do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio da escola básica.

Optamos por usar a aplicação de dois dos conceitos fundamentais do Cálculo, a derivada de uma função no ponto através do estudo da inclinação da reta tangente à uma curva e a integral definida como área sob o gráfico de uma função explorados dentro do ambiente do *software* GeoGebra². Dentre as vantagens para escolha do GeoGebra destacam-se:

- Geometria e a Álgebra estão interconectadas em uma mesma interface.
- Software interativo e dinâmico.
- Possui versão em português.
- Software gratuito e de código aberto.

Temos como objetivo o estudo investigativo da aplicação do conceito de derivada através do estudo da inclinação da reta tangente à uma função de forma interativa e dinâmica e,

²O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo em um único sistema. Disponível em: www.geogebra.org. Acesso em 19/12/2013.

em uma segunda atividade, o estudo também investigativo da aplicação do conceito de integral definida pela análise de método de aproximação da área limitada por uma função e o eixo das abscissas.

É importante ressaltar que o aluno não necessita da definição algébrica dos dois conceitos utilizados para realizar a atividade. Por possuir um caráter investigativo ambas podem ser usadas como ponto de partida, ou motivação, para o estudo formal dos conceitos. O que se espera é que após um primeiro contato com uma das aplicações de derivada e integral, a partir do GeoGebra, os conceitos abordados façam mais sentido para o aluno em um posterior estudo de tais ferramentas. Para Krasilchik (2000) o uso de aulas práticas possibilita o envolvimento dos alunos em investigação e resolução de problemas, despertando o interesse dos alunos para o desenvolvimento proporcionando a apreensão de conceitos básicos.

Cabe reforçar que as aplicações aqui apresentadas decorrem dos conceitos, e não o inverso, sendo necessário que esteja bastante claro no momento da formalização para o aluno que a derivada de uma função não é a inclinação da reta tangente, a derivada fornece, em cada ponto, tal inclinação. De mesmo modo, a integral definida não necessita ter ligação com a área, mas que essa associação é sim uma de suas diversas aplicações.

Sugerimos que as atividades sejam propostas aos alunos que possuam algum grau de conhecimento a respeito do tema função. Serão utilizadas nas atividades apenas funções do polinomiais do segundo grau com intuito de viabilizar a aplicação em turmas que qualquer ano do ensino médio. Acrescentamos que os alunos necessitam, além dos pré-requisitos matemáticos citados, uma familiaridade com o GeoGebra na utilização das ferramentas da geometria dinâmica e na barra de entradas algébricas.

Utilizando nossa proposta de currículo, sugerimos a atividade 1 para alunos do 1º ano do ensino médio e a atividade 2 para alunos do 2º ano do ensino médio.

4.3.1 Atividade 1 - Derivada e a tangente

Antes de entrar no ambiente do *software*, uma discussão sobre o que seria uma tangente é necessária. Em geral, um estudante do ensino médio relaciona a expressão reta tangente dentro do contexto de posições relativas entre circunferências e retas. Nesse caso é frequente a definição de que reta tangente é aquela que “toca” a curva, ou objeto, em apenas um ponto. Sabemos que dentro do estudo das derivadas essa não é uma boa definição. Entretanto, mesmo que nesse momento não seja possível, e nem é objetivo da atividade, definir tangente como o limite das secantes é relevante apresentar exemplos aos alunos que os leve a entender reta tangente como a reta que possui características locais de tangência em um ponto, como na figura 4.1.

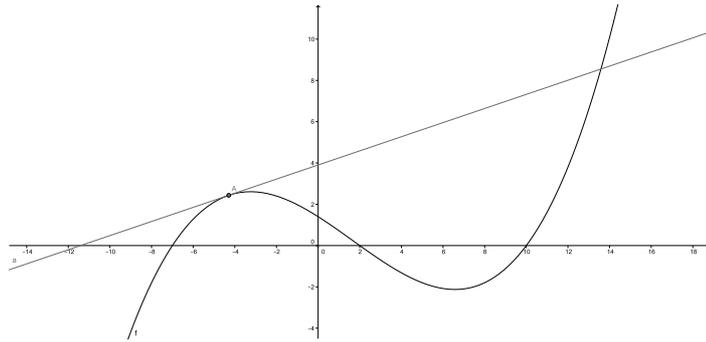


Figura 4.1: Característica local da tangente
Fonte: Elaborada pelo autor

Passando ao ambiente do GeoGebra segue o roteiro da atividade:

