SILVINO DOMINGOS NETO

FERRAMENTAS AUXILIARES NO ENSINO E APREDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T
D671f
2014

Domingos Neto, Silvino, 1968-
Ferramentas auxiliares no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica / Silvino Domingos Neto. – Viçosa, MG, 2014.
vii, 80f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui anexos.
Orientador: Allan de Oliveira Moura.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.78-80.

1. Matemática (2. grau) - Estudo e ensino. 2. Trigonometria. 3. Ensino médio. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 512.13

Silvino Domingos Neto

Ferramentas Auxiliares no Ensino e Apredizagem das Funções Seno, Cosseno e Tangente na Educação Básica

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 17 de março de 2014.

Alexandre Miranda Alves

Olímpio Hiroshi Miyagaki

Allan de Oliveira Moura
(Orientador)

Agradecimentos

À Deus, agradeço pela benção nesta jornada, pela companhia e presença em todas as viagens realizadas nesta batalha e por me conduzir na superação de todos os obstáculos.

A minha família pelo apoio, amizade e incentivo e, em especial, aos meus pais pelos ensinamentos e por acreditarem em mim.

Ao meu orientador e coordenador do curso Professor Doutor Allan de Oliveira Moura, pelas contribuições para a realização deste trabalho, pela atenção e amizade.

Aos colegas de mestrado, pela convivência alegre e constante, troca de experiências e conhecimentos, em especial, a José Silvino, pelos momentos de estudos e pela companhia em quase todas as viagens nesta jornada.

Aos Professores do curso pela dedicação e contribuições em nosso aprendizado.

Aos colegas de trabalho do IFMG/SJE, pelo apoio, incentivo e amizade.

Aos alunos que participaram desta pesquisa, pelo interesse e envolvimento.

Aos alunos pesquisadores Fernando, Raquel e Wgeverson pela dedicação e contribuição neste trabalho.

À Capes pelo apoio financeiro, fundamental para custear as nossas viagens e estadias durante o curso.

Resumo

DOMINGOS NETO, Silvino, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2014. **Ferramentas Auxiliares no Ensino e Apredizagem das Funções Seno, Cosseno e Tangente na Educação Básica**. Orientador: Allan de Oliveira Moura.

O presente trabalho abordou o tema ferramentas uxiliares no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente. Teve como foco atividades de matemática para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, que investiga a eficácia da utilização das ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGeobra no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica. Teve como objetivo tornar o ensino de trigonometria mais significativo através da manipulação de ferramentas básicas. Este trabalho valeu-se da resolução de situações problemas que visavam o cálculo de medidas inacessíveis, medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo e as medidas do seno, cosseno e tangente destes ângulos. Tratou-se ainda da plotagem e análise dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente no sistema de coordenadas cartesianas. Analisou o quanto é relevante o uso destas ferramentas nas aulas de trigonometria e em especial no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente. Este estudo indica que o uso destas ferramentas pode resultar em avanços significativos no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica, além de tornar um desafio a sua utilização por professores de matemática e pesquisadores.

Abstract

DOMINGOS NETO, Silvino, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, march 2014. **Auxiliary tools in the teaching and learning of the sine, cosine and tangent functions in basic education**. Adviser: Allan de Oliveira Moura.

The following study addresses the theme of auxiliary tools in the teaching and learning of the sine, cosine and tangent functions. Focused on math activities for students in the first year of high school, which investigates the effectiveness of using tools as scientific calculators, theodolites, trigonometric board and GeoGebra software in the teaching and learning of the sine, cosine and tangent functions in basic education. Aimed to make the teaching of trigonometry more meaningful through the manipulation of basic tools. This work is based on the resolution of problem situations aimed at calculating inaccessible measures, measures of the acute angles of a right triangle and the measurements of sine, cosine and tangent of these angles. Still having the use of plotting and analyzing graphs of the sine, cosine and tangent functions in the Cartesian coordinate system. We analyzed how relevant the use of these tools in trigonometry class and especially in the teaching and learning of the sine, cosine and tangent functions. This study indicates that the use of these tools can result in significant advances in the teaching and learning of the sine, cosine and tangent functions in basic education, and in addition to making a challenge to its use by math teachers and researchers.

Sumário

Introdução

> A matemática é uma das mais importantes “ferramentas” para a humanidade e, sem ela, o homem jamais seria capaz de sair das cavernas para, tempos depois, inventar o computador e viajar pelos espaços siderais. *(SELBACH[6], 2010, p. 39)*

Este trabalho apresenta discussões e resultados relativos ao ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, valendo-se das ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra. Assim, através destas ferramentas e de grupos de discussões, fará com que o aluno perceba como a matemática é indispensável à formação de qualquer indivíduo, além de estar presente em quase todas as atividades do seu dia-a-dia e de expressar uma linguagem do pensamento humano.

Hoje, entende-se que o ensino da matemática é indispensável para qualquer indivíduo, pois a Matemática além de ser aplicada em outras áreas do conhecimento, contribui para a atividade profissional e o raciocínio lógico do ser humano.

> A matemática é um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, além de contribuir na atividade profissional do ser humano. A matemática trata de noções e verdades de natureza abstrata, que exige precisão, proíbe ambiguidades, requer mais atenção e cuidado por parte do aluno. A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da matemática. *(LIMA[1], 2007, p.3)*

Conforme Rosa Neto[23], (2010), a matemática é a mais antiga das ciências. Por isso é difícil, pois já caminhou muito, já sofreu muitas rupturas e reformas, possuindo um acabamento refinado e formal que a coloca muito distante de suas origens. Mas, devido as transformações sofridas, ela se tornou fácil. A matemática fácil e “gostosa” é aquela que corresponde às necessidades do homem, que foi construída a partir da ação sobre o próprio ambiente que construiu e continua construindo.

O ensino de matemática tem sido objeto de inúmeras pesquisas, onde apontam o desinteresse dos alunos como objeto principal e como fator determinante da dificuldade em aprender este conteúdo. Conforme os relatos dados por alguns colegas professores de área e também pela própria prática docente, conclui-se que existem alunos ingressantes no Ensino Médio, que não possuem requisitos necessários para cursar esta etapa do ensino. Como os conteúdos de matemática têm inúmeras aplicações práticas em nosso dia a dia, este trabalho constitui-se de metodologias que estimulam e despertam o interesse dos alunos para esta disciplina com situações problema e outros recursos desafiadores e atraentes.

De acordo com D'Ambrósio[2], (2002), o maior desafio que nós educadores matemáticos encontramos é tornar a matemática interessante e atrativa, com aplicações relevantes e úteis, usando exemplos da atualidade, de modo que faça a sua integração no mundo de hoje.

> Esse desafio que professores de matemática e educadores tem, pode tornar-se menos árduo, quando temos parâmetros a serem seguidos, quando adquiridas informações importantes sobre como proceder, ou por qual caminho seguir, mesmo que essas informações não sejam totalmente certas, já que não existe uma fórmula específica para o ensino e aprendizagem. E nada melhor do que buscar extrair essas informações de quem já tem uma boa vivência e bastante conhecimento, de quem tem experiência no ensino e aprendizagem, ou seja, dos professores que lecionam atualmente e também dos mais importantes envolvidos nesse processo, os alunos.(D'AMBRÓSIO[2], 2002, p.15)

Os professores, quando bem preparados, em seu ambiente de trabalho, têm a capacidade de analisar e informar quais são as dificuldades que a maioria de seus alunos encontram ao se deparar com atividades de Matemática, com grau de dificuldade variado. Analisando uma questão que cobra certo conteúdo com um determinado grau de dificuldade, o professor pode dar direcionamento para que seja ou não focado naquele determinado tópico, permitindo que as aulas possam ser voltadas para aqueles conteúdos que, realmente, necessitam de maior intervenção. Isso propiciará melhor aproveitamento do tempo destinado ao ensino de matemática e melhor rendimento dos alunos.

É importante salientar que o ensino-aprendizagem é uma via de mão dupla e necessita que professor e aluno queiram desenvolver o conhecimento.

A matemática é concebida por muitos como uma disciplina muito importante, mas difícil pela sua complexidade e rigor. A dificuldade que muitos alunos apresentam na aprendizagem da matemática durante a sua vida escolar pode ser justificada pelo modelo tradicional de ensino da matemática, conforme afirma Gonçalves[7], (2013).

> Esta carência é o reflexo de uma visão restrita da finalidade do ensino de Matemática na educação básica, voltada estritamente para o ensino de técnicas/procedimentos e algoritmos para a resolução de problemas sem qualquer conexão com o contexto sociocultural dos alunos ou, no máximo, com pontuais contextualizações artificiais. *(GONÇALVES[7], 2013, p.2)*

Analisando as avaliações de larga escala, aplicadas pelo Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública (SIMAVE), verificou-se que numa questão referente à competência resolver situações-problema que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente), apenas 28,2% dos alunos do 3º ano do Ensino Médio responderam corretamente esta questão, mostrando que o desempenho dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio quanto à trigonometria não atingiu o ideal.

Com base da prática docente e dos resultados das avaliações do SIMAVE, observamos que o ensino e aprendizagem de trigonometria não está correspondendo quanto ao proposto pelo Currículo Básico Comum CBC de Matemática. O que será que acontece com as aulas de Matemática onde grande parte dos alunos têm muita dificuldade neste conteúdo? Será que não acontece nada de interessante que possa motivar e despertar o interesse destes alunos de forma que contribua com o ensino de trigonometria?

Neste trabalho, na busca de uma resposta para este questionamento, pretendemos verificar se as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra podem contribuir para o ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica.

Com o objetivo de responder esta pergunta, pretendemos romper com as metodologias tradicionais, construindo uma sequência didática com situações-problema desafiadoras, utilizando as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra, no cálculo e na modelagem destes problemas.

Assim o objetivo geral deste trabalho visou verificar, junto a um grupo de alunos do 1° ano do Ensino Médio, as contribuições que as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra proporcionam ao ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica.

Como objetivos específicos destacamos:

- Apresentar uma proposta didática que possa auxiliar docentes e discentes da educação básica no ensino e aprendizagem da trigonometria.

- Promover a utilização das ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra como ferramentas auxiliares no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica.

- Verificar se as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra contribuem com o ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica.

- Elaborar atividades desafiadoras e atraentes do dia a dia do aluno que permitam a sua exploração, análise e interpretação.

Ao elaborar as atividades relacionadas às funções seno, cosseno e tangente, utilizando as ferramentas propostas nesta dissertação, busca-se motivar e envolver os alunos com os conhecimentos de forma que não tornem a matemática uma disciplina exaustiva e distante da realidade dos alunos.

Pretende-se que este trabalho seja desenvolvido com alunos do 1° ano do ensino médio, de preferência de escolas da rede pública estadual ou municipal. Pois é na maioria das turmas da primeira série do ensino médio das escolas públicas estaduais e municipais, conforme resultados das avaliações do SIMAVE, onde os alunos encontram maiores dificuldades no ensino de trigonometria.

Propõe-se que este trabalho seja desenvolvido com alunos do primeiro ano regular do Ensino Médio, com turmas que tenha no máximo 15 alunos, cuja escolha seja feita de forma aleatória, através de um convite e interesse em participar deste trabalho.

Este trabalho foi estruturado em 5 capítulos, no capítulo 1, é abordado um pouco sobre a história da trigonometria, os instrumentos de avaliação usados pelo governo de Minas Gerais e o ensino de trigonometria nas escolas públicas estaduais e municipais de Minas Gerais. No capítulo 2, é apresentada as ferramentas propostas no desenvolvimento deste trabalho a calculadora científica, o teodolito, a prancha trigonométrica e software GeoGebra. No capítulo 3, é apresentado um caderno de atividades, contendo resumos dos conteúdos de trigonometria para a 1ª série do Ensino Médio de forma dinâmica, afim de contribuir com o ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica. No capítulo 4, é feita a descrição de cada etapa do desenvolvimento deste trabalho, iniciando com o teste diagnóstico inicial, passando pelos procedimentos metodológicos e o desenvolvimento das atividades, utilizando as ferramentas propostas, em seguida, aplicação do teste diagnóstico final . Por fim, no último capítulo, é apresentada algumas considerações.

CAPÍTULO 1

UM POUCO DE TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, é apresentado um pouco da história da trigonometria, um panorama sobre os instrumentos de avaliação adotado pelo governo de Minas Gerais e sobre o ensino da trigonometria nas escolas públicas estaduais de Minas Gerais.

1.1 A história da trigonometria

A trigonometria, assim como outros ramos da matemática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir das necessidades práticas do homem, principalmente na astronomia, agrimensura e na navegação. Os primeiros indícios da trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes Eves[9], (2011).

No Egito, encontra-se no papiro de Ahmes, conhecido com o papiro de Rhind[1] que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, entre estes, quatro relacionam o *seqt* de uma pirâmide que representava a razão entre o afastamento horizontal e elevação vertical, para manter a inclinação constante das faces de um pirâmide .

> Os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o "percurso" e a "elevação" – isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Tomava-se como unidade vertical o cúbito e como unidade horizontal a mão; havia 7 mãos num cúbito. Utilizando-se essas unidades de medida, chamava-se *seqt* de uma pirâmide a medida da inclinação. (EVES[9], 2011, p.83)

1

O papiro de Ahmes é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia do mais antigo papiro do século XIX a.C. que esteve em poder do escriba Ahmes. Foi adquirido no Egito por H. Rhind e por isso é denominado papiro de Rhind. (BOYER[8], 1996, p.8)

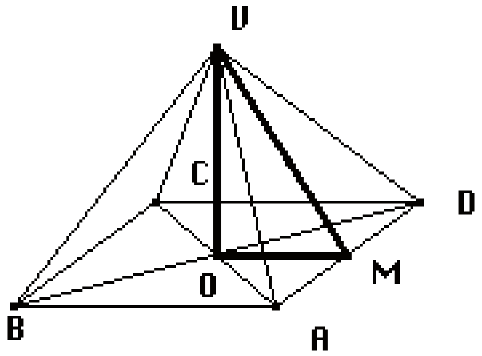


Figura 1.1: *Seqt* de uma pirâmide - Fonte: Costa[31], 2003

$$Seqt = \frac{\overline{OM}}{\overline{OV}}.$$

Hoje, o *seqt* de uma pirâmide dos egípcios representa a cotangente do ângulo OMV.

$$cotg(O\hat{M}V) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OV}} = seqt.$$

Os Babilônios tinham grandes interesses pela astronomia, onde estudavam as fases da lua, os pontos cardeais e as estações do ano utilizando triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala. Construíram no século 28 a.C., um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C., uma tábua de elipses lunares. Eves[9], (2011)

Por volta do ano 200 a.C. os astrônomos gregos estavam interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície da terra e também a medida do raio da Terra. Foi Eratóstenes de Cirene (276 - 196 a.C.) e Aristarco(310 - 230 a.C.) que produziu a mais notável medida da antiguidade para a circunferência da terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas.

Para medir a distância da terra ao sol Aristarco considerou as duas posições em que a lua está em seus quartos crescente e minguante conforme a figura 1.2. Admitiu que tinha um triângulo retângulo e mediu o ângulo α, chegando à conclusão de que a medida era de 87°.

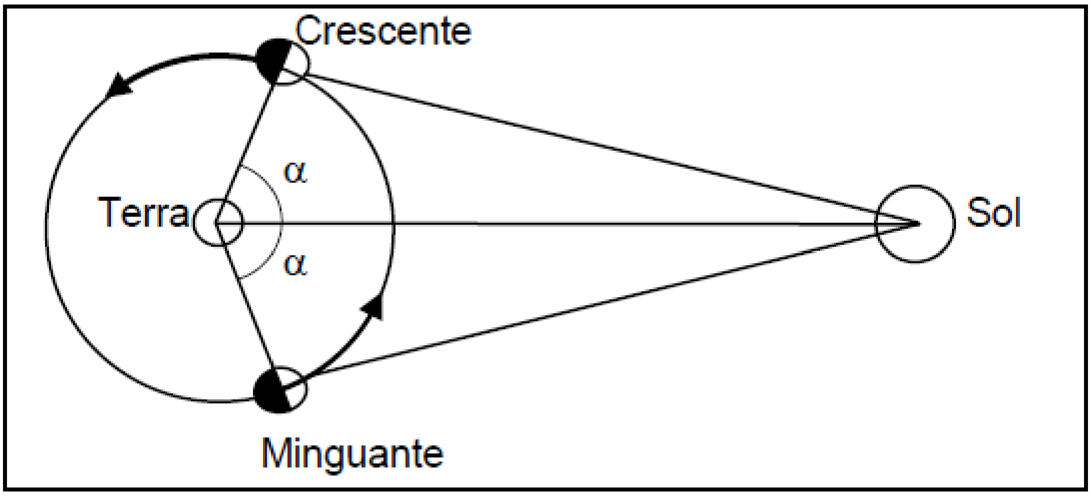


Figura 1.2: Modelo matemático utilizado por Aristarco no cálculo da medida da distância da terra ao sol - Fonte: Bartoli[30], 2012, p.33

Construiu um triângulo retângulo semelhante ao da figura 1.2, conforme a figura 1.3, onde T representa a Terra, L representa a lua e S representa o sol e concluiu que a distância da Terra ao Sol é 20 vezes a distância da Terra à Lua. Em razão da estimativa e às vezes da precisão de instrumentos utilizados, a medida do ângulo α não ser correta, pois na realidade ele mede $89,86°$, a distância não é examente a encontrada, no entanto, isto não invalida o método utilizado por Aristarco.

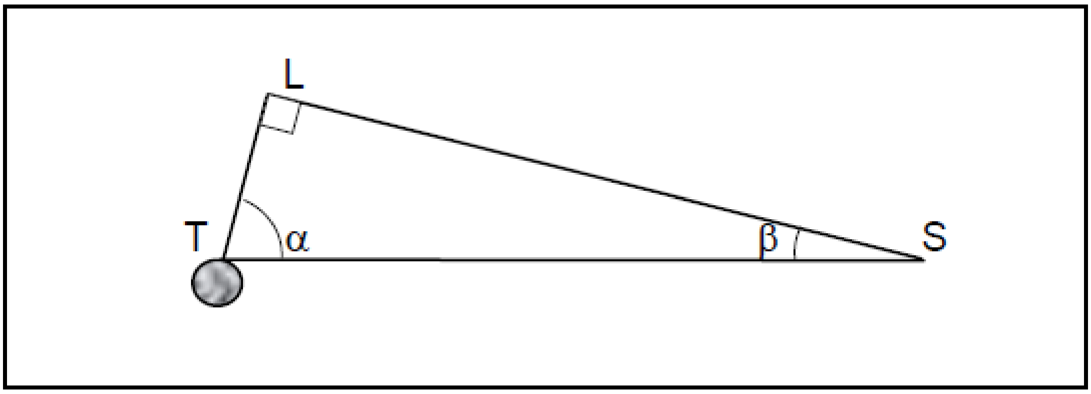


Figura 1.3: Triângulo retângulo construído por Aristarco para calcular a medida da distância da terra ao sol - Fonte: Bartoli[30], 2012, p.33

Na segunda metade do século II a.C., surgiu Hiparco de Nicéia(180 - 125 a.C.) influenciado pela matemática da Babilônia, ele acreditava que a melhor base de contagem era 60, que se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes iguais. Construiu a primeira tabela trigonométrica com valores das cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°. Resolveu associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que contribuiu com o grande avanço na astronomia e por isso ele recebeu o título de “Pai da Trigonometria” conforme Boyer[8], (1996).

A trigonometria adquire a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Conforme Eves[9], (2011), "*As origens da trigonometria são obscuras*", já Boyer[8], (1996), afirma que a criação da trigonometria não se deu por um homem ou nação, havendo várias personalidades que contribuiram para que a trigonometria fosse como ela é hoje.

> A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que "Trigonometria", a medida das partes de um triângulo . Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos de cordas que se subtendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas do sol e da lua. *(BOYER[8], 1996, p.108)*

Conforme Dante[24], (2005), devido à sua característica de estabelecer as relações entre as medidas de ângulos e segmentos, a trigonometria foi considerada originalmente como uma extensão da Geometria. No entanto, o autor dispõe um significado interessante para a palavra trigonometria, onde aborda a gênese da palavra trigonometria.

> A palavra trigonometria mesmo não sendo uma palavra de origem grega, é formada por três radicais gregos: tri = três, gonos = ângulos e metron = medir. Daí o seu significado: medida dos triângulos. Inicialmente, então, a trigonometria era considerada a parte da Matemática que tinha como objetivo o cálculo das medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos). *(DANTE[24], 2005, p.187)*

> O objetivo inicial da trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. *(LIMA[et al.][11], 2007, p.213)*

Embora o significado da palavra trigonometria nos remeta à apenas cálculos, os Parâmetros Curriculares Nacionais PCNs Brasil[17] propõem um ensino mais amplo, ressaltando a importância de um conhecimento que vá além dos cálculos e da memorização, mas que seja capaz de desenvolver no aluno um olhar crítico que o permita observar, conjecturar, interpretar, prever e intervir, ou seja propõem uma formação de habilidades e competências para além da sala de aula.

Atualmente, a trigonometria é utilizada em situações tais como construção de telhados, construção de estradas, avaliação dos batimentos cardíaco de uma pessoa, calcular medidas inacessíveis, entre outras.

> o uso da trigonometria não se restringe somente a cálculo de medidas envolvendo triângulos, a trigonometria é aplicada em diversas áreas do conhecimento humano, tais como Astronomia, Engenharia, Música, Topografia, Navegação, entre outras. Devido à sua importância, a trigonometria torna-se fundamental aos profissionais ligados às áreas citadas. *(RIBEIRO e SOARES[15], 2006)*

1.2 Os instrumentos de avaliação usado pelo governo de Minas Gerais

O governo de Minas Gerais utiliza-se, atualmente, de avaliações em larga escala para verificar o desenvolvimento do ensino público no estado. O Sistema Mineiro de Avaliação da educação Pública - SIMAVE foi criado em 2000 e tem seguido o propósito de fomentar mudanças em busca de uma educação de qualidade. Inicialmente, o sistema contou com o Programa de Avaliação da Rede Pública da Educação Básica-PROEB, mas ao longo dos anos foram incorporados o Programa de Avaliação de Aprendizagem - PAAE (2005) e o Programa de Avaliação da Alfabetização - PROALFA (2006), tornando o diagnóstico do SIMAVE mais completo.

O Proeb avalia o ensino do 5° e 9° ano do Ensino Fundamental, além do 3° ano do Ensino Médio das escolas públicas estaduais e municipais de Minas Gerais.

1.3 O ensino de trigonometria nas escolas públicas estaduais e municipais de Minas Gerais

Diante dos fatos históricos que contribuíram com a criação e com o aprimoramento da trigonometria, faz-se necessário discutir algumas questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da trigonometria nas escolas públicas estaduais e municipais de Minas Gerais.

Como a trigonometria se apresenta em várias aplicações interessantes do nosso dia-a-dia, muitas vezes é ministrada nas escolas de forma que os alunos façam apenas aplicações de fórmulas nas resoluções de problemas que existem nos livros didáticos, sem a exploração das ferramentas que possam auxiliar no ensino e aprendizagem deste conteúdo.

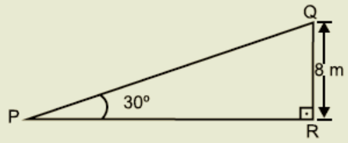
Embora o significado da palavra trigonometria submeta à cálculos, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs Brasil[17] (1999), enfatizam um ensino mais amplo, ressaltando a importância de um conhecimento que vá além dos cálculos e da memorização, e que seja capaz de construir no estudante um olhar crítico que o permita observar, conjecturar, interpretar, prever e intervir, ou seja, os PCNs Brasil[17] (1999) , propõem a formação de habilidades e competências que são requeridas para além da sala de aula.

Essa dinâmica do conhecimento pode ser verificada na história da trigonometria que assim como a história da matemática, nos remete à sua criação devido as necessidades de povos em situações diversas, como afirma Carvalho[12], (2005, p. 21), "*ela surgiu devido as necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo e para ser utilizada na navegação e na geografia*".

O programa de Avaliação da Rede Pública da Educação Básica-Proeb através do Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública (SIMAVE) promove todo ano uma avaliação de larga escala com o objetivo de avaliar o ensino de Matemática e de Língua Portuguesa das escolas públicas estaduais de Minas Gerais. Esta avaliação é aplicada para os alunos do 9º ano do ensino fundamental e para o 3º ano da ensino médio. Os resultados das avaliações permitem o diagnóstico das escolas bem como conhecer as reais situações para que os gestores públicos possam realizar políticas mais pontuais e eficazes. As avaliações visa a tomada de decisões para aprimorar o que já existe e fazer correções das distorções.

Conforme a avaliação do Proeb/2012, verifica-se que os resultados referentes à trigonometria não foram satisfatórios quanto à questão da figura 1.4, que avalia a habilidade em resolver situações-problema no plano euclidiano, envolvendo as razões trigonométricas em triângulo retângulo.

(M120367B1) Veja abaixo o desenho que representa o terreno de Mário. Ele irá construir um portão que está indicado pela medida $\overline{PQ}$ na figura abaixo para fechar esse terreno.



Dados:
sen 30° = 0,5
cos 30° = 0,8
tg 30° = 0,6

Qual é a medida, em metros, do portão $\overline{PQ}$?

A) 4,8
B) 6,4
C) 10
D) 13,3
E) 16

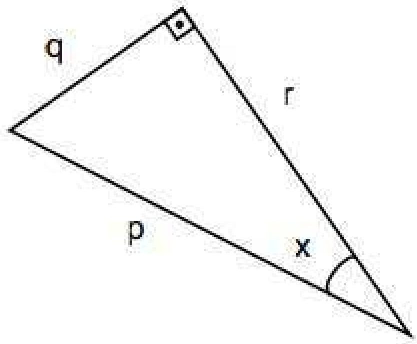
Figura 1.4: Questão da prova de matemática do 3° ano do Ensino Médio PROEB/ 2012 - Fonte: SIMAVE/PROEB - 2012.

Nesta questão, apenas 28% dos alunos das escolas públicas da rede estadual de ensino responderam corretamente, escolhendo a opção E. Conforme a figura desta questão, o desenho do terreno é representado por um triângulo retângulo, a medida procurada é representada pela hipotenusa e medida conhecida é representada pelo cateto oposto ao ângulo cuja medida é 30°. Como a razão seno relaciona as medidas do cateto oposto e a medida da hipotenusa, portanto:

$$sen 30° = \frac{\overline{QR}}{\overline{QP}} \Rightarrow 0,5 = \frac{8}{\overline{QP}} \Rightarrow \overline{QP} = \frac{8}{0,5} = 16$$

Outro item da prova do Proeb/2011 aplicada para o 3° ano do Ensino Médio que avalia a habilidade em resolver situações-problema no plano euclidiano, envolvendo as razões trigonométricas em triângulo retângulo, onde apenas 30% dos alunos responderam corretamente, mostrando ter adquirido habilidade neste item.

(M090029A8) A professora de Vinicius desenhou no quadro um triângulo retângulo no qual p, q e r são as medidas dos seus lados, em centímetros, e x é a medida de um de seus ângulos, em graus.



O seno do ângulo x é

A) sen x = $\frac{p}{q}$

B) sen x = $\frac{q}{p}$

C) sen x = $\frac{q}{r}$

D) sen x = $\frac{r}{p}$

Figura 1.5: Questão da prova de matemática do 3° ano do Ensino Médio-PROEB/2011 - Fonte: SIMAVE/PROEB - 2011

Para resolver este item os estudantes devem identificar a hipotenusa e os catetos do triângulo retângulo, neste caso a medida da hipotenusa é p e a medida do cateto oposto ao ângulo de medida x é q, logo,

$$sen\, x = \frac{q}{p}.$$

Conforme o desempenho dos alunos do 3° ano do Ensino Médio das escolas públicas estaduais e municipais de Minas Gerais, observa-se que o ensino de trigonometria ainda está aquém do desejado.

Embora a trigonometria apresente inúmeras situações e exemplos de aplicações interessantes para serem trabalhados na educação básica, com raras exceções é deixada de lado ou no máximo é apresentada como um amontoado de fórmulas como algo pronto e acabado sem a utilização de recursos didáticos pedagógicos que possam facilitar a assimilação deste conteúdo pelos alunos.

Baseando-se em observações, sejam de prática docente ou através de diálogos com outros colegas de área, vê-se que os alunos sentem-se incomodados ao se tratar de trigonometria, acarretando uma rejeição por parte deles. Acredita-se que essa rejeição seja a falta de domínio de conceitos trigonométricos básicos anteriores. O fato é que o ensino e aprendizagem de trigonometria requer uma aplicação prática utilizando recursos que possam estimular o interesse desses alunos com atividades desafiadoras e atraentes, onde os alunos constroem os conceitos a partir da utilização de aplicações práticas. Assim, destaca-se a hipótese: se as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra podem contribuir para o ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica.

CAPÍTULO 2

AS FERRAMENTAS: CALCULADORA CIENTÍFICA, TEODOLITO, PRANCHA TRIGONOMÉTRICA E O SOFTWARE GEOGEBRA

Neste capítulo, são apresentadas cada uma das ferramentas utilizadas neste trabalho, bem como as contribuições que cada uma oferece no ensino da matemática.

2.1 Calculadora Científica

A calculadora científica é um dispositivo para a realização de cálculos, que possui teclas destinadas às funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas. Ela calcula os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo qualquer ou determina o valor do ângulo correspondente ao valor trigonométrico.

A história da calculadora acompanha a evolução do cálculo. A primeira máquina de calcular foi o ábaco inventada pelos chineses, a partir daí sofreu várias evoluções, em 1623 com Schickard, em 1642 com Pascal, em 1673 com Leibniz, em 1822 Babbage e assim por diante. A partir da década de 60, com o rápido avanço da tecnologia, começaram a desenvolver as calculadoras eletrônicas de pequeno porte, cada vez mais precisa.

Conforme D'Ambròsio[2], (1986), com o avanço da tecnologia, a partir da década de 60, desenvolveram de forma acelerada os computadores e as calculadoras eletrônicas de pequeno porte. De acordo com a tabela das etapas de evolução da calculadora, percebemos que a história de evolução dessas máquinas acompanha a evolução do cálculo e da análise.

As etapas de evolução da calculadora.

1623	Schickard
1642	Pascal
1673	Leibniz
1822	Babbage
1890	Hollerith(censo dos E.U.A.)
1929	IBM - Columbia University
1937	IBM - Harvard University
1937	Atanasoff (Iowa State)
1943	Projeto ENIAC
1951	Projeto UNIVAC (Rand Corp)
1953	IBM 701

(D'AMBRÒSIO[2], 1986, p.71)

Como todas as ferramentas tecnológicas, a calculadora teve e tem evoluções desde os primeiros modelos criados. Hoje, elas apresentam grande importância devido à sua evolução, o seu baixo custo, de fácil manuseio além de ser um instrumento portátil. Apesar de sua evolução, ainda existem rejeições em sala de aula no ensino e aprendizagem da matemática, com o mito de que essa ferramenta diminui o raciocínio lógico do aluno. Lima[27], (2011), defende o uso das calculadoras em sala de aula, desde que o aluno conheça de cor a tabuada, saiba efetuar manualmente as quatros operações envolvendo números inteiros, números fracionários e números decimais.

> O surgimento das calculadoras eletrônicas representam um enorme progresso na direção da eficiência, precisão e rapidez nas contas, em quase todos os segmentos da sociedade moderna. Seria impossível negar, ou mesmo tentar diminuir a ênfase desta afirmação, pois o sucesso comercial de tais máquinas prova eloquentemente sua utilidade. Em consequência disto, é natural que se procure introduzir as calculadoras na escola. Tal medida tem sido proposta e executada em nome de dois princípios bastante aceitáveis. O primeiro é que a escola deve adaptar-se à vida atual, modernizar-se e adequar seus alunos à sociedade em que vivem, na qual vão lutar pela vida. O segundo é que o uso da máquina, liberando o aluno de longas enfadonhas e desnecessárias tarefas, deixa-o com mais tempo para aprimorar a sua capacidade de raciocinar e desenvolver-se mentalmente. (LIMA[27], 2011, P.200)

A calculadora deve ser entendida como uma ferramenta auxiliadora no ensino e aprendizagem, proporcionando o aluno identificar como ela chegou àquele resultado. com o uso da calculadora científica pode-se determinar as medidas do seno, cosseno e tangente dos ângulos medidos em grau (deg), radiano (rad) ou grado (gr).

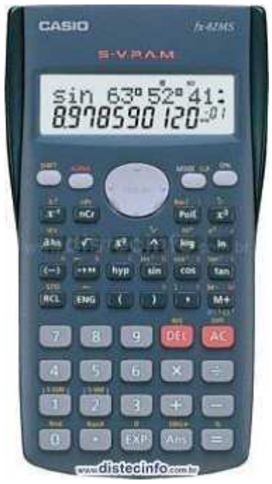


Figura 2.1: Calculadora científica - Fonte: Google imagem[21]

Segundo Mendes[5],(2009), a calculadora é um instrumento universalmente disponível, que todos tem acesso e que pode ser utilizada pelas mais diversas profissões. Ela pode subsidiar os alunos nas aulas de matemática. As discussões fomentadas pelo PCN de matemática têm recomendado a sua utilização construtiva nos diferentes níveis de ensino, desde que o professor leve em consideração as suas vantagens e desvantagens para que possa fazer bom proveito pedagógico desse recurso tecnológico na sala de aula.

2.2 Teodolito

O teodolito foi inventado pelo italiano Ignazio Porro, em torno de 1835. A sua criação teve como base o telescópio. Este instrumento permite a medição de distâncias, elevação e direção, reduzindo o tempo usado para um levantamento topográfico, aumentando a precisão.

Figura 2.2: Teodolito - Fonte: Google imagem[20]

Conforme Rosa[4], (2007) em seu livro intitulado "Trigonometria e Números Complexos", *Teodolito é um instrumento óptico de precisão para medir ângulos horizontais e verticais.* Em áreas de grande extensão, o topógrafo precisa muitas vezes imaginar triângulos em pontos inacessíveis. Medindo três elementos desses triângulos, sendo que pelo menos um deles é um lado, ele pode encontrar as demais dimensões necessárias para uma aplicação prática.