1. Insira na barra de fórmulas o seguinte função: $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
2. Utilizando a ferramenta de Ponto, marque sobre a função o ponto A cuja abscissa é igual a 4.
3. Dentro da ferramenta de Retas há a opção reta tangente, utilize-a para obter a reta tangente à função pelo ponto A. (Proponha aos alunos nesse momento que calculem a inclinação dessa reta de modo algébrico)
4. Marque agora um ponto B qualquer sobre função.
5. Trace a reta AB. (Questione os alunos sobre a possibilidade calcular a inclinação dessa reta)
6. Utilizando agora ferramenta inclinação, clique sobre cada uma das duas retas. (Nesse momento será possível confirmar os valores da inclinação obtidos anteriormente)
7. Deslize o ponto B sobre a função verificando de que forma varia a inclinação da reta AB (Figura 4.2). (Motive os alunos a observarem alguma regularidade nessa variação, como continuidade e comportamento ao se aproximar ou se afastar do ponto A)

4.3.2 Atividade 2 - Integral e a área

Historicamente, ao contrário do que em geral apresentam os livros de Cálculo, o conceito de integral foi discutido bem antes do conceito de derivada e esse era comumente associado a problemas com o cálculo de áreas. O cerne do conceito de integral parte do método de exaustão de Eudoxo que data do século IV a.C.

Um aluno do ensino médio está habituado a determinar a área de polígonos regulares,

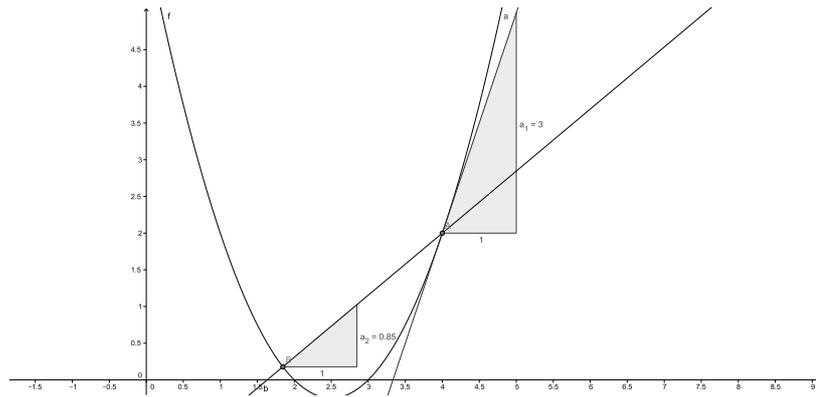


Figura 4.2: Retas secante e tangente

Fonte: Elaborada pelo autor

circunferências e figuras derivadas ou associadas a essas. A determinação da área delimitada por uma função, nesse caso específico uma parábola, e o eixo horizontal com certeza será um novo desafio.

Uma discussão inicial sobre a possibilidade do cálculo exato dessa área motivará o restante do atividade. Após a conclusão que com as ferramentas conhecidas pelos alunos tal exatidão seria impossível de ser obtida, deve-se passar a discussão de métodos de aproximação para a área desejada. Caso os alunos não proponham uma aproximação através de retângulos cabe ao professor apresentar a proposta. Nesse ponto é importante ressaltar que tais retângulos podem ser definidos de diversas formas, mas, a fim de aproveitar os recursos do GeoGebra, iremos usar uma aproximação por falta partindo do ponto com menor ordenada para determinar a altura do retângulo e uma outra aproximação, dessa vez por excesso, em que tomaremos como altura do retângulo o ponto de maior ordenada.

Segue roteiro da atividade:

1. Insira na barra de fórmulas o seguinte função: $f(x) = \frac{x^2}{3} + 4$
2. Acrescente um controle deslizante n que varie de 1 à 100 com incremento 1.
3. Digite na barra de entrada algébrica o seguinte comando *SomaDeRiemannInferior*[f , -2, 2, n]. (Solicite que os alunos façam uso do controle deslizante para visualização o que acontece com a área quando o número de retângulos aumenta)
4. Digite na barra de entrada algébrica o seguinte comando *SomaDeRiemannSuperior*[f , -2, 2, n]. (Discuta porque umas das áreas aumenta e a outra diminui ao se aumentar o número de retângulos e questione qual a relação entre o número de retângulos e a área exata)
5. Por fim, digite na barra de fórmulas *Integral*[f , -2, 2] (Figura 4.3).