Um teodolito possui uma luneta que permite uma visão apurada em qualquer direção, uma placa horizontal embaixo da luneta que fornece leituras no horizonte em graus, minutos e segundos e uma placa e uma escala verticais, montadas à esquerda da luneta, que permitem a tomada de leituras verticais.

Para este trabalho, no cálculo de medidas inacessíveis, optou-se em construir um teodolito, que será designado como teodolito caseiro. Para a construção de cada teodolito utilizam-se os seguintes materiais:

- uma fotocópia de um transferidor de 360°;
- um pote redondo de plástico com tampa giratória com formato circular;
- uma placa de isopor de forma quadrada com lado maior que o diâmetro do transferidor;
- um canudo oco com formato cilíndrico reto de suco;
- um pedaço de arame de comprimento maior que o dobro do comprimento do diâmetro da tampa do pote;
- cola quente ou cola de isopor;
- fita adesiva.

Como montá-lo

1. A base do teodolito será a placa de isopor. Desenhe as mediatrizes dos lados da base quadrada de isopor de modo que encontre o seu centro. A seguir, cole a fotocópia do transferidor sobre a base do teodolito de forma que as linhas do transferidor, que passam por 0°, 90°, 180° e 270°, coincidam com as mediatrizes dos lados da base do teodolito.
2. A base de rotação do teodolito será a tampa do pote. Cole-a no centro do transferidor da base de modo que o encaixe da tampa fique para cima.
3. O ponteiro do transferidor será o padaço de arame. Com ele será possível realizar a leitura no transferidor. Para colocar o ponteiro, faça dois furos próximos à boca do pote de forma que fiquem sobre o mesmo diâmetro do pote. Assim, o arame passa pelo centro da boca do pote.

4. A mira do teodolito será o canudo. Por meio dele, você pode avistar os pontos a serem medidos. Para instalar a mira, cole o canudo sobre um diâmetro do fundo do pote de maneira que ele fique paralelo ao ponteiro.

5. Por último, encaixe o pote na tampa. Com esse teodolito, você mede, a partir de sua posição, o ângulo formado entre dois outros pontos.

Veja o teodolito caseiro na figura 2.3

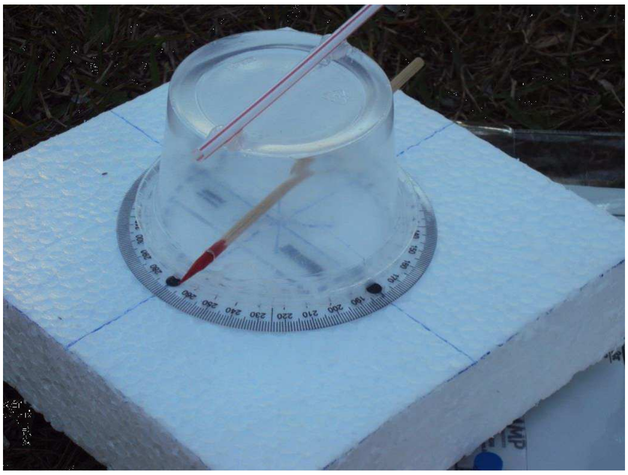


Figura 2.3: Teodolito caseiro - Fonte: Dados do autor

2.3 Prancha trigonométrica

A prancha trigonométrica é um instrumento pedagógico, usada para desenvolver atividades no círculo trigonométrico. Nesse instrumento é possível observar os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo simultâneamente. Entretanto, não há precisão nas medições, exceto para os ângulos notáveis, pois os valores já estão impressos nos eixos.

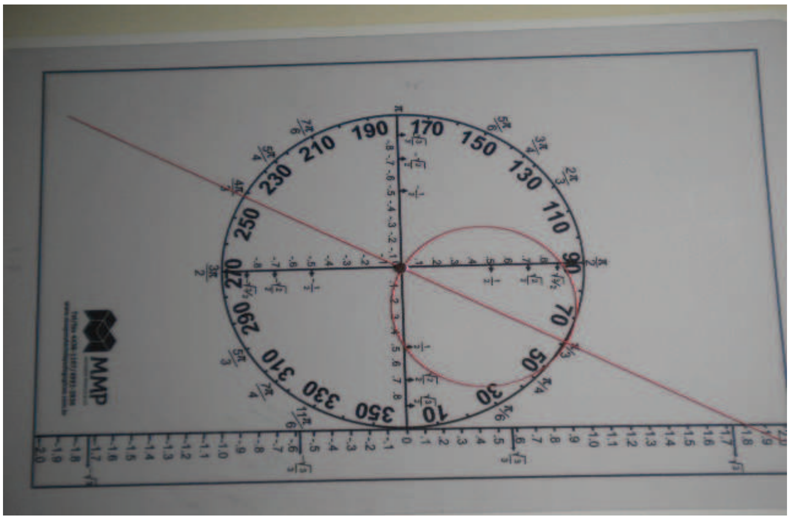


Figura 2.4: Prancha trigonométrica - Fonte: Dados do autor

A prancha trigonométrica é composta de duas partes: uma base branca fixa e uma transparente giratória. Na base branca, encontra-se o círculo trigonométrico de raio R, dividido em ângulos, numerado internamente em graus e externamente em radianos. Há também os eixos dos senos, cossenos e tangentes, divididos em décimos e também os valores irracionais de ângulos notáveis.

Na parte transparente e giratória, encontra-se uma reta em vermelho que passa pela origem, por onde se dá o giro, e uma circunferência de raio igual a $\frac{R}{2}$ com centro em uma das semirretas, que passa pela origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Quando a parte transparente é girada, a reta forma um ângulo θ com o eixo dos cossenos (eixo horizontal) podendo-se verificar o valor do ângulo, do seno, do cosseno e da tangente simultaneamente, apenas observando os pontos de interseção da circunferência com os eixos dos senos, dos cossenos e da reta com o eixo das tangentes.

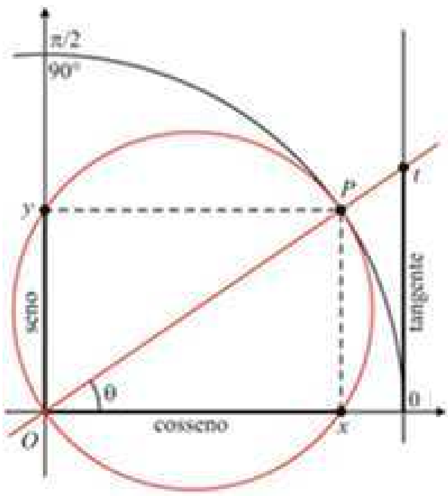


Figura 2.5: Ilustração de como utilizar a prancha trigonométrica - Fonte: Google imagem[28]

Vejam que ao girar a parte transparente formando um ângulo θ com o eixo dos cossenos, o ponto P indica o ângulo em graus e em radianos, as projeções do ponto P nos eixos dos cossenos e dos senos, dão os números x e y , onde x é o valor do cosseno e y é o valor do seno do ângulo θ, assim como o ponto de coordenada t é a interseção da reta com o eixo das tangentes, o que dá o número t como valor da tangente do ângulo θ.

2.4 Software GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, criado pelo professor Dr. Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University, em 2001, que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. É um software gratuito, escrito na linguagem JAVA e disponível em rede para download[1]. É compatível com diferentes sistemas operacionais, entre eles, o Microsoft Windows 98, 2000, XP, Vista, Seven (32 e 64 bits) e Linux. O trabalho no software é simples e fácil, e por isso pode ser usado tanto na educação básica como no ensino superior.

A característica mais destacável do Geogebra é a percepção dupla dos objetos, conforme Júnior[13], (2010), para cada expressão na janela algébrica, existe um objeto correspondente na janela gráfica e vice-versa. Dessa forma o aluno tem a possibilidade de visualizar aquilo que está calculando, facilitando a compreensão do conteúdo trabalhado em sala de aula.

Esse aplicativo permite a realização de diferentes atividades, entre elas, pode-se destacar a construção de pontos, segmentos de reta, retas paralelas e perpendiculares, construção de gráficos de funções, construção de figuras geométricas. Permite ainda calcular o ponto médio dos segmentos, área e perímetro de figuras plana, medir ângulos, entre outras.

O software possui na parte superior uma barra contendo todas as ferramentas necessárias para a realização das atividades. Cada ícone tem ao lado a sua função específica facilitando a compreensão de quem está manuseando-o.

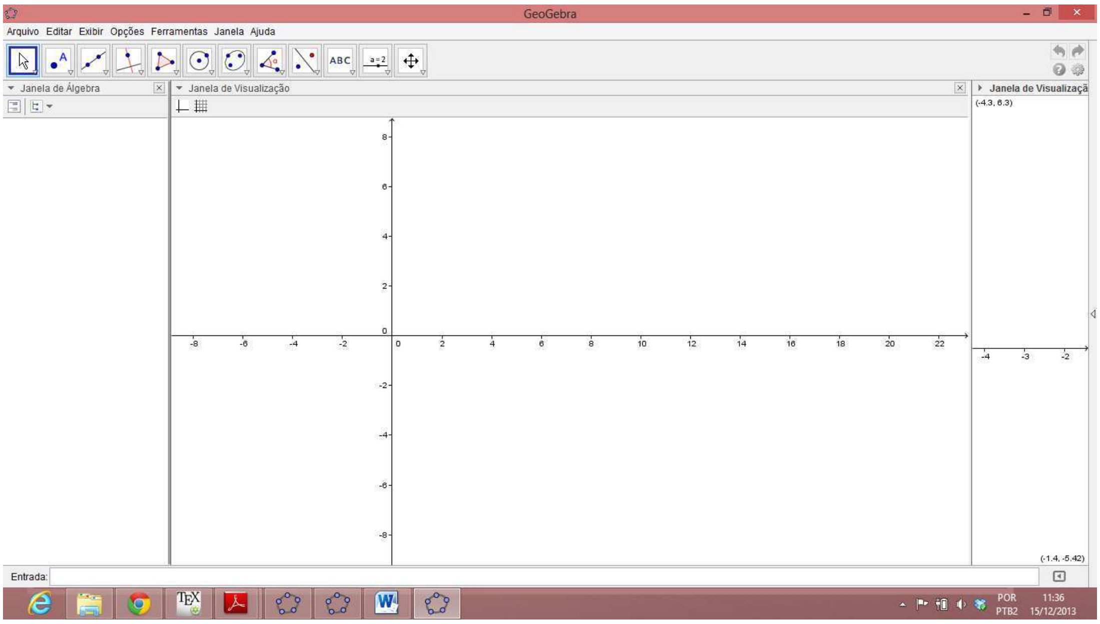


Figura 2.6: Janela inicial do GeoGebra - Fonte: Dados do autor.

Espera-se que com o uso dos computadores (software GeoGebra), no ensino e aprendizagem de matemática, possa exercer um papel decisivo em virtude das possibilidades de construção de modelos virtuais, de modo que o aluno possa manipular, conjecturar, comparar os resultados de forma dinâmica e atraente, como afirma Mendes[5], (2009).

[1]http://www.geogebra.org/cms/ptbr

> O computador exerce um papel decisivo no ensino de matemática, nos dias atuais, em virtude das possibilidades de construção de modelos virtuais para a matemática imaginária. A informática, atualmente, é considerada uma das componentes tecnológicas mais importante para a efetivação da aprendizagem matemática no mundo moderno. Sua relação com a educação matemática se estabelece a partir das perspectivas metodológicas atribuídas à informática como meio de superação de alguns obstáculos encontrados por professores e estudantes no processo ensino-aprendizagem. (MENDES[5], 2009, p.113)

Conforme D'Ambròsio[2], (1986), a utilização dos computadores no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente contribui, não apenas a reconhecer na área de experimentos, uma fonte de ideias matemáticas, proporcionando um campo de confronto entre teoria e prática. Proporciona, na sala de aula um ambiente saudável, interativo, fértil para a produção de novos saberes, na efetivação do ensino.

CAPÍTULO 3

CADERNO DE ATIVIDADES

Este capítulo apresenta uma sequência didática envolvendo as funções seno, cosseno e tangente, com o objetivo de auxiliar professores e alunos de matemática no ensino e aprendizagem destas funções na educação básica. A sequência didática foi organizada em três seções: a trigonometria no triângulo retângulo, a trigonometria no círculo trigonométrico e as funções circulares. Cada seção composta por um resumo do conteúdo proposto e atividades divididas em: **atividades em sala de aula** e **atividades complementares**.

As atividades propostas nesta sequência didática são compostas de exercícios instigadores e desafiadores que podem ser resolvidos utilizando as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra. As atividades em sala de aula objetivam instigar e desafiar os alunos a mobilizar os conhecimentos prévios e, sob a linha investigativa, solucionar os problemas propostos utilizando as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra. As atividades complementares objetivam fixar os conhecimentos adquiridos em sala de aula. As atividades resolvidas em sala de aula foram apresentadas na secção 4.3 **“desenvolvimento das atividades”** do próximo capítulo.

Na primeira seção, pretende-se retomar alguns conceitos como: ângulos, triângulo retângulo, o teorema de Pitágoras, as funções seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo e as funções seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo do triângulo retângulo, em seguida propôs-se as atividades. Na segunda seção, retoma-se os conceitos sobre o número π, comprimento de um círculo, arcos, medidas de arcos e ângulos, comprimento de arcos e as funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. Na terceira seção, retoma-se os conceitos das funções circulares e as representações gráficas das funções seno, cosseno e tangente de números reais.

Para a elaboração deste caderno de atividades, sobre os conceitos a serem trabalhados com alunos, utilizando as ferramentas propostas nesta dissertação, foram consultados os seguintes autores, com adaptações: Carmo, Morgado e Wagner[3], (2005); Dante[10], (2011); Dante[10], (2005); Lima, E. L. [et al.][1], (2006); Barbosa [16], (2012); Iezzi[25], (2004) e GiIraldo, Caetano e Mattos[26], (2012) .

3.1 A trigonometria no triângulo retângulo

As funções seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo têm um valor infinito, uma vez que, permitem efetuar cálculos mais elementares no dia a dia, até os mais complexos existente na ciência e na alta tecnologia. São utilizadas no cálculo de medidas inacessíveis, medidas dos elementos de um triângulo retângulo e outras.

Definição 3.1. *Ângulo é um figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é o vértice.*

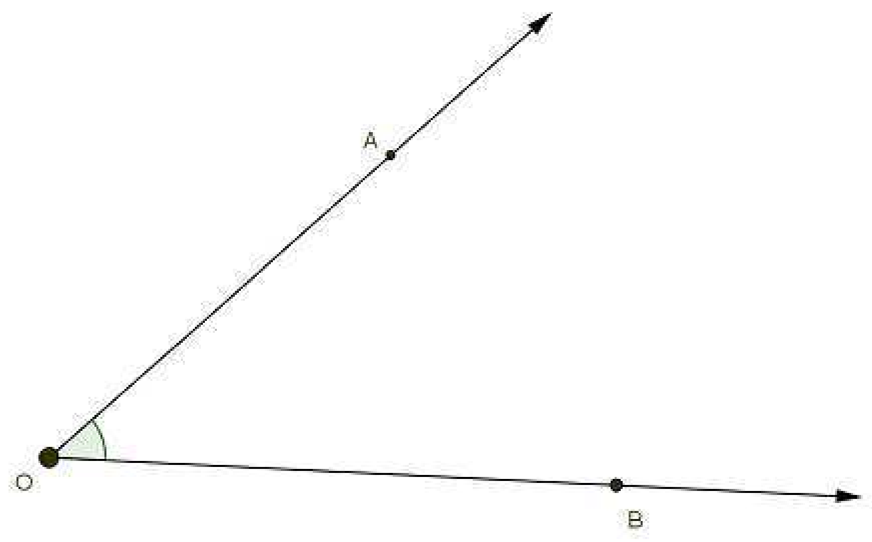


Figura 3.1: Ângulo - Fonte: Dados do autor.

Na figura 3.1 os **lados** são as semirretas OA e OB e o **vértice** é o ponto O.

Pode-se representar um ângulo de várias maneiras. Se o ponto O é o vértice e se A e B são pontos quaisquer, um em cada lado, este ângulo será representado por $A\hat{O}B$, ou $B\hat{O}A$. Utiliza esta notação, a letra que designa o vértice deve aparecer entre as outras duas.

Definição 3.2. *Um ângulo cuja medida é* $90°$ *é chamado de ângulo reto.*

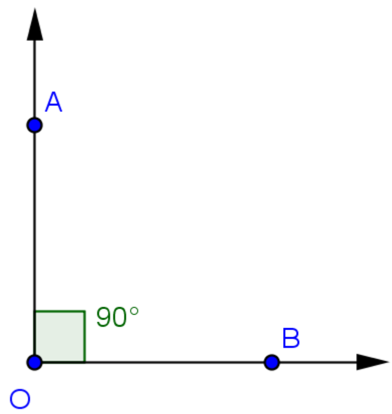


Figura 3.2: Ângulo reto - Fonte: Dados do autor.

Na figura 3.2, o ângulo AOB é reto pois $A\hat{O}B = 90°$.

Definição 3.3. *Um triângulo é chamado de triângulo retângulo quando um de seus ângulos internos é reto (medida igual a* $90°$*).*

Em um triângulo retângulo os lados têm nomes especiais. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa** e os outros são chamados de **catetos**.