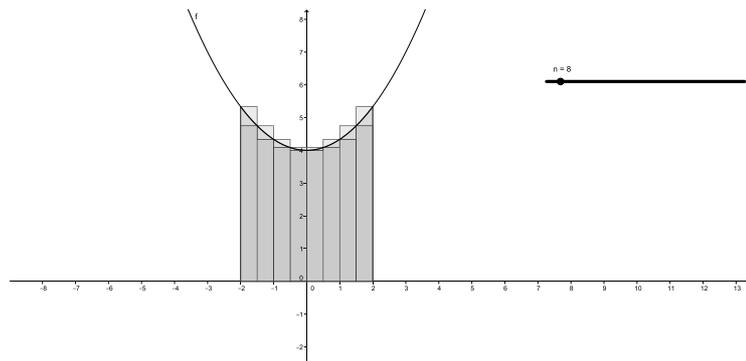


Figura 4.3: Integral Definida
Fonte: Elaborada pelo autor

A seguinte pergunta pode motivar a continuação do tema: O que devo fazer para, a partir da ideia dos retângulos, obter a solução exata para o problema do cálculo da área abaixo da curva?

5 Considerações Finais

A análise da construção histórica do currículo de Matemática da escola básica no Brasil, traz uma questão inicial para discussão da possibilidade de retomada do Cálculo Diferencial e Integral ao currículo atual: qual o motivo de sua retirada? Não é intenção do trabalho determinar tal motivo, ou motivos, mas sim levantar possibilidades. Podemos conjecturar algumas:

1. Pela extensão do currículo, que dificilmente é cumprido na íntegra.
2. Pela maior relevância de outros conteúdos em relação ao Cálculo.
3. Pela falta de consonância com os propósitos da Educação Básica.
4. Pela dificuldade do conteúdo, evidenciada pelos índices de reprovação da disciplina no ensino superior.
5. Pela má formação de nossos professores que teriam dificuldade em tratar do tema.
6. Pela tendência da Educação mundial de repassar tal conteúdo ao ensino superior.

Essas afirmações poderiam perfeitamente responder à nossa pergunta inicial, mas todas elas podem ser rebatidas (e foram discutidas) pelos elementos apresentado nesse trabalho. As afirmativas 1 e 2 na verdade apontam para outro problema que nada se relaciona com o Cálculo: o currículo atualmente adotado é extenso realmente ou são os tópicos pouco criteriosamente selecionados? Essas escolhas são fruto de um resquício histórico de correntes matemáticas já superadas? Entendemos que sim, o currículo poderia ser melhor distribuído e paradigmas muito antigos já deveriam ter sido quebrados.

A afirmativa 3 é refutada pelos próprios documentos curriculares oficiais. O ensino de Cálculo possui elementos que podem contemplar muitas, senão todas, as orientações metodológicas presentes em tais documentos. Interdisciplinaridade, relevância histórica, interconexão com temas da própria Matemática, aplicação em problemas práticas, possibilidade de uso de recursos tecnológicos, abordagens investigativas, são algumas das características que potencializam a possibilidade de estudo do Cálculo na escola básica.

A afirmativa 4 pode ser usada tanto para responder nossa pergunta como para reforçar

nossa proposta. Não seriam esses índices passíveis de melhora se o tema fosse abordado o quanto antes? Em geral, quanto mais familiarizado com o tema o aluno está, melhor será seu rendimento. Mas e a dificuldade em aprender Cálculo? Ela aparece pelas características intrínsecas ao conteúdo ou pela metodologia utilizada no ensino superior? Essa última pergunta requer um debate bem mais aprofundado, mas sabemos que uma maior diversidade de abordagens sob certo tema pode afetar positivamente um número maior de alunos e que os documentos oficiais apontam para isso dentro da escola básica.

A afirmativa 5 é bastante dura e não pode ser ignorada. É, no Brasil, o professor de Matemática mal formado? Independente da resposta podemos ver ações do poder público que visam melhorar a formação do profissional da educação no país e uma delas é o programa de Mestrado Profissional em Matemática, do qual esse trabalho é fruto. A formação do professor não é motivo para inserção ou retirada de alguma conteúdo do currículo, pois é possível sanar essas dificuldades com ações de formação continuada e reestruturação também dos currículos das licenciaturas.

A afirmativa 6 é totalmente descartada pelo exposto no Capítulo 2 desse trabalho. Os três países com melhor desempenho na avaliação do Pisa aqui estudados possuem o estudo de Cálculo no currículo da escola básica. Pela quantidade de países estudados não é possível fazer uma relação de causa e efeito em relação ao estudo de Cálculo e a qualidade do sistema educacional, mas dentro de nosso espaço amostral temos uma forte tendência que pode ser colocada a prova em estudos futuros.

O currículo aqui apresentado como proposta leva em consideração todas essas afirmativas e tenta apresentar uma proposta alternativa ao que temos hoje. As opções feitas para os temas, a organização deles e mesmo as orientações metodológicas não passam de ilustração da possibilidade de estudo do Cálculo. Esse estudo sim, cremos ser possível e necessário.

A proposta desenhada neste trabalho poderia ser construída por diversos outros caminhos, dando mais enfoque a parte dos limites e das derivadas, abdicando assim do estudo das integrais, o que seria próximo do currículo de Portugal, ou mesmo acrescentando ao leque de funções outras, como a função modular, função raiz enésima, como na proposta de Portugal ou mesmo esgotar todo o assunto sobre função durante o primeiro ano e iniciar os estudo do Cálculo em si a partir do segundo ano, conforme trabalham os espanhóis. O que pretende-se aqui é apenas mostrar a possibilidade do estudo de Cálculo no Ensino Médio, por qualquer percurso didático coerente, e demonstrar sua utilidade.

Esperamos que a apresentação das aplicações alguns dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral através de atividades utilizando um *software* em que o aluno assume o papel de construir e descobrir o conhecimento agrega a prática pedagógica e mostre um pequeno

exemplo do potencial que o Cálculo possui em dar um caráter mais formativo e menos somativo ao processo de ensino aprendizagem.

Sendo o Cálculo um tema tão rico em interdisciplinaridade, podendo ser trabalhado em parceria com a Física, na cinemática do primeiro ano do ensino médio, por exemplo; tão dotado de aplicações dentro da própria Matemática, com as duas aqui apresentadas nas sequências didáticas; tão relevante historicamente para o desenvolvimento da Matemática e da própria sociedade cremos ser justificável seu estudo dentro da escola básica.

Referências

- ÁVILA, G., **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau.** *Revista do Professor de Matemática*, SBM, Rio de Janeiro - RJ, n°18, p. 1-9, 1991.
- BORBA, M.C., **Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento.** Pesquisa em educação Matemática: concepções e perspectivas, São Paulo: UNESP, p.285-295, 1999.
- CARNEIRO, M. J.; SPIRA, M.; SABATUCCI, J., **Proposta Curricular: CBC - Matemática Ensino Fundamental e Médio.** Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, 2007.
- COSTA, J. C. O., **O Currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil e a Diversidade de Percursos Formativos.** 2011. 323p. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de São Paulo, São Paulo - SP, 2011.
- DUCLOS, R. C., **Cálculo no 2º Grau.** *Revista do Professor de Matemática*, SBM, Rio de Janeiro - RJ, n°20, p. 26-30, 1992.
- ESPAÑA, MINISTERIO DE EDUCACIÓN, POLÍTICA SOCIAL Y DEPORTE, **El Desarrollo de la Educación en España.** 2008. 163p.
- EURYDICE, **Information on Education Systems and Policies in Europe. European Commission: Education and Training.** Disponível em: <http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/index_en.php> Acesso em: 22/02/2014.
- FRANCA, L., **O método pedagógico dos jesuítas.** Rio de Janeiro: Agir, 1952.
- GODOY, E. V., **Matemática no Ensino Médio: Prescrições das propostas curriculares e concepções de professores.** 2002. 250p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo - SP, 2002.
- GOMES, M. L. M., **História do Ensino da Matemática: uma introdução** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.
- GUSSI, J. C., **O Ensino da Matemática no Brasil: Análise dos Programas de Ensino do Colégio Pedro II (1837-1931).** 2011. 142p. Tese (Doutorado), Universi-

dade Metodista de Piracicaba, Piracicaba - SP, 2011.