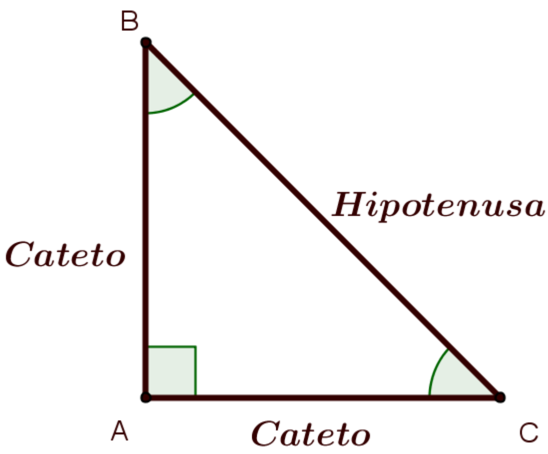


Figura 3.3: Triângulo Retângulo - Fonte: Dados do autor.

No triângulo da figura 3.3, temos que $B\hat{A}C = 90°$, isto é, o ângulo BAC é reto, logo ABC é um triângulo retângulo, o lado BC é a hipotenusa e os lados AC e AB são os catetos.

Teorema 3.4. *(* **Pitágoras***) Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.*

$$\boxed{(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2}$$

Demonstração. A prova do teorema de Pitágoras é uma consequência da semelhança de triângulos.

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. Trace a altura AD do vértice A ao lado BC, sendo feito uso da seguinte notação $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = h$, $\overline{BD} = m$ e $\overline{CD} = n$.

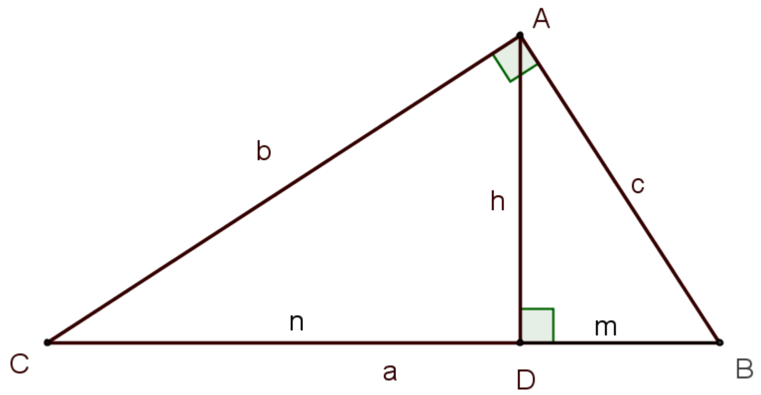


Figura 3.4: Relações métricas no triângulo retângulo - Fonte: Dados do autor.

Como o segmento AD é perpendicular ao segmento BC, então, os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $A\hat{B}C + A\hat{C}B = 90°$ e $A\hat{B}C + B\hat{A}D = 90°$, então,

$B\hat{A}D = A\hat{C}B$.

Como também $C\hat{A}D + A\hat{B}C = 90°$, então,

$C\hat{A}D = A\hat{B}C$.

Os triângulos ADB e CDA são, portanto, ambos semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si.

Da semelhança dos triângulos ADB e ABC ($A \to C$, $B \to B$ e $D \to A$), conclui-se que

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = am \ (1)$

Da semelhança dos triângulos CDA e ABC ($A \to B$, $C \to C$ e $D \to A$), conclui-se que

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = an \ (2)$

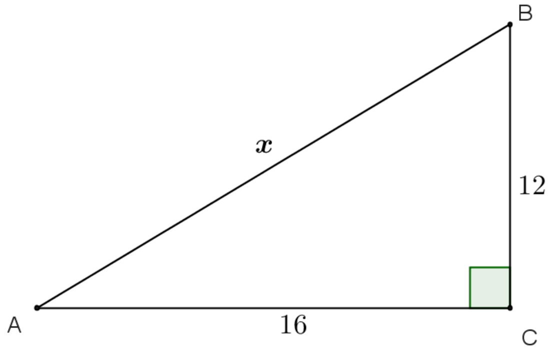
Somando membro a membro as sentenças (1) e (2), obtemos:

$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n)$. Como $m + n = a$, então, $b^2 + c^2 = a \cdot a = a^2$.

Portanto, $(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2$.

□

Exemplo 3.5. Utilizando o teorema de Pitágoras, encontre o valor da medida x no triângulo a seguir.



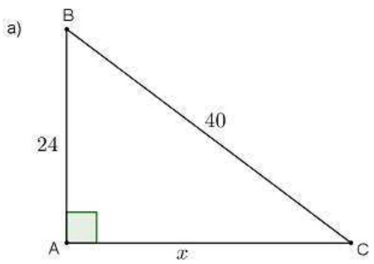
Solução: ABC é um triângulo retângulo em C, o lado AB é a hipotenusa com $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = 16$ e $\overline{BC} = 12$, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

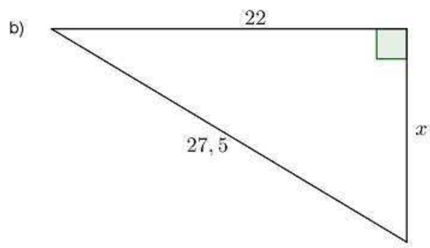
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow x^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{400} \Rightarrow x = 20.$$

Atividades complementares

Nesta seção, são apresentados alguns exercícios aplicando os conceitos preliminares do ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Os execícios têm como objetivo aplicar o teorema de Pitágoras em situações-problema que visa o cálculo de uma medida desconhecida no triângulo retângulo. Nestes exercícios, pretende-se que os alunos utilizem a calculadora científica e também o software GeoGebra.

1) Utilizando o teorema de Pitágoras, encontre as medidas desconhecidas em cada triângulo retângulo abaixo:





2) Para estar a 1000 m de altura, em relação ao solo, a partir da decolagem, um avião percorre em linha reta 2600 m. Qual a distância, em relação ao solo, do momento da decolagem até o ponto em que o avião atinge essa altura?

Definição 3.6. *Funções trigonométricas do ângulo agudo*

Considere um ângulo agudo $A\hat{O}B = \alpha$, $0° \leq \alpha \leq 90°$, e trace, a partir dos pontos A_1, A_2 , A_3 etc. da semi reta OA, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc. à semirreta OB. Os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 etc. são semelhantes pois o ângulo $\hat{O}$ é comum e os ângulos $\hat{B_1}$, $\hat{B_2}$, $\hat{B_3}$, etc. são retos. Assim de acordo com a figura 3.5 pode-se escrever:

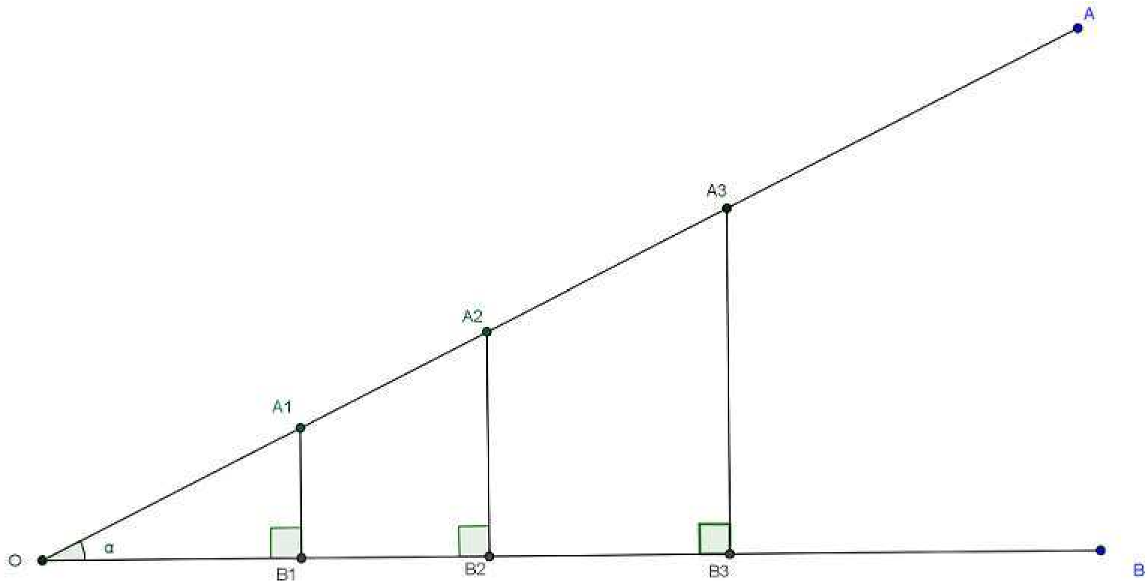


Figura 3.5: Funções trigonométricas do ângulo agudo - Fonte: Dados do autor.

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots$$

Esta relação depende apenas do ângulo α e não das medidas dos segmentos envolvidos. Esta função de α é definida como $sen\alpha$, para $0° \leq \alpha \leq 90°$.

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots = sen\alpha,$$ que se lê seno de α.

Vê-se também que pode-se estabelecer as relações:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots = cos\alpha,$$ que se lê cosseno de α.

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \ldots = tg\alpha,$$ que se lê tangente de α.

Estas funções são denominadas de funções trigonométricas.

Definição 3.7. *Funções trigonométricas de um ângulo agudo de um triângulo retângulo*

Seja o triângulo retângulo ABC, sendo o ângulo $A\hat{C}B$ reto ($A\hat{C}B = 90°$), assim, os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$ são agudos e complementares

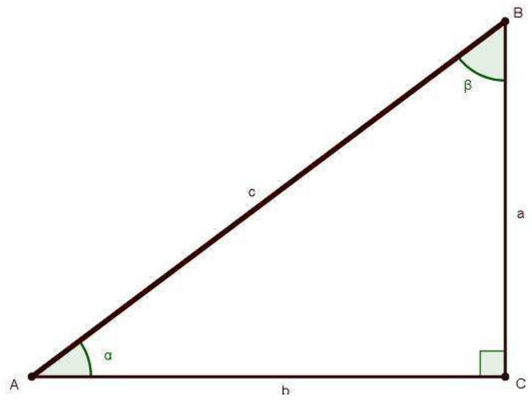


Figura 3.6: Triângulo retângulo - Fonte: Dados do autor.

Conforme o triângulo retângulo da figura 3.6, tem-se:

$B\hat{A}C = \alpha$, $0° \leq \alpha < 90°$

$A\hat{B}C = \beta$, $0° \leq \beta < 90°$

$B\hat{A}C + A\hat{B}C = \alpha + \beta = 90°$

O lado AB é a hipotenusa, os lados AC e BC são os catetos.

$\overline{AB} = c$; $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

De acordo com cada ângulo agudo do triângulo retângulo da figura 3.6, escreve-se: O lado BC é o cateto oposto e o lado AC é o cateto adjacente relativos ao ângulo agudo $B\hat{A}C$, assim define-se:

$$sen(B\hat{A}C) = \frac{medida\,do\,cateto\,oposto\,ao\,ângulo\,BAC}{medida\,hipotenusa} \Rightarrow sen\alpha = \frac{a}{c}$$

$$cos(B\hat{A}C) = \frac{medida\,do\,cateto\,adjacente\,ao\,ângulo\,BAC}{medida\,da\,hipotenusa} \Rightarrow cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg(B\hat{A}C) = \frac{medida\,do\,cateto\,oposto\,ao\,ângulo\,BAC}{medida\,do\,cateto\,adjacente\,ao\,ângulo\,BAC} \Rightarrow tg\alpha = \frac{a}{b}$$

O lado AC é o cateto oposto e o lado BC é o cateto adjacente relativos ao ângulo agudo $A\hat{B}C$, assim define-se:

$$sen(A\hat{B}C) = \frac{medida\,do\,cateto\,oposto\,ao\,ângulo\,ABC}{medida\,hipotenusa} \Rightarrow sen\beta = \frac{b}{c}$$

$$cos(A\hat{B}C) = \frac{medida\,do\,cateto\,adjacente\,ao\,ângulo\,ABC}{medida\,da\,hipotenusa} \Rightarrow cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$tg(A\hat{B}C) = \frac{medida\,do\,cateto\,oposto\,ao\,ângulo\,ABC}{medida\,do\,cateto\,adjacente\,ao\,ângulo\,ABC} \Rightarrow tg\beta = \frac{b}{a}$$

A soma das medidas de dois ângulos agudos de um triângulo retângulo é igual a 90°, ou seja, os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. Conforme as definições anteriores, pode-se enunciar a proposição:

Proposição 3.8. *Se dois ângulos α e βsão complementares, então $sen\alpha = cos\beta$ (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar) e $tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$ (a tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente de seu complementar).*

Demonstração. conforme as definições da figura 3.6, tem-se: □

$sen\alpha = \frac{a}{c} = cos\beta$ e $sen\beta = \frac{b}{c} = cos\alpha$

$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{b/a} = \frac{1}{tg\beta}$.

Teorema 3.9. *Qualquer que seja o ângulo α, tem-se:*

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Denominada relação trigonométrica fundamental I

Demonstração. **Teorema 3.9**

Da figura 3.7, tem-se:

$sen\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot sen\alpha$

$cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot cos\alpha$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura 3.7

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (c \cdot sen\alpha)^2 + (c \cdot cos\alpha)^2 = c^2 \Rightarrow c^2 sen^2\alpha + c^2 cos^2\alpha = c^2$, dividindo ambos os membros por c^2, obtém-se:

$\frac{c^2 sen^2\alpha + c^2 cos^2\alpha}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \Rightarrow sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Esta é a prova da relação trigonométrica fundamental I.

Portanto, $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

□

Nota 3.10. $(sen\alpha)^2 = sen^2\alpha$ e $(cos\alpha)^2 = cos^2\alpha$.

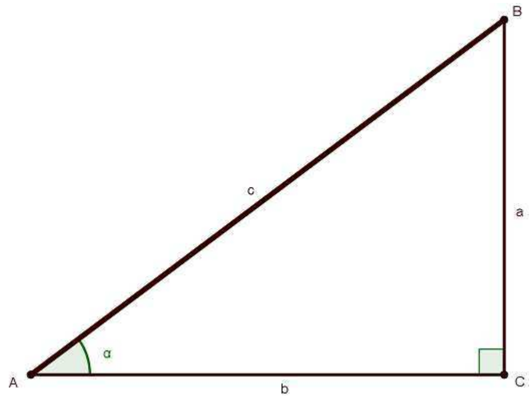


Figura 3.7: Relações trigonométricas fundamentais - Fonte: Dados do autor.

Teorema 3.11. *Qualquer que seja o ângulo α com $\alpha \neq 90°$tem-se:*

$$tg\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

Denominada relação trigonométrica fundamental II

Demonstração. **Teorema 3.11**

Da figura 3.7, temos

$sen\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c.sen\alpha$

$cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c.cos\alpha$

como $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c.sen\alpha}{c.cos\alpha} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$. Esta é a prova da relação trigonométrica fundamental II. □

Atividades em sala de aula

Atividade 1

Usando o software GeoGebra, resolva cada item abaixo:

1.1) Definir as funções seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo ABC reto no vértice B verificando o valor de cada função para os ângulos agudos α e β.

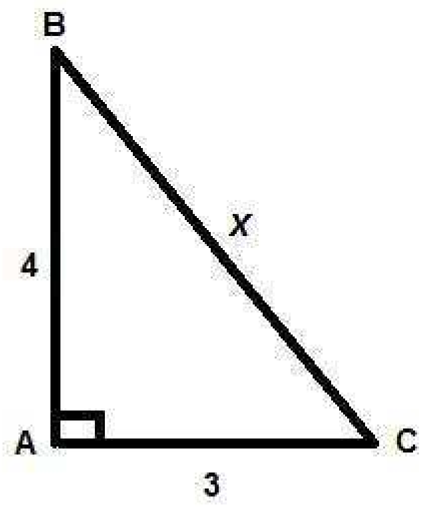
1.2) Verificar que estas funções não dependem das medidas dos comprimentos dos lados desse triângulo.

1.3) Mostrar a validade da proposição 3.8 e a seguir verificar a relação trigonométrica fundamental I.

1.4) Construa uma tabela com os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos indicados por números inteiros, com duas casas decimais.(seguir a regra de arredondamento).

Atividade 2

2.1) **Determinar o valor da medida x na figura abaixo, em seguida, calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$. A seguir, usando a calculadora científica determine o valor aproximado em graus, das medidas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.**



2.2) **Determinar as medidas dos lados e as medidas dos ângulos agudos de alguns triângulos retângulos existentes nas construções da dependência da escola.**

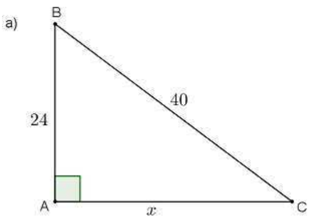
2.3) Calcular a medida da altura de uma palmeira existente no pátio da escola, conforme a figura 3.8 .

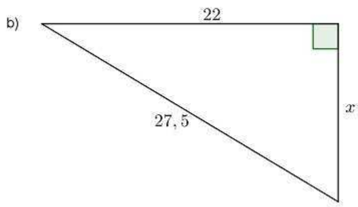
Figura 3.8: Palmeira - Fonte: Dados do autor

Atividades complementares

Nesta seção são apresentados exercícios objetivando a aplicação das funções seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo. Com estas atividades pretende-se que os alunos utilizem as ferramentas calculadora científica, teodolito e o software GeoGebra.

1) Calcule o valor do seno, cosseno e tangente de cada ângulo agudo dos triângulos retângulos seguintes, a seguir determine a medida aproximada, em graus, de cada um destes ângulos:

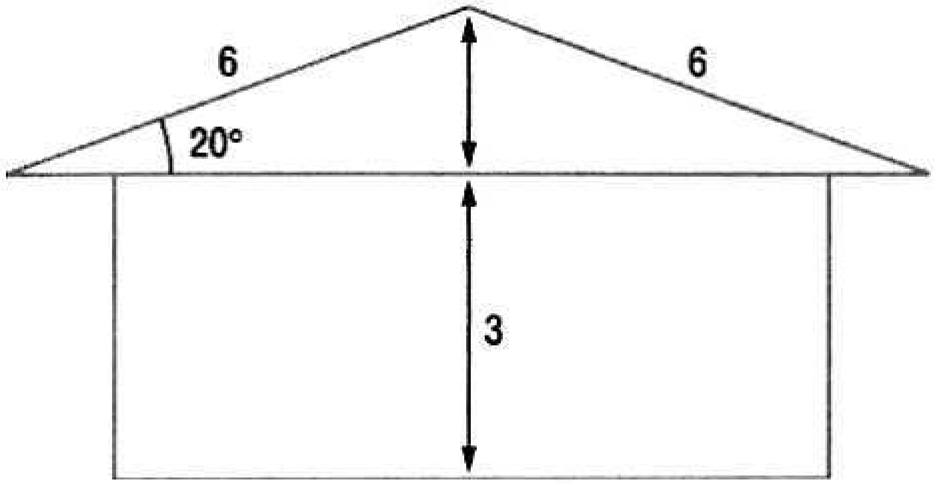




2) O topo de uma torre é vista de um ponto P do solo sob um ângulo de 30°. Sabendo que a distância do ponto P à base da torre é igual a 15 metros, calcule a altura da torre.

3) Uma escada de 5 metros de comprimento está apoiada a 3 metros do topo de um poste, formando um ângulo de 30° com o solo. Calcule a medida da altura do poste.

4) Na construção de uma casa, o “caimento” do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos 6m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa. (Dados: sen20°= 0,34; cos20°= 0,94; tg20°=0,36.).



3.2 A trigonometria no círculo trigonométrico

Definição 3.12. *O número π*

Dada uma circunferência de raio r, diâmetro $d = 2r$, o número π é definido como a razão do comprimento C da circunferência pelo seu diâmetro d, isto é:

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r}$$

Definição 3.13. *O comprimento de um círculo*

Pela definição do número π, observa-se que o comprimento C de um círculo é dado por:

$$C = \pi \,.\, d = 2\pi r$$

Definição 3.14. *Arcos*

Seja um círculo de centro O sobre o qual toma-se dois pontos distintos, A e B. A seguir, ainda sobre a circunferência, toma-se um terceiro ponto P, distinto dos pontos A e B. Relativamente a A e B, P apresenta duas possibilidades:

1)situar-se no percurso mais curto entre os pontos A e B; ou

2)situar-se no percurso mais longo entre os pontos A e B.

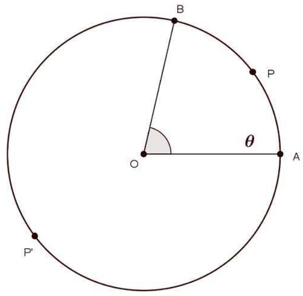


Figura 3.9: Definição de arco - Fonte: Dados do autor.

Cada uma dessas duas partes em que fica dividida a circunferência por dois de seus pontos é chamada ***arco de circunferência***. No caso, tem-se os arcos APB e $AP'B$, ambos com extremidades A e B.

É importante lembrar que:

A cada arco tomado corresponde um ângulo central e a medida de um arco é equivalente a medida do ângulo central correspondente.

Definição 3.15. *Medidas de arcos e ângulos*

Existem várias unidades para as medidas de arco e ângulos. Dentre elas, as duas unidades grau e radiano se destacam, o grau por ser tradicional há milênios e o radiano por ser a mais natural.

- **Grau**: 1 grau, denotado 1°, é um ângulo correspondente a $\frac{1}{360}$ de uma volta completa de um círculo. Consequentemente, uma volta completa no círculo, corresponde um ângulo de 360°.

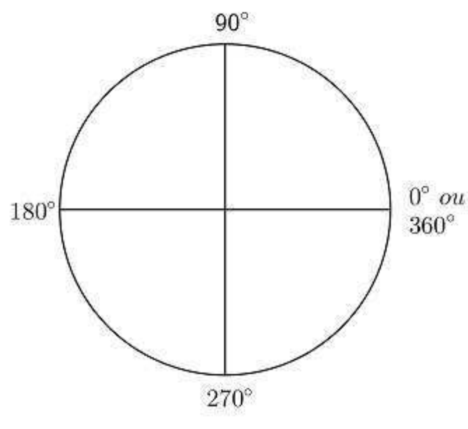


Figura 3.10: Definição de grau - Fonte: Dados do autor.

- **Radiano**: 1 radiano, denotado 1 *rad*, é o ângulo correspondente a um arco de mesmo comprimento do raio do círculo.

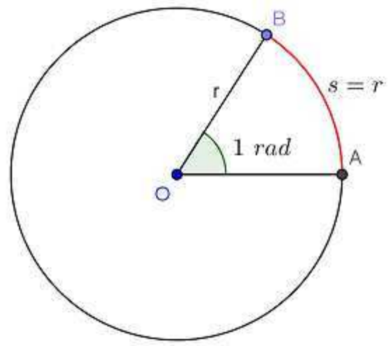


Figura 3.11: Definição de radiano - Fonte: Dados do autor.

Proposição 3.16. *Comprimento de um arco*

Em um círculo de raio r a definição de radiano implica que um ângulo de 1 radiano compreende um arco de comprimento r. Logo um ângulo de θ radianos compreende um arco de comprimento s. O valor de s é dado por

$$\frac{1\ rad}{r} = \frac{\theta\ rad}{s} \Rightarrow s = r\theta.$$

Definição 3.17. *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.*

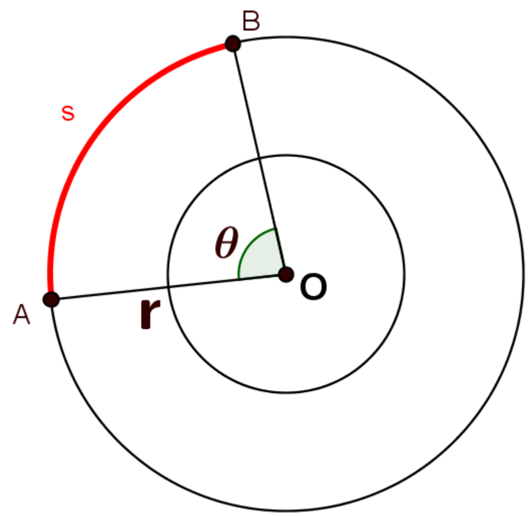


Figura 3.12: Medida de ângulo em radiano - Fonte: Dados do autor.

Assim, na figura 3.11, $A\hat{O}B = \frac{s}{r}\ radianos = \theta\ radianos$ e

$$s = \theta r$$

Como o comprimento de um semicírculo (que é um arco de 180°) é πr, temos que $180° = \frac{\pi r}{r} = \pi\ radianos$. Assim, $1\ radiano = \frac{180°}{\pi} \simeq 57°$.

Definição 3.18. *Círculo trigonométrico*

Círculo trigonométrico é o círculo C de centro $O=(0,0)$, na origem do sistema cartesiano, tal que se um ponto $P=(x,\ y)\in C$, temos que $x^2+y^2=1$. Onde $x^2+y^2=1$ representa a equação de um círculo de raio 1. Essa definição deve-se à relação trigonométrica fundamental I $cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$. Sugere que, para todo ângulo α, os números $cos\alpha$ e $sen\alpha$ são as coordenadas de um ponto do círculo.

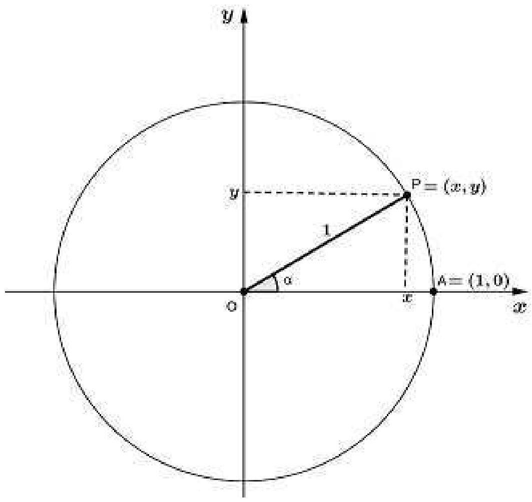


Figura 3.13: Definição do seno e cosseno no círculo trigonométrico - Fonte: Dados do autor.

Seja o ponto $P=(x,\ y)$ do círculo C de raio unitário e α o ângulo correspondente, medido no sentido anti-horário a partir do ponto $A=(1,\ 0)$ no semi-eixo positivo das abscissas. Define-se o cosseno do ângulo α como o valor da abscissa de P e seu seno como o valor da ordenada de P. Esta definição do seno e do cosseno no círculo trigonométrico permite calcular os valores do seno e do cosseno para ângulos dados por qualquer número real, e não apenas para ângulos agudos como no caso do triângulo retângulo.

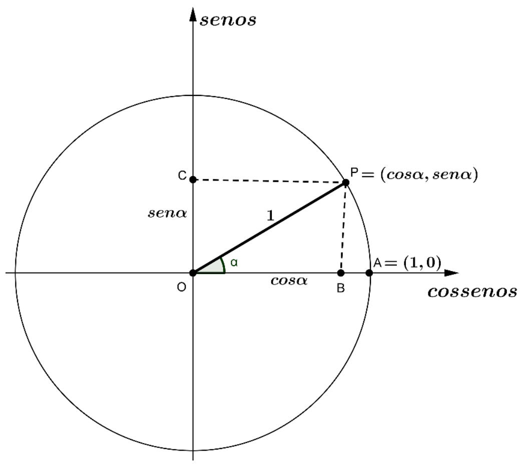


Figura 3.14: Seno e cosseno de um arco no círculo trigonométrico - Fonte: Dados do autor.

A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E: \mathbb{R} \to C$, que faz corresponder cada número real α o ponto $E(\alpha) = (x, y)$ do círculo unitário do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $\alpha > 0$, percorre-se sobre o círculo C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento α, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum). O ponto final do caminho será chamado de $E(\alpha)$.
- Se $\alpha < 0$, $E(\alpha)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|\alpha|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler $E: \mathbb{R} \to$C pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre um círculo C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $\alpha = 0$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$.

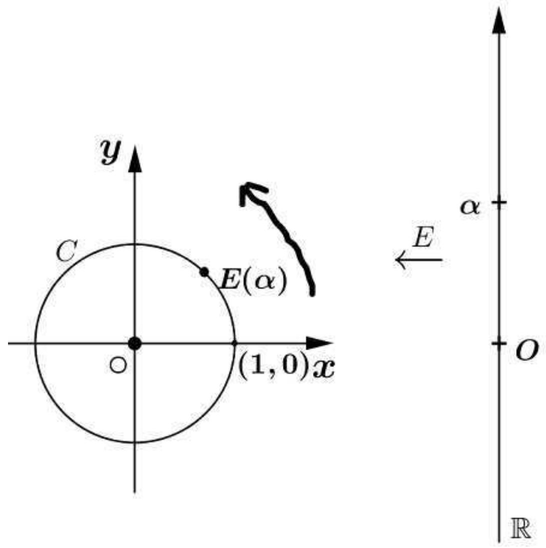


Figura 3.15: Ilustração da função de Euler - Fonte: Dados do autor.

Cada vez que o ponto α descreve na reta um intervalo de comprimento l, sua imagem $E(\alpha)$ percorre sobre o círculo C um arco de igual comprimento l. Em particular, como o círculo C tem comprimento igual a 2π, sua imagem $E(\alpha)$ dá uma volta completa sobre C, retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $E(\alpha + 2\pi) = E(\alpha)$ e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(\alpha + 2k\pi) = E(\alpha)$, seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, temos:

Ângulo (α)	**seno**	**cosseno**
0	**0**	**1**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**
π	**0**	**-1**
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**0**
2π	**0**	**1**
$-\frac{\pi}{2}$	**-1**	**0**
$-\pi$	**0**	**1**

Sinal do seno e cosseno

- Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ então $sen\alpha > 0$ e $cos\alpha > 0$;
- Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ então $sen\alpha > 0$ e $cos\alpha < 0$;
- Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ então $sen\alpha < 0$ e $cos\alpha < 0$;
- Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ então $sen\alpha < 0$ e $cos\alpha > 0$.

3.3 As funções circulares

Com o desenvolvimento da matemática atribuído às novas criações, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e tangente e suas associadas, o status de função real de uma variável real. Uma importante propriedade dessas funções é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos da natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento dos planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Definição 3.19. *A função seno*

Seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de x associa-se um único valor para seu seno, denotado $sen(x)$. Define-se então a função $f(x) = sen(x)$, cujo gráfico é uma curva chamada senóide.

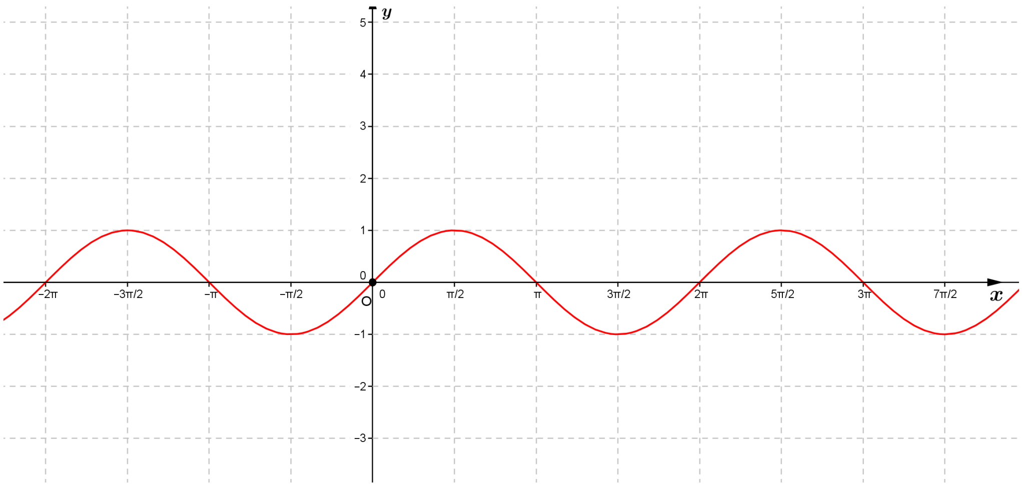


Figura 3.16: Gráfico da unção$y = sen(x)$ - Fonte: Dados do autor.

A função $sen(x)$ exibe duas propriedades importantes:

1- é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $sen(x) = sen(x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$;

2- é limitada entre -1 e 1, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

Definição 3.20. *A função cosseno*

Seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico, a cada valor de x associamos um único valor para seu cosseno, denotado $cos(x)$. Definimos então a função $f(x) = cos(x)$, cujo gráfico é um curva denominada cossenoide, conforme a figura 3.17.

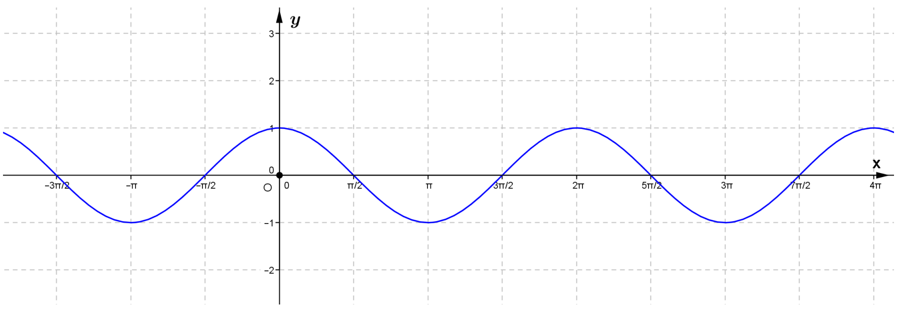


Figura 3.17: Gráfico da função $y = cos(x)$ - Fonte: Dados do autor.

A função cosseno exibe duas propriedades importantes:

1. é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $cos(x) = cos(x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$;

2. é limitada entre -1 e 1, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$temos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$.

Definição 3.21. *A função tangente*

Das funções seno e cosseno deriva a função tangente, embora a função tangente não esteja definida para todo número real, é dada pela expressão

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)},\ cos(x) \neq 0 \text{ ou seja } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Considere-se uma reta orientada tangente ao círculo unitário C no ponto $A = (1,\ 0)$ e seja AB um arco de C de medida α. A reta r que contém os pontos O e B determina B' em C e T no novo eixo.