HAIDAR, M. L. M., **O ensino secundário no Império** São Paulo: EDUSP, 2008.

ISCED, **International Standard Classification of Education 2011: UNESCO**
Disponível em: <<http://www.uis.unesco.org/Education/Pages/international-standard-classification-of-education.aspx>> Acesso em: 25/02/2014.

KRASILCHIK, M., **Reformas e Realidade: o caso do ensino das Ciências.** São Paulo em Perspectiva, v. 14, n.1, p.85-93, São Paulo, 2000.

MEC, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, **PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília - DF, 2000.

MEC, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, **PCN+ - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília - DF, 2002.

OLIVEIRA, F. R., **Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio.** 2010. 58p. Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2010.

SAVIANI, D., **História das Idéias Pedagógicas no Brasil** São Paulo: Autores Associados, 2007.

SILVA, J. C. (COORD); FONSECA, M. G.; MARTINS A. A.; FONSECA C. M. C.; LOPES I. M., **Ensino Recorrente de Nível Secundário - Matemática A: 10º, 11º e 12º anos.** Ministério da Educação. Portugal. Disponível em: <<http://www.dgide.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2>> Acesso em: 22/02/2014.

SILVA, J. C. (COORD); FONSECA, M. G.; MARTINS A. A.; FONSECA C. M. C.; LOPES I. M., **Ensino Recorrente de Nível Secundário - Matemática B: 10º, 11º anos.** Ministério da Educação. Portugal. Disponível em: <<http://www.dgide.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2>> Acesso em: 22/02/2014.

THOMAS, G. B., **Cálculo. v.1. 10.ed..** São Paulo: Addison Wesley, 2006.

GARZELLA, F. C., **A disciplina de Cálculo I: a análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.** 2013. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2013.

Anexo A - Ratio Studiorum

Estrutura Curricular do *Ratio Studiorum* segundo Franca (1952, p. 27)

I - Currículo Teológico - 4 anos

- Teologia Escolástica. 4 anos; dois professores, cada qual com 4 horas por semana.
- Teologia Moral. 2 anos; dois professores com aulas diárias ou um professor com duas horas por dia.
- Sagrada Escritura. 2 anos com aulas diárias.
- Hebreu. 1 ano, com duas horas por semana.

II - Currículo Filosófico - 3 anos

- 1º ano - Lógica e introdução às ciências; um professor; 2 horas por dia.
- 2º ano - Cosmologia, Psicologia, Física 2 horas por dia, Matemática - 1 hora por dia.
- 3º ano - Psicologia, Metafísica, Filosofia moral - dois professores. 2 horas por dia.

III - Currículo Humanista - 3 anos

O currículo humanista corresponde ao moderno curso secundário, abrange no *Ratio* cinco classes:

- Retórica
- Humanidades
- Gramática Superior
- Gramática Média
- Gramática Inferior

Anexo B - Leis de Diretrizes de Base

Estrutura Curricular das LDB's

ANTERIOR REFORMA DE 1971		
Nível	Duração	Faixa Etária
Pré-escola	3 anos	de 4 a 6 anos
Escola primária	4 anos	de 7 a 10 anos
Ginásio (Lower High School)	4 anos	de 11 a 14 anos
Colégio (High School)	3 anos	de 15 a 17 anos
Ensino superior	Variável	Após 18 anos

APÓS A REFORMA DE 1971		
Nível	Duração	Faixa Etária
Pré-escola	3 anos	de 4 a 6 anos
1º grau	8 anos	de 7 a 14 anos
2º grau	3 anos	de 15 a 17 anos
Ensino superior	Variável	Após 17 anos

APÓS A LEI Nº 9.394/96				
Níveis e subdivisões			Duração	Faixa Etária
Escola Básica	Educação Infantil	Creche	4 anos	de 0 a 3 anos
		Pré-escola	3 anos	de 4 a 6 anos
	Ensino fundamental		8 anos	de 7 a 14 anos
	Ensino médio		3 anos	de 15 a 17 anos
Educação Superior	Cursos por Área		Variável	após 17 anos