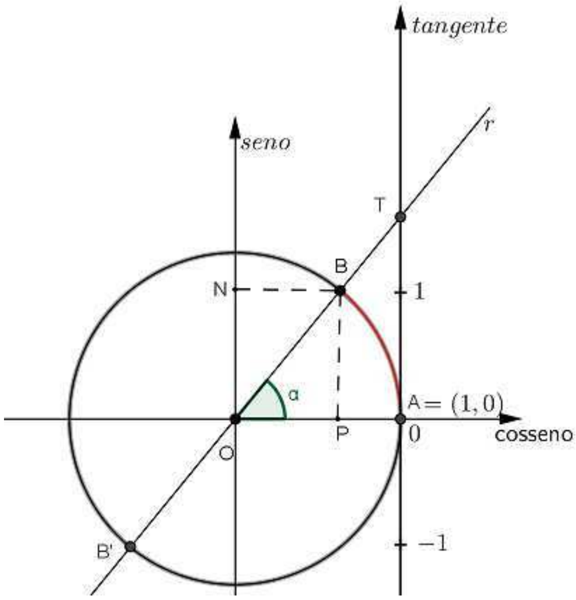


Figura 3.18: Círculo trigonométrico - Fonte: Dados do autor.

Na figura 3.17 o triângulo AOT é retângulo em A, com $\overline{OA} = 1$, $cos(\alpha) = \overline{OP}$ e $sen(\alpha) = \overline{ON}$, pela definição $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}$.

Os triângulos OPB e OAT são semelhantes pois $\hat{A} = \hat{P} = 90°$ e $\hat{O} = \alpha$ é comum, assim $\frac{\overline{PB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}$, mas $\overline{PB} = \overline{ON}$. Logo, $tg(\alpha) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$. Portanto, $tg(\alpha)$ é a medida algébrica do segmento AT.

Gráfico da função $y = tg(x)$

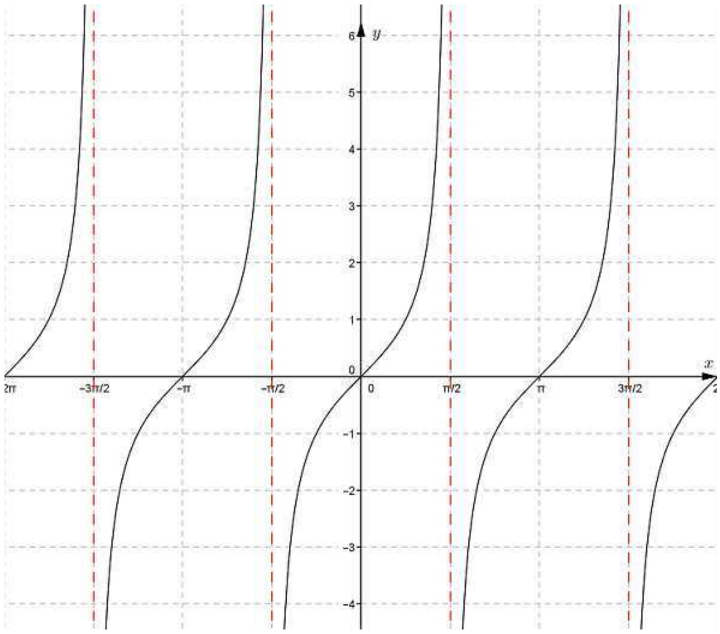


Figura 3.19: Gráfico da função $y = tg(x)$ - Fonte: Dados do autor.

Seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico com $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$. A cada valor de x associa-se um único valor para sua tangente, denotada por $tg(x)$. Define-se então a função $f(x) = tg(x)$.

Observa-se que, em qualquer caso, $tg(x) = tg(x+\pi)$, o que mostra que a tangente é uma função periódica com período π. Para valores próximos e menores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se menor que qualquer número dado. Pode-se então esboçar o gráfico da função tangente no intervalo $[0, \ \pi]$ e repetí-lo em todos os intervalos da forma $[k\pi, \ (k+1)\pi]$.

Atividades em sala de aula

Atividade 3

3.1) Em que quadrante se têm simultaneamente:

a) $sen\theta < 0$ e $cos\theta < 0$?

b) $sen\theta > 0$ e $tg\theta > 0$?

c) $cos\theta > 0$ e $tg\theta > 0$?

3.2) Calcule:

a) $sen300°$

b) $cos210°$

c) $tg1845°$

Atividade 4

4.1) Usando o software GeoGebra, esboce os gráficos das funções f e g no mesmo sistema de coordenadas cartesianas identificando-os usando cores diferentes. A seguir anote suas observações sobre o comportamento desses gráficos:

a) $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(2x)$

b) $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = 2 + 2cos(2x + 2)$

4.2) Usando o software GeoGebra, esboce o gráfico da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$, anotando em seu caderno o que acontece com o gráfico da função quando se varia cada um dos parâmetros **a**, **b**, **c** e **d**

Atividade 5

Desenrolando o seno.

Esta atividade teve como objetivo ensinar para os alunos o conceito de radiano. Ensinar o conceito de radiano não é um tarefa muito fácil. Muitos alunos saem do Ensino Médio sem qualquer percepção intuitiva de medidas angulares em radianos. Esse fato pode ser verificado, solicitando aos alunos que representem medidas angulares em graus e em radianos por meio de aberturas com os braços: provavelmente, eles não terão dificuldades para representar uma abertura de 60°, por exemplo, mas não terão ideia de como abrir os braços para indicar 1 radiano.

O aplicativo desenrolando o seno permite relacionar graus com radianos e ao mesmo tempo, desenrolar arcos no eixo horizontal para traçar o gráfico da função seno. A geometria dinâmica do aplicativo desenrolando o seno dá-se pelo movimento do ponto P sobre o eixo horizontal, desde a origem até o ponto A de abscissa igual a 2π. A seguir, digitando os comandos na janela de entrada no GeoGebra, têm-se os passos para a construção do aplicativo desenrolando o seno.

Passos da construção do aplicativo desenrolando o seno no GeoGebra

1.$O = (0,\ 0)$
Propriedade desse ponto: na aba básico habilitar a opção Fixar Objeto.
2. $C = (-1,\ 0)$
Propriedade desse ponto: na aba básico habilitar a opção Fixar Objeto.
3. $c = Círculo[C,\ O]$
Propriedade desse círculo: na aba básico desabilitar Exibição de Rótulo, na aba estilo mudar o estilo da linha para tracejado.
4. $A = (2pi,\ 0)$
Propriedade desse ponto: na aba básico habilitar a opção Fixar Objeto.
5. $P = Ponto[Segmento[O,\ A]]$
Propriedades desse ponto: na aba cor escolher vermelho, na aba estilo escolher Espessura da Linha 5; movimente esse ponto sobre o eixo horizontal até a abscissa 1.
6. $radiano = Segmento[O\ P]$
Propriedades desse segmento: na aba básico em Exibir Rótulo escolher a opção valor, na aba cor escolher verde escuro, na aba estilo escolher Espessura da Linha 9.
7. $Q = Girar[O,\ radiano,\ C]$
Propriedade desse ponto: na aba cor escolher vermelho.
8. $grau = \hat{A}ngulo[O,\ C,\ Q]$
Propriedades desse ângulo: na aba básico em Exibir Rótulo escolher a opção valor, na aba estilo escolher tamanho 50.
9. $cc = Arco[c,\ Q,\ O]$
Propriedades desse arco: na aba básico desabilitar Exibir Rótulo, na aba cor escolher verde escuro, na aba estilo escolher Espessura da Linha 9.
10. $h = Reta[Q,\ EixoX]$
Propriedades dessa reta: na aba básico desabilitar Exibir Rótulo, na aba estilo escolher Estilo da Linha pontilhado.
11. $v = Perpendicular[P,\ EixoX]$
Propriedades dessa reta: na aba básico desabilitar Exibir Rótulo, na aba estilo escolher Estilo da Linha pontilhado.
12. $seno =$Função$[sin(x), x(O), x(A)]$
Propriedades desse gráfico: na aba cor escolher vermelho, na aba estilo escolher Espessura da Linha 9.

Fonte: GiIraldo, Caetano e Mattos[26], (2012), adaptado pelo autor.

Atividade 6

Problema de Otimização:

De todos os paralelogramos, nos quais as medidas a e b dos lados adjacentes são mantidas fixas, qual é o de maior área?

Atividades complementares

1) Em qual quadrante se tem simultâneamente:

a) $sen\theta > 0$ e $cos\theta < 0$?

b) $sen\theta > 0$ e $tg\theta < 0$?

c) $cos\theta < 0$ e $tg\theta > 0$?

d) $sen\theta < 0$ e $cos\theta > 0$?

2) Para que valores de θ, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se tem:

a) $cos\theta = \frac{1}{2}$

b) $sen\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tg\theta = -\sqrt{3}$

d) $cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Calcule:

a) $sen1935°$

b) $sen\frac{12\pi}{5}$

c) $cos\frac{10\pi}{3}$

d) $tg2460°$

4) Sabendo que $sen\alpha = \frac{1}{4}$ e que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, calcule:

a) $cos\alpha$

b) $tg\alpha$

c) $sen(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

d) $cos(-\alpha)$

5) Esboce o gráfico de cada função real dada, com $0 \leq x \leq 2\pi$, no sistema de coordenadas cartesianas. A seguir, determine:

5.1) as raízes da função;

5.2) o conjunto imagem da função;

5.3) os intervalos de crescimento e decrescimento da função;

5.4) os pontos onde o gráfico intersecta o eixo das abscissas.

a) $f(x) = sen(x)$

b) $g(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $h(x) = 3sen(2x)$

d) $y = tg(x)$

6) [Simave/PROEB/2003- adaptado] A figura 3.20 representa um pista de corrida perfeitamente circular de raio igual a 60 metros. Sobre a mesma foram assinalados um sistema de eixos ortogonais e alguns pontos, conforme a representação.a seguir.

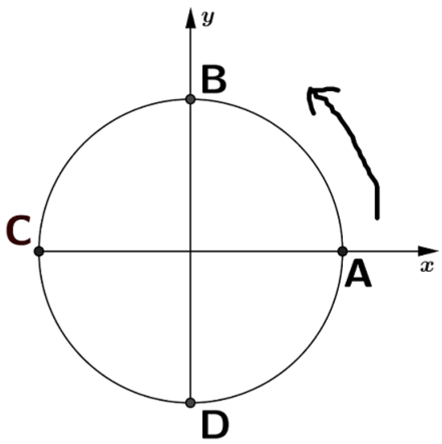


Figura 3.20: Pista de corrida - Fonte: Dados do autor.

Um atleta parte do ponto A, correndo no sentido anti-horário. Ao correr o equivalente a um ângulo de 230°, determine:

a) a posição do atleta na pista, relativa aos pontos assinalados;

b) a distância percorrida pelo atleta;

c) a distância que o atleta ainda deve correr para completar uma volta completa pista.

d) a distância percorrida pelo atleta ao percorrer um arco de $\frac{61\pi}{3}$ radianos.

7) Um móvel realiza um movimento circular, partindo da origem dos arcos no círculo trigonométrico no sistema de coordenadas cartesianas, percorrendo um arco de $-5110°$.

a) Quantas voltas completas esse móvel percorreu nesse círculo?

b) Em qual quadrante ele parou?

c) Qual a 1ª determinação positiva desse arco?

Capítulo 4

Desenvolvimento das atividades

Este capítulo, apresenta uma proposta de desenvolvimento das atividades que compõem este trabalho, quando os alunos envolvidos serão diagnosticados. Estas atividades foram divididas em quatro secções. Na primeira seção, tem-se o teste diagnóstico inicial que se inicia com a sua elaboração, seguido da aplicação e, por fim, a análise dos resultados obtidos pelos alunos envolvidos. Na segunda seção é apresentada uma proposta para a formação dos alunos envolvidos que consitiu na exposição do caderno de atividades e no capítulo 3 deste trabalho. Na terceira seção é apresentada a metodologia usada no desenvolvimento das seis atividades em sala de aula contidas no capítulo 3. Por fim, na última seção é apresentada a aplicação do teste diagnóstico final, onde são descritos os resultados obtidos pelos alunos envolvidos, que visou verificar a eficácia das ferramentas propostas no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica.

Propõe-se que este trabalho fosse desenvolvido na forma de encontros extra turno com duas aulas de 50 minutos cada, uma vez que, na maioria das escolas, o horário de matemática é organizado em módulos de duas aulas de 50 minutos cada. Que este seja realizado em quatro etapas distintas, respectivamente descritas como:

Etapa 1 - Teste diagnóstico inicial.

Etapa 2 - Formação dos alunos envolvidos na pesquisa.

Etapa 3 - Desenvolvimento de atividades.

Etapa 4 - Aplicação do teste diagnóstico final.

4.1 Etapa I - Teste diagnóstico inicial

Esta etapa constituirá na elaboração de questões a partir dos conceitos voltados ao ensino das funções seno, cosseno e tangente na educação básica. Este processo contribuiu para identificar os conhecimentos dos alunos envolvidos sobre a trigonometria, bem como a preparação de uma sequência didática para a pesquisa experimental. Esta etapa realizará-se no primeiroencontro com os alunos.

Conforme Mendes[5], (2009), as avaliações são fundamentais no ensino e aprendizagem, pois seus resultados oferecem subsídios para direcionar a prática pedagógica.

> A avaliação serve de diferentes propósitos relacionados ou não entre si como, por exemplo, fornecer informações sobre o processo ensino-aprendizagem. Todavia, pode-se constituir em uma base para decisões e medidas a tomar a respeito do processo educativo desenvolvido em sala de aula. Os resultados da avaliação servem para informar o próprio aluno, o professor, os pais, a escola e a comunidade acerca do seu progresso nos diferentes domínios da aprendizagem. Além disso, fornecem dados para que o professor avalie o seu próprio desempenho docente, podendo auxiliar na tomada de decisões dos envolvidos (aluno e professor por exemplo), visando modificar ou ajustar o seu modo de estudar (do aluno) ou de planejar o ensino (do professor).(MENDES[5], 2009, p.169)

Elaboração do teste diagnóstico

Na elaboração do teste diagnóstico, teve-se como base os parâmetros do Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública (SIMAVE), livros didáticos. Este teste consta de cinco questões de múltipla escolha com quatro alternativas, que exploram a habilidade de resolver situações-problema no plano euclidiano, envolvendo as razões trigonométricas em triângulo retângulo e identificando a representação gráfica das funções seno, cosseno e tangente. As questões do teste foram elaboradas de acordo com os conteúdos de matemática propostos pelo Currículo Básico Comum (CBC) e pelo PCNs no ensino fundamental e no primeiro ano do Ensino Médio, para que fosse ministrado como uma atividade comum. Este contempla os conteúdos de trigonometria conforme a proposta deste trabalho, composto de cinco questões de mútipla escolha, com quatro opções cada conforme o anexo I.

Aplicação do teste diagnóstico inicial

A aplicação do teste diagnóstico inicial ocorrerá no primeiro encontro com os alunos, A aplicação do teste será dada de forma individual sem consulta e sem qualquer interveção por parte do professor pesquisador, ministrado como uma atividade comum.

Análise dos resultados do teste diagnóstico inicial

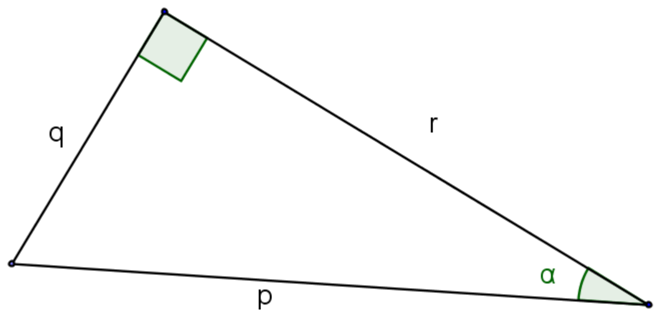
Neste momento, propõe-se que o pesquisador fizesse uma análise do teste diagnóstico, buscando identificar a real situação dos alunos, quanto aos conhecimentos sobre a trigonometria. Os resultados deste teste visam a tomada de decisão para aprimorar os conhecimentos que já existem e acrescentar o que ainda falta, o que possibilitará a definição de ações e metas plausíveis com o objetivo de contribuir com o desempenho do ensino e aprendizagem da trigonometria na edução básica.

Conforme a revista do SIMAVE[14], (2012), os resultados das avaliações servem de orientação do processo de ensino e aprendizagem, buscando práticas bem sucedidas em sala de aula para enfrentar as dificuldades apresentadas pelos alunos.

> Desta forma, os resultados da avaliação devem ser interpretados em um contexto especifico, servindo para a reorientação do processo de ensino, confirmando quais as práticas bem-sucedidas em sala de aula e fazendo com que os docentes repensem suas ações e estratégias para enfrentar as dificuldades de aprendizagem detectadas. A articulação dessas informações possibilita consolidar a ideia de que os resultados de desempenho dos alunos, mesmo quando abaixo do esperado, sempre constituem uma oportunidade para o aprimoramento do trabalho docente, representando um desafio a ser superado em prol da qualidade e da equidade na educação. *(SIMAVE[14], 2012, p.11)*

Esta etapa, realizará uma avaliação individual de cada aluno, analisando o desempenho individual em cada questão, buscando suporte teórico e técnico nas avaliações do Simave, onde avaliam as competências e habilidades desenvolvidas por cada um.