Anexo C - Matemática A - Portugal

Programa de Matemática A de Portugal, segundo Silva *et al* (2005a, p. 8)

10º ano	11º ano	12º ano
<p>Módulo 1 - Geometria no Plano e no Espaço I Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço. Geometria Analítica. O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço.</p>	<p>Módulo 4 - Geometria no Plano e no Espaço II Problemas envolvendo triângulos. Círculo trigonométrico e funções seno, co-seno e tangente. Produto escalar de dois vectores e aplicações. Intersecção, paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos. Programação linear (breve introdução).</p>	<p>Módulo 7 - Probabilidades e Combinatória Introdução ao cálculo de probabilidades. Distribuição de frequências e distribuição de probabilidades. Análise combinatória.</p>
<p>Módulo 2 - Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo. Função, gráfico e representação gráfica. Estudo intuitivo de propriedades da: • função quadrática; • função módulo. Funções polinomiais (graus 3 e 4). Decomposição de polinómios em factores.</p>	<p>Módulo 5 - Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada. Problemas envolvendo funções ou taxa de variação. Propriedades das funções do tipo $f(x)=a+b/(cx+d)$. Aproximação experimental da noção de limite. Taxa de variação e derivadas em casos simples. Operações com funções. Composição e inversão de funções.</p>	<p>Módulo 8 - Funções exponenciais e logarítmicas. Teoria de limites. Cálculo diferencial Limites e Continuidade. Conceito de Derivada e Aplicações. Teoria de limites. Cálculo diferencial. Problemas de optimização.</p>
<p>Módulo 3 - Estatística Estatística - Generalidades Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).</p>	<p>Módulo 6 - Sucessões reais. Definição e propriedades. Exemplos (o caso das progressões). Sucessão $(1+1/n)^n$ e primeira definição de e. Limites: infinitamente grandes e infinitamente pequenos. Limites reais e convergência.</p>	<p>Módulo 9 - Trigonometria e números complexos. Funções seno, co-seno ; cálculo de derivadas. Introdução histórica dos números complexos. Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica; operações e interpretação geométrica.</p>
Temas Transversais		
<ul style="list-style-type: none"> • Comunicação Matemática • História da Matemática • Resolução de Problemas e Actividades Investigativas 	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicações e Modelação Matemática • Lógica e Raciocínio Matemático • Tecnologia e Matemática 	

Anexo D - Matemática B - Portugal

Programa de Matemática B de Portugal, segundo Silva *et al* (2005b, p. 8)

10º Ano	11º Ano	12º Ano
Tema Central Aplicações e Modelação Matemática		
<p>Geometria no Plano e no Espaço</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. ■ O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço. <p>Funções e Gráficos. Generalidades. Funções polinomiais.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Função, gráfico e representação gráfica. ■ Estudo intuitivo de propriedades das funções quadráticas e cúbicas e dos seus gráficos <p>Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Estatística - Generalidades ■ Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). ■ Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva). 	<p>Movimentos periódicos.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Problemas de trigonometria básica e sua generalização. ■ Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos periódicos <p>Movimentos não lineares.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Investigação das características das funções racionais. ■ Modelação de situações envolvendo fenómenos não periódicos. <p>■ Modelação de situações envolvendo variações de uma função; taxa de variação.</p>	<p>Modelos de Probabilidades</p> <p>Modelos discretos (as Sucessões)</p> <p>Modelos contínuos não lineares. (as Exponenciais e as Logarítmicas; as Logísticas)</p> <p>Problemas de optimização. (Aplicações da Taxa de Variação; Programação Linear)</p>
Temas Transversais		
<ul style="list-style-type: none"> ■ Resolução de Problemas e Actividades Investigativas ■ Comunicação Matemática 		<ul style="list-style-type: none"> ■ História da Matemática ■ Tecnologia e Matemática

Anexo E - Disciplinas da Espanha

Disciplinas do *Bachillerato* da Espanha, segundo Espanha (2008, p. 44)

Materias comunes			
Ciencias para el Mundo Contemporáneo (70 horas)			
Educación Física (35 horas)			
Filosofía y Ciudadanía (70 horas)			
Historia de la Filosofía (70 horas)			
Historia de España (70 horas)			
Lengua Castellana y Literatura y Lengua oficial propia de la correspondiente Comunidad Autónoma y Literatura (210 horas)*			
Lengua Extranjera (210 horas)			
Materias propias de modalidad (90 horas por materia)			
Artes		Ciencias y Tecnología	Humanidades y Ciencias Sociales
a) Artes plásticas, imagen y diseño	b) Artes escénicas, música y danza	Biología	Economía
▫ Cultura audiovisual	▫ Análisis musical I y II	Biología y Geología	Economía de la Empresa
▫ Dibujo artístico I y II	▫ Anatomía aplicada	Ciencias de la Tierra y Medioambientales	Geografía
▫ Dibujo técnico I y II	▫ Artes escénicas	Dibujo Técnico I y II	Griego I y II
▫ Diseño	▫ Cultura audiovisual	Electrotecnia	Historia del Arte
▫ Historia del Arte	▫ Historia de la música y de la danza	Física	Historia del Mundo Contemporáneo
▫ Técnicas de expresión gráfico-plástica	▫ Literatura universal	Física y Química	Latín I y II
▫ Volumen	▫ Lenguaje y práctica musical	Matemáticas I y II	Literatura Universal
		Química	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II
		Tecnología Industrial I y II	

* Las enseñanzas de la lengua cooficial dispondrán del 10 por ciento del horario escolar total, pudiendo detraer de cada una de las materias un máximo de la tercera parte de su horario.

Anexo F - Programas de França

Programa de Matemática da *Classe de Seconde* dos Liceus Gerais e Tecnológicos da França

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	<ul style="list-style-type: none"> • Mettre un problème en équation. • Résoudre une équation se ramenant au premier degré. ◊ Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie. 	<p>Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique.</p> <p>Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.</p>
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	<ul style="list-style-type: none"> • Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b. • Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse. 	<p>On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.</p> <p>Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.</p>
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2. Fonctions homographiques.	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes. • Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique. 	<p>Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis.</p> <p>Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.</p> <p>Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.</p>
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	<ul style="list-style-type: none"> • Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème. 	<p>Pour un même problème, il s'agit de :</p> <ul style="list-style-type: none"> • combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, • mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. <p>Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.</p>
Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	<ul style="list-style-type: none"> • On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°. 	<p>On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège.</p> <p>La notion de radian n'est pas exigible.</p>

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Fonctions</p> <p>Image, antécédent, courbe représentative.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Traduire le lien entre deux quantités par une formule. <p>Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule :</p> <ul style="list-style-type: none"> • identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ; • déterminer l'image d'un nombre ; • rechercher des antécédents d'un nombre. 	<p>Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné.</p> <p>Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur \mathbb{N}, voire de fonctions de deux variables (aire en fonction des dimensions) sont à donner.</p>
<p>Étude qualitative de fonctions</p> <p>Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. • Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. <p>Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations :</p> <ul style="list-style-type: none"> • comparer les images de deux nombres d'un intervalle ; • déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée. 	<p>Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique.</p> <p>Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année.</p> <p>◊ Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.</p>
<p>Expressions algébriques</p> <p>Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Associer à un problème une expression algébrique. • Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. • Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples. 	<p>Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner.</p> <p>Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.</p>

Anexo G - Planejamento do Chile

Sugestão de Planejamento do Ministério da Educação Chileno - IIIº ano do Ensino Médio