Questão 1) A professora de matemática desenhou no quadro um triângulo retângulo no qual p, q er são as medidas dos seus lados, em centímetros, e α é a medida de um de seus ângulos, em graus, o cosseno do ângulo α é:



(A)$cos(\alpha) = \frac{p}{q}$
(B)$cos(\alpha) = \frac{q}{p}$
(C)$cos(\alpha) = \frac{q}{r}$
(D)$cos(\alpha) = \frac{r}{p}$

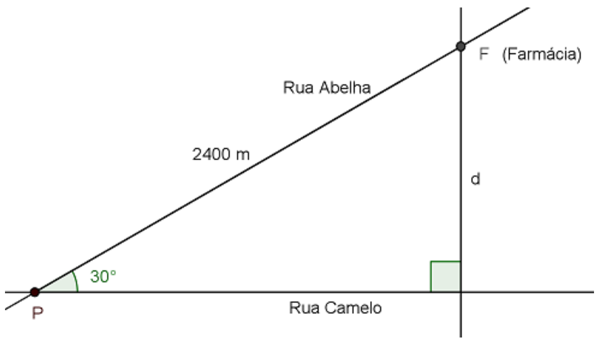
Esta questão avalia a habilidade de resolver situações-problema no plano euclidiano, envolvendo as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, neste caso específico a noção do cosseno de um ângulo como a razão de dois lados do triângulo retângulo. Para resolver esta questão, os alunos devem identificar os lados de um triângulo retângulo, especificando qual é a hipotenusa e quais são os catetos, em seguida aplicar a definição de cosseno do ângulo α.

Conforme a avaliação de matemática do 3° ano do ensino médio - proeb/2011, uma questão idêntica a essa, onde se troca simplesmente a função seno pela função cosseno, que somente 30% dos alunos que fizeram a prova fizeram corretamente esta questão, caracterizando as dificuldades que os alunos concluintes do Ensino Médio têm no ensino das funções seno, cosseno e tangente.

Para esta questão, têm-se que a alternativa correta é a correspondente à letra *D*, pois o lado de medida *p* representa a hipotenusa, enquanto que o lado de medida *r* representa o cateto adjacente do triângulo dado referente ao ângulo indicado. Logo,

$$cos\alpha = \frac{r}{p}.$$

Questão 2) Duas ruas de uma cidade encontram-se em *P* formando um ângulo de 30°. Na rua Abelha, existe uma farmácia *F* que dista $2400m$ de *P*, conforme mostra a ilustração abaixo.



Sabendo que $sen30^\circ = 0,5$, $cos30°\cong 0,86$ e $tg30°\cong 0,68$, a distância *d*, em metros, do ponto *F* à rua Camelo é aproximadamente igual a:

(A)1200

(B)1392

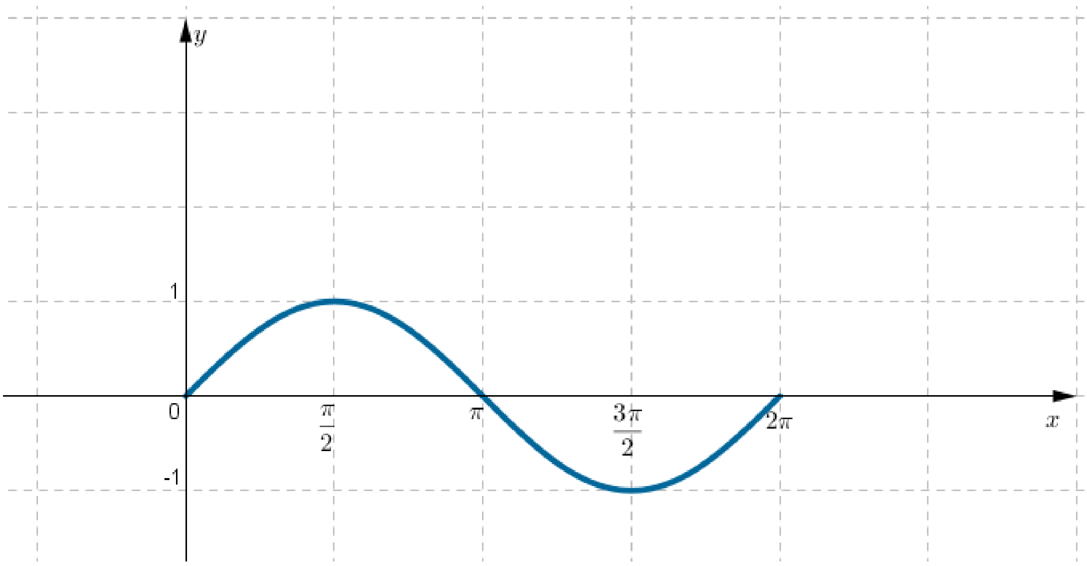
(C)4800

(D)2064

A questão número dois terá como objetivo verificar a habilidade dos alunos em resolver situações-problema no plano euclidiano, envolvendo as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, neste caso específico a noção do uso da razão seno para calcular a medida do cateto oposto de um ângulo agudo, desde que conheça a medida da hipotenusa.

Conforme os dados deste problema têm-se que a alternativa correta corresponde à letra *A*, pois $sen30° = \dfrac{d}{2400} \Rightarrow 0,5 = \dfrac{d}{2400} \Rightarrow d = 0,5 \cdot 2400 = 1200m$. Os alunos que responderem corretamente esta questão mostrarão que já adquiriram habilidades na resolução de situações-problema envolvendo as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Já os alunos que responderem de forma incorreta esta questão mostrarão que tem dificuldades em distinguir a razão seno da razão cosseno e não adquiriram conhecimentos suficientes sobre a trigonometria no triângulo retângulo.

Questão 3) Observe a figura abaixo



A função trigonométrica representada nesse gráfico é:

(A) $y = cosx$

(B) $y = tgx$

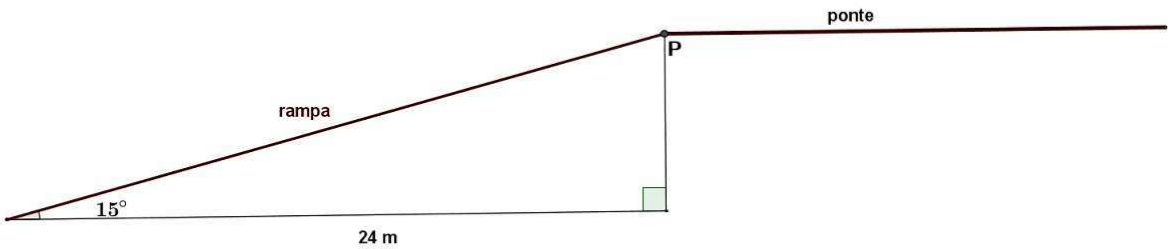
(C) $y = senx$

(D) $y = -senx$

A questão número três terá como objetivo avaliar a habilidade de aplicar as relações das funções trigonométricas no círculo, neste caso identificar a representação gráfica da função seno.

Os alunos que escolherão a resposta correta, a letra *C*, mostrarão que atigiram esta habilidade, enquanto que os alunos que optarão pela alternativa errada, mostrarão que não conseguem determinar a imagem de um número real dada pelas funções seno, cosseno e tangente. Neste caso, basta verificar que a imagem da função está no intervalo $[-1, 1]$, e como a imagem do número real 0 é zero e que a imagem do número real $\frac{\pi}{2}$ é 1, logo, a função dada é $y = senx$.

Questão 4) Um caminhão sobe uma rampa com inclinação de 15° em relação ao plano horizontal. Sabendo-se que a distância horizontal que separa o início da rampa até o ponto P no início de uma ponte mede $24m$, qual é a altura em metros, aproximadamente, dessa ponte, sabendo que ela é paralela ao plano horizontal?



Dados : $sen15° \cong 0,25$, $cos15° \cong 0,96$, $tg15° \cong 0,27$

(A) 6

(B) 23

(C) 25

(D) 96

A questão número quatro, terá como objetivo avaliar a habilidade do aluno de resolver sitações-problema no plano euclidiano, envolvendo as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Neste caso específico, ao se deparar com o cálculo da medida de um lado do triângulo retângulo usando a tangente de um ângulo agudo conhecido.

Como a altura da ponte está representada pelo cateto oposto ao ângulo de medida 15° indicado no triângulo retângulo corforme a figura, e o lado cuja medida é conhecida representa o cateto adjacente ao mesmo ângulo. A função que relaciona as medidas dos catetos é função tangente. Então, sendo h a medida da altura da ponte, tem-se: $tg(15°)=\frac{h}{24} \Rightarrow 0,27 = \frac{h}{24} \Rightarrow h = 0,27x24 = 6,48m$.

Logo, a altura da ponte é aproximadamente igual a $6m$. Portanto, a resposta correta é a letra A.

Acredita-se que os alunos que escolherão a alternativa A, já adiquiriram habilidade neste item, enquanto que os alunos que escolherão a letra D, a dificuldade seja quanto às operações multiplicação e divisão. Os demais não adiquiriram nenhuma habilidade no item desta questão.

Questão 5) A trigonometria é um ramo da matemática que relaciona:

(A) Medidas dos ângulos e medidas dos lados de um triângulo.

(B) Medidas das arestas e medida da área da superfície de um poliedro.

(C) Medida dos lados e medida da área de um quadrado.

(D) Apenas as medidas dos lados de um triângulo.

A questão número cinco tem como objetivo avaliar a habilidade de reconhecer que a trigonometria é um ramo da matemática que estuda as relações entre medidas dos lados e dos ângulos de um triangulo.

Nesta questão cinco, pode-se verificar que os alunos que escolherão a alternativa correta, a opção *A* já tem noção dos elementos de estudo desta ciência, isso mostra que os alunos envolvidos tem algumas noções do que é trigonometria, mas os demais que optarão pelas alternativas erradas, ainda não têm domínio dos elementos de estudo da trigonometria.

Conforme os resultados dos alunos que no teste diagnóstico inicial, pode-se verificar a fragilidade do ensino e apredizagem de trigonometria nas escolas públicas estaduais e municipais de Minas Gerais. Portanto, nos próximos encontros propõe-se uma intervenção por parte do pesquisador, com uma metodologia de ensino diferenciada e com atividades baseadas em situações-problema que possam motivar, despertar o interesse e estimular a imaginação dos alunos, com o objetivo de verificar se as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra poderão ou não auxiliar o ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico na educação básica.

4.2 Etapa 2 - Formação dos alunos

Esta etapa consistirá na exposição dos resumos de conteúdos abordando as funções seno, cosseno e tangente contido no caderno de atividades proposto no capítulo 3 deste trabalho. Este caderno será impresso e distribuído uma cópia para cada aluno envolvido com o propósito de suprir as deficiências dos alunos conforme análise dos resultados do teste diagnóstico inicial.

Aqui, serão feitos empregos das noções e teorias da trigonometria para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia a dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas. As aplicações do conhecimento sobre as funções seno, cosseno e tangente, incluem a resolução de problemas intrigantes que, por meio de desafios, desenvolvem a criatividade, estimulam a imaginação e recompensam o esforço de aprender o conteúdo proposto.

Esta etapa será desenvolvida nos encontros em sala de aula que ocorrerá de forma concomitante com a etapa 3, isto é, após a exposição de um conteúdo, em seguida seriam desenvolvidas as atividades em sala de aula conforme o conteúdo trabalhado.

4.3 Etapa 3 - Desenvolvimento das atividades

Aqui desenvolveu-se as atividades propostas no caderno de atividades do capítulo 3 desta dissertação, denominadas atividades em sala de aula. Esta etapa consiste no desenvolvimento das seis atividades propostas para a sala de aula. Cada atividade é desenvolvida em cada encontro ocorrido e têm como objetivos contribuir com a formação e verificar o desempenho dos alunos envolvidos e averiguar as contribuições que as ferramentas propostas neste trabalho proporcionam no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente.

Atividade 1

Esta atividade é proposta na forma de exercício, usando um tutorial fornecido pelo pesquisador. Com esta atividade os alunos envolvidos no trabalho têm a oportunidade de definir os conceitos das funções seno, cosseno e tangente, verificando que estas funções não dependem das medidas dos comprimentos dos lados do triângulo retângulo e sim, da medida do ângulo agudo α e verificar a validade da proposições 3.8 e dos teoremas 3.9 e 3.11, utilizando o software GeoGebra.

Usando o software GeoGebra, resolva cada item abaixo:

1.1) Defina as funções seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo ABC reto no vértice B verificando o valor de cada função para os ângulos agudos α e β.

1.2) Verifique que estas funções não dependem das medidas dos comprimentos dos lados desse triângulo.

1.3) Mostre a validade da proposição 3.8 e a seguir verificar a relação trigonométrica fundamental I.

1.4) Construa uma tabela com os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos indicados por números inteiros, com duas casas decimais.(seguir a regra de arredondamento).

A seguir, o roteiro para o desenvolvimento da atividade 1 utilizando o software GeoGebra.

Roteiro para o desenvolvimento da atividade 1 no GeoGebra

1. Parâmetro k

Escolha a ferramenta “Controle Deslizante”, clique na janela de visualização gráfica, escolha a opção “Número” e na caixa de texto digite k, na opção “Intervalo” digite mínimo 0 e máximo 10 e clicar em “Aplicar”.

2. Ângulo α

Escolha a ferramenta “Controle Deslizante”, clicar na janela de visualização gráfica, escolha a opção “Ângulo” e na caixa de texto digite α, na opção “Intervalo” digite mínimo 1° e máximo 89° e clique em “Aplicar”.

3. Ponto A

Escolha a ferramenta “Novo Ponto” e clique na janela de visualização gráfica, criando o ponto A. Propriedade deste ponto: na aba “Básico” habilite a opção “Fixar Objeto”.

4. Ponto B

Escolha a ferramenta “Círculo Dados Centro e Raio” clique no ponto A e digite k na caixa de texto da opção “Raio” que surgiu e clique em “Ok”, criando um círculo de centro em A e raio igual ao número k. Em seguida escolha a ferramenta “Novo Ponto”e clique no círculo, criando o ponto B pertencente ao círculo. Depois em propriedades do círculo, na aba “Básico” desabilite as opções “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo”.

5. Segmento AB

Escolha a ferramenta “Segmento Definido Por Dois Pontos” clique nos pontos A e B criando o segmento AB. Propriedades deste segmento na aba “Cor” escolher a cor azul e na aba “Estilo” escolha a espessura da linha 9, e na aba “Básico” na opção “Exibir Rótulo” escolher a opção “Nome”. Clique com botão direito do mouse e em “Renomear” digite *c* na caixa de texto que surgiu.

6. O ponto C

Escolha a ferramenta “Reta Perpendicular”clicar no ponto B e no segmento AB, criando a reta perpendicular ao segmento AB no ponto B. Escolha a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” clique no ponto B e depois no ponto A e digite α na caixa de texto na janela de entrada “Ângulo que surgiu” e clique em “Ok” surgindo um terceiro ponto. Em seguida, escolha a ferramenta “Semirreta Definida Por Dois Pontos” clique nos pontos A e no terceiro ponto, criando a semirreta com origem no ponto A. Escolha a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” clique na semirreta com origem no ponto A e na reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto B. Clicar com o botão direito do Mouse e escolha a opção “Renomear” digitar “C” na caixa de texto que surgiu, obtendo o ponto C.

7. Esconder os objetos:

Clique na semirreta com origem no ponto A, propriedade desta semirreta, na aba “Básico” desabilite as opções “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo”. Clique na reta perpendicular ao segmento AB passando por B, Propriedade desta reta , na aba “Básico” desabilitar as opções “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo”. Clique no terceiro ponto, propriedade deste ponto, na aba “Básico” desabilite as opções “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo”.

8. Segmento AC

Escolha a ferramenta “Segmento Definido Por Dois Pontos”Clique nos ponto A e C, obtendo o segmento AC. Propriedades deste segmento na aba “Cor” escolha a cor preta, na aba “Básico” na opção “Exibir Rótulo” escolha a opção “Nome”. Clicando com o botão direito do mouse escolha a opção “Renomear” digite b na caixa de texto que surgiu.

9. Segmento BC

Escolha a ferramenta “Segmento Definido Por Dois Pontos”Clique nos pontos B e C, obtendo o segmento BC. Propriedades deste segmento, na aba “Cor” escolha a cor vermelha, na aba “Básico” na opção “Exibir Rótulo” escolha a opção “Nome” e na aba “Estilo” escolha a opção da linha 9. Clicando com o botão direito do mouse escolha a opção “Renomear” digite a na caixa de texto que surgiu.

10. Ângulo ACB

Escolha a ferramenta “Ângulo” clique no ponto A, depois no ponto C e por último em B, com o botão direito do mouse escolha a opção “Renomear”, digitando β na caixa de texto. Propriedade deste ângulo na aba “Básico” e na opção “Exibir Rótulo” escolha a opção “Nome”.

11. Ângulo BAC

Clique no ângulo BAC em “propriedade” deste ângulo na aba “Básico” na opção “Exibir Rótulo” escolha a opção “Nome”.

12. Ângulo ABC

Escolha a ferramenta “Ângulo” clicar no ponto A, depois no ponto B e por último em C, Propriedade deste ângulo na aba “Básico” desabilite a opção “Exibir Rótulo”.