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificación de situaciones matemáticas que muestran la necesidad de ampliar los números reales. (página 9) 2. Identificación de la unidad imaginaria como solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y su utilización para expresar raíces cuadradas de números reales negativos. Operatoria con los números imaginarios (páginas 14-18) 3. Relación entre un número imaginario y los números complejos: Caracterización de un número complejo. (páginas 19-22) 4. Adición, sustracción, multiplicación, división y potencia en los números complejos. (páginas 23-26) 5. Conjugado y módulo de un número complejo. (páginas 37-42) 6. Resolución de problemas y aplicación de números complejos. (páginas 50-72) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita por completación de cuadrados, por factorización o por inspección, con raíces reales o complejas. Interpretación de las soluciones y determinación de su pertinencia al conjunto de los números reales o complejos. (páginas 81-92) 2. Deducción de la fórmula de la ecuación general de segundo grado. (páginas 93-95) 3. Resolución de problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto en que se plantea el problema. (páginas 96-97) 4. Caracterización de la función cuadrática. Representación y análisis gráfico de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, para distintos valores de a, b, c. Uso de ellas para que su gráfica interseque el eje X (ceros de la función). Uso de software para el análisis de las variaciones de la gráfica de la función cuadrática a partir de la modificación de los parámetros. Resolución de problemas que involucren funciones cuadráticas. (páginas 99-117) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Deducción de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y su aplicación al cálculo de magnitudes lineales en figuras planas. (páginas 169-170) 2. Descripción de la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar; uso de un procesador geométrico para visualizar las relaciones que se producen al desplazar figuras homotéticas en el plano. (páginas 178-192) 3. Determinación de la ecuación de la recta en plano que pasa por dos puntos. (páginas 248-252) 4. Deducción e interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta. (páginas 263-271) 5. Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su interpretación a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano: condiciones analíticas del paralelismo, coincidencia y de la intersección entre rectas. (páginas 276-281) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Determinación de sucesos dependientes e independientes. Resolución de problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales y sus propiedades (páginas 331-332) 2. Utilización de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de la relación con la función de distribución. (páginas 338-342) 3. Aplicación e interpretación gráfica de los conceptos de valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta. (páginas 343-348) 4. Uso del modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso o bien cero o uno. (páginas 353-358)
Tiempo estimado 28 horas pedagógicas	Tiempo estimado 30 horas pedagógicas	Tiempo estimado 28 horas pedagógicas	Tiempo estimado 28 horas pedagógicas

Sugestão de Planejamento do Ministério da Educação Chileno - IVº ano do Ensino Médio

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificación de funciones invertidas, sobreyectivas y biyectivas y determinación de la función inversa cuando proceda. (páginas 28-38) 2. Análisis de la función potencia $f(x) = ax^n$ con $a \neq 0$ y x en los reales y n entero, en situaciones que representen comparación de tasas de crecimiento aritmético y geométrico y cálculo de interés compuesto, mediante el uso de un software gráfico. (páginas 46-68) 3. Representación de intervalos mediante lenguaje conjuntista y uso de las operaciones con conjuntos para resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita. (páginas 84-92 y páginas 112-119) 4. Resolución de problemas que implican el planteamiento de inecuaciones y de sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita; representación de las soluciones usando intervalos en los reales; discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. Representación de las situaciones usando un procesador simbólico y gráfico de expresiones algebraicas y funciones. (páginas 120-125) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Deducción de la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y su aplicación al cálculo del módulo de un vector. (páginas 156-157) 2. Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio; deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana. (páginas 180-199) 3. Formulación y verificación, en casos particulares, de conjeturas respecto de los cuerpos geométricos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas en el espacio. (páginas 222-225) 4. Resolución de problemas sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. (páginas 226, 232, 234, 238-239, 250-252, 254-256) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Interpretación del concepto de variable aleatoria continua y de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal. (páginas 284-287) 2. Estudio y aplicación de elementos básicos de la distribución normal, a partir de diversas situaciones en contexto tales como: mediciones de peso y estatura en adolescentes; puntajes de pruebas nacionales e internacionales; datos meteorológicos de temperatura o precipitaciones. Relación entre la distribución normal y la distribución normal estándar. (páginas 288-293) 3. Aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales. (páginas 300-303) 4. Descripción de los resultados de repeticiones de un experimento aleatorio, aplicando las distribuciones de probabilidad normal y binomial mediante el uso de herramientas tecnológicas. (páginas 304-305) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Realización de conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales; verificación mediante experimentos donde se extraen muestras aleatorias de igual tamaño de una población, mediante el uso de herramientas tecnológicas. (páginas 314-315) 2. Estimación de intervalos de confianza, para la media de una población con distribución normal y varianza conocida, a partir de una muestra y un nivel de confianza dado. (páginas 320-323) 3. Análisis crítico de las inferencias realizadas a partir de encuestas, estudios estadísticos o experimentos, usando criterios de representatividad de la muestra. (página 331)
Tiempo estimado 30 horas pedagógicas	Tiempo estimado 30 horas pedagógicas	Tiempo estimado 30 horas pedagógicas	Tiempo estimado 24 horas pedagógicas