13. Definindo números na janela algébrica

Na janela “Entrada” digite os números

$m = a/b$ e depois digite Enter.

$n = c/b$ e depois digite Enter.

$p = a/c$ e depois digite Enter.

$q = c/a$ e depois digite Enter.

$r = m^2 + n^2$ e depois digite Enter.

sen(α)=$\frac{a}{b}$ e depois digite Enter.

cos(α)= $\frac{c}{b}$ e depois digite Enter.

tg(α)= $\frac{a}{c}$ e depois digite Enter.

tg(β)= $\frac{c}{a}$ e depois digite Enter.

14. Inserindo textos na janela de visualização gráfica

14.1) $\alpha = 42°$

Escolha a ferramenta “Inserir Texto” clique na janela de visualização gráfica, habilitar a opção “Formula LaTeX”, na caixa de texto “Editar” digite α(escolha na aba “Símbolo” a opção “Básico”) = α(escolha na aba “Objetos” selecione α) e clicar em “Ok”.

14.2) $\beta = 90° - \alpha = 48°$

Escolha a ferramenta “Inserir Texto” clique na janela de visualização gráfica, habilitar a opção “Formula LaTeX”, na caixa de texto “Editar” digite β(escolha na aba “Símbolo”) a opção “Básico”) = 90°- α(escolha na aba “Símbolo” a opção “Básico” selecione α)= β(escolha na aba “Objetos” e selecione β) e clicar em “Ok”.

14.3) $sen(\alpha) = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{a}{b} = \frac{3.96}{5.92} = 0.67$

Escolha a ferramenta “Inserir Texto” clique na janela de visualização gráfica, habilite a opção “Fórmula LaTeX”, na caixa de texto “Editar” digite
sen (α)=$\frac{medida do cateto oposto a \alpha}{medida da hipotenusa}$ (na aba “Formula LaTeX”escolha a opção “Raízes e Fração” e clicar em $\frac{a}{b}$), entre chaves, no lugar de *a* escreva **medida do cateto oposto a** α e no lugar de *b* digite **medida da hipotenusa** digite “=”$\frac{a}{b}$ (na aba “Formula LaTeX”escolha a opção “Raízes e Fração” e clique em $\frac{a}{b}$)digite “=” $sen\alpha$(escolha na aba “Objetos” e selecione $sen\alpha$) digite “=” m (escolha na aba “Objetos” e selecione *m*) e clique em “Ok”.

Assim, pretendemos que os alunos envolvidos obtenham a solução na janela de visualização gráfica do GeoGebra, conforme a figura 4.1

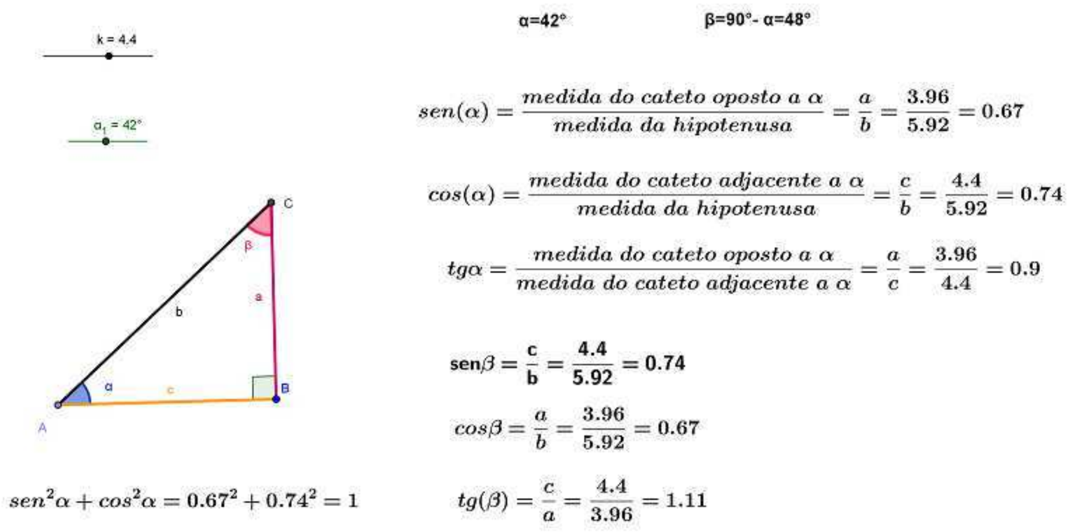


Figura 4.1: Ilustração da atividade 1 construída no GeoGebra - Fonte: Dados do autor.

15. Movendo os parâmetros *k* e α

Escolha a ferramenta “Mover” e arraste o parâmetro k, os alunos observarão que à medida que se movimenta esse número, percebe-se que as medidas dos comprimentos dos lados variam para mais ou para menos, mas os valores das funções seno, cosseno e tangente não variam, desta forma comprova-se que as funções seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo não depende das medidas dos comprimentos dos lados desse triângulo.

Agora movimentando o parâmetro α, percebe-se que à medida que se varia o valor de α, também variam os valores das funções seno, cosseno e tangente, comprovando que as funções seno, cosseno e tangente dependem somente do valor do ângulo agudo.

Percebe-se também que os ângulos agudos de qualquer triângulo retângulo são complementares, pois sempre a soma destes ângulos é igual a 90° e verificam que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do outro ângulo agudo e vice versa e que a tangente de um é igual ao inverso da tangente do outro. Verifica-se também através do modo de arrastar o parâmetro α que sempre a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um mesmo ângulo agudo é sempre igual a 1 comprovando assim a validade da relação trigonométrica fundamental I.

Por fim, ainda arrastando o parâmetro α, virão que seria possível construir uma tabela com os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulo agudos. mas como essa atividade ia demandar mais tempo , eles fizeram apenas uma observação, deixando essa tarefa para uma outra oportunidade.

Este exercício possibilita os alunos verificarem que:

1) Dois ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares $(\alpha + \beta = 90°)$.

2) A proposição 4.2 ($sen\alpha = cos\beta$) e ($tg\alpha = 1/tg\beta$) é verdadeira.

3) A relação trigonométrica fundamental I ($sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$) é verdadeira.

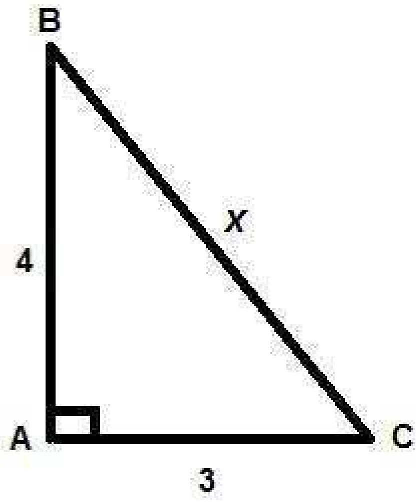
4) É possível construir a tabela trigonométrica com os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos.(1°, 2°, 3°, ... , 89°).

Atividade 2

Esta atividade visa a fixação dos conteúdos estudados, resolver situações-problema envolvendo as funções seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, utilizando as ferramentas calculadora científica, o software GeoGebra, teodolito e outras ferramentas como a trena[1]

2.1) **Determine o valor da medida x na figura abaixo, a seguir, calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$. A seguir, usando a calculadora científica determine o valor aproximado em graus, das medidas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.**

[1] Instrumento para medir comprimento



Solução:

O triângulo ABC é retângulo em A, onde os lados AC e AB são os catetos e o lado BC é a hipotenusa. Logo, aplicando o teorema de Pitágoras tem-se:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Rightarrow x^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$, mas como x representa a medida do lado de triângulo, então $x = 5$.

$sen(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3}{x} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $sen(A\hat{C}B) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4}{x} = \frac{4}{5}$

$cos(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4}{x} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $cos(A\hat{C}B) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3}{x} = \frac{3}{5}$

$tg(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $tg(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{4}{3}$.

Para determinar as medidas, em graus, dos ângulos agudos ABC e ACB, com auxílio da calculadora científica utilizando as teclas destinadas às funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas.

Neste caso, como $sen(A\hat{B}C) = \frac{3}{5}$ então,

$A\hat{B}C = \hat{a}ngulo\, cujo\, seno\, \acute{e}\, \frac{3}{5} \cong 36,87° \Rightarrow A\hat{B}C \cong 37°$

Para obter esses valores, basta digitar na calculadora científica o número $\frac{3}{5}$, aperte a tecla "$SHIFT$" de função inversa e aperte a tecla "sin", aparecendo no visor da calculadora o número $36,869897\ldots$, assim, adota-se $A\hat{B}C \cong 37°$.

Como $sen(A\hat{C}B) = \frac{4}{5}$ então,

$A\hat{C}B = \hat{a}ngulo\, cujo\, seno\, \acute{e}\, \frac{4}{5} \cong 53,13° \Rightarrow A\hat{C}B \cong 53°$.

Para obter esses valores, basta digitar na calculadora o número $\frac{4}{5}$, aperte a tecla "$SHIFT$" de função inversa e aperte a tecla "sin", aparecendo no visor da calculadora o número $53,130102\ldots$, assim, adota-se $A\hat{C}B \cong 53°$.

No desenvolvimento desta atividade, pretende-se que os alunos utilizem o software GeoGebra com o objetivo de comprovar os resultados obtidos com a calculadora. Assim, utilizando o GeoGebra os alunos construirão o triângulo retângulo ABC, reto em A cujos catetos $\overline{AB} = 4$ e $\overline{AC} = 3$, poderão fazer a comparação dos resultados obtidos na calculadora científica com os obtidos usando o software GeoGebra, confirmando os resultados. Nesta atividade utilizando mais de uma ferramenta para obter o resultado, poderá gerar muitos questionamentos por parte dos alunos, tais como:

"**O valor de x será sempre 5?**" Para esta pergunta, uma possível resposta do pesquisador seria sim, pois o triângulo é retângulo, e as medidas dos catetos são fixadas conforme o problema.

"**Se a medida de somente um dos cateto fosse dada teria mais possibilidades para o valor de x**?" Novamente, uma possível resposta seria sim, desde que atenda as condições de existência de um triângulo e o teorema de Pitágoras já garante estas possibilidades. Com esta situação, o pesquisador poderá solicitar dos alunos que façam esta comprovação usando o próprio GeoGebra. A figura 4.2 mostra uma possível solução que um aluno utilizando o software GeoGebra poderá obter.

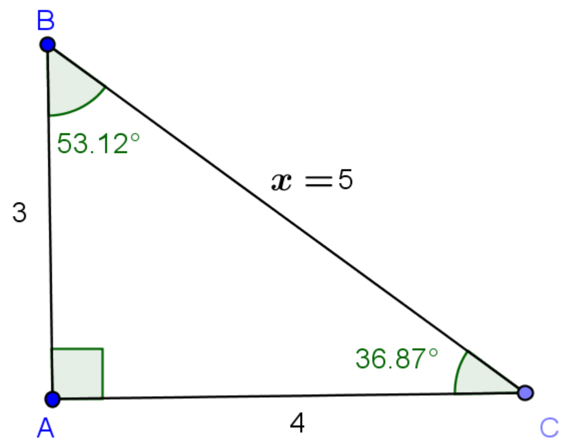


Figura 4.2: Resolução da atividade 2 item 1 no GeoGebra - Fonte: Dados do autor.

2.2) **Determinar as medidas dos lados e as medidas dos ângulos agudos de alguns triângulos retângulos existentes nas construções da dependência da escola.**

Neste exercícios propõe-se que seja disposto para os alunos, calculadora científica e trena para medir comprimento dos lados dos triângulos, existentes nas construçõesdas dependências da escola, escolhidos pelos alunos.

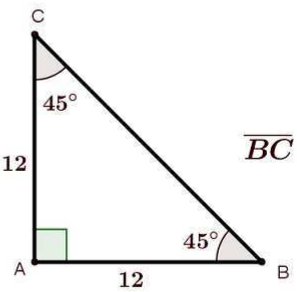
O pesquisador poderá propor que os alunos desenvolvam esta atividade em grupos, onde eles distribuíram em quatro grupos e cada grupo apresentará uma situação diferente.

Esta poderá ser uma situação apresentada por um dos grupos

Figura 4.3: Triângulo retângulo na estrutura da quadra de esporte da escola - Fonte: Dados do autor.

Nesta questão poderá havermaior interação entre os alunos, questionamentos, identificação de triângulos retângulos no espaço físico da escola e a determinação do modelo matemático desta situação-problema. Após definirem o triângulo retângulo escolhido, será o momento dos alunos aplicarem os conhecimentos adquiridos, o uso da trena para medir comprimento dos lados dos triângulos, o uso do teorema de Pitágoras para definir a medida do terceiro lado e o uso da calculadora científica para o cálculo das medidas dos ângulos agudos do triângulo retângulo escolhido.

Na figura 4.4 é apresentada uma possível solução que representa a situação problema apresentada na figura 4.3, usando o software GeoGebra.



$$\overline{AB} = 12\,dm = 1,2\,m$$

$$\overline{AC} = 12\,dm = 1,2\,m$$

$$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{144 + 144} = \sqrt{288} = 16,97\,dm \stackrel{\sim}{=} 1,7\,m$$

$$\hat{B} = 45^\circ$$

$$\hat{C} = 45^\circ$$

Figura 4.4: Modelo matemático do triângulo da figura 4.3 no GeoGebra - Fonte: Dados do autor

Aqui, os alunos podem comprovar o cálculo que realisaram manualmente, usando a geometria dinâmica, desenvolvendo assim habilidade e conhecimento quanto a esta situação-problema.

2.3) Cálculo de medidas inacessíveis[2]

Para as situações-problema que visam calcular medidas inacessíveis será necessário o uso do teodolito caseiro.

Calcular a medida da altura da palmeira conforme a figura 4.5.

Figura 4.5: Palmeira - Fonte: Dados do autor

Nesta situação, a medida da altura da palmeira é uma medida inacessível. Para calcular esta medida pode-se recorrer aos conhecimentos adquiridos sobre as funções seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, uma vez que a altura de uma árvore é representada por um segmento perpendicular à horizontal.

Para medir a altura da palmeira utilizando o teodolito, primeiramente posicione o teodolito em uma mesa plana e aponte para a palmeira. Em seguida, coloque o ponteiro do teodolito em 0°(zero grau) e, olhando na mira, marque um ponto P na palmeira. Meça a distância d entre o teodolito e o ponto P e a medida $h_1$entre a base da palmeira e o ponto P. Levante a mira até avistar o ponto A (ponto mais alto da palmeira) e anote o ângulo (θ) indicado no transferidor. Com essas informações, e utilizando os conhecimentos adquiridos sobre as funções seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, a altura da palmeira é representada por um segmento perpendicular à horizontal.

[2] De acordo com o dicionário da Língua Portuguesa *Bechara [22],(2011)* a palavra inacessível é um adjetivo e se refere ao que não se pode ter acesso.

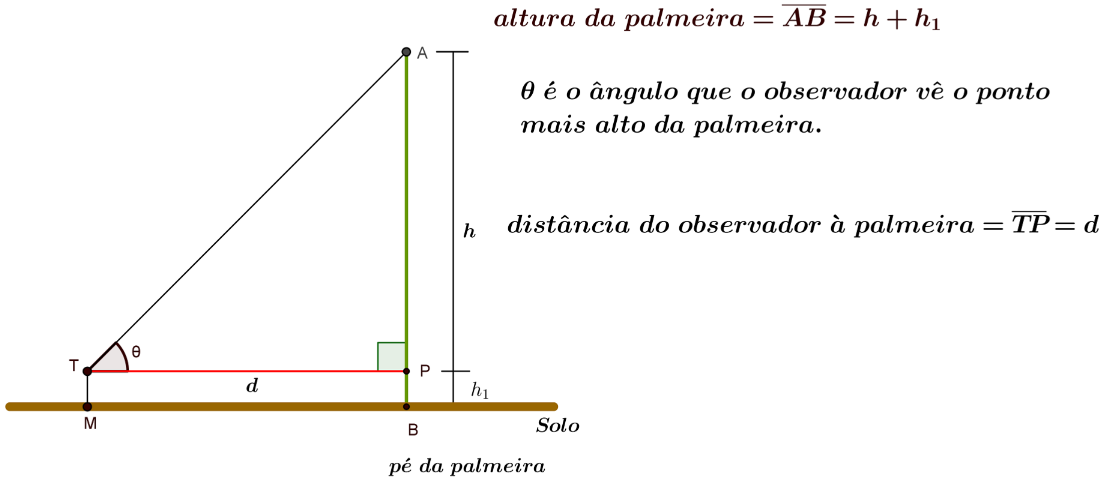


Figura 4.6: Como utilizar o teodolito caseiro - Fonte: Dados do autor.

Assim, mostra-se para os alunos como utilizar o teodolito caseiro nesta situação, lembrando-se que o teodolito é um instrumento usado para medir ângulos tanto na horizontal como na vertical. Nessa situação, irá ajudar na determinação do ângulo em que um observador situado a uma distância *d* da palmeira consegue enxergar o ponto *B* mais alto da palmeira conforme a figura 4.7. Modelando matematicamente este problema, depara-se com um triângulo retângulo, em que a altura da palmeira representa o cateto oposto ao ângulo do observador e a distância *d* do observador à palmeira estará representando o cateto adjacente, conforme o modelo abaixo figura 4.7.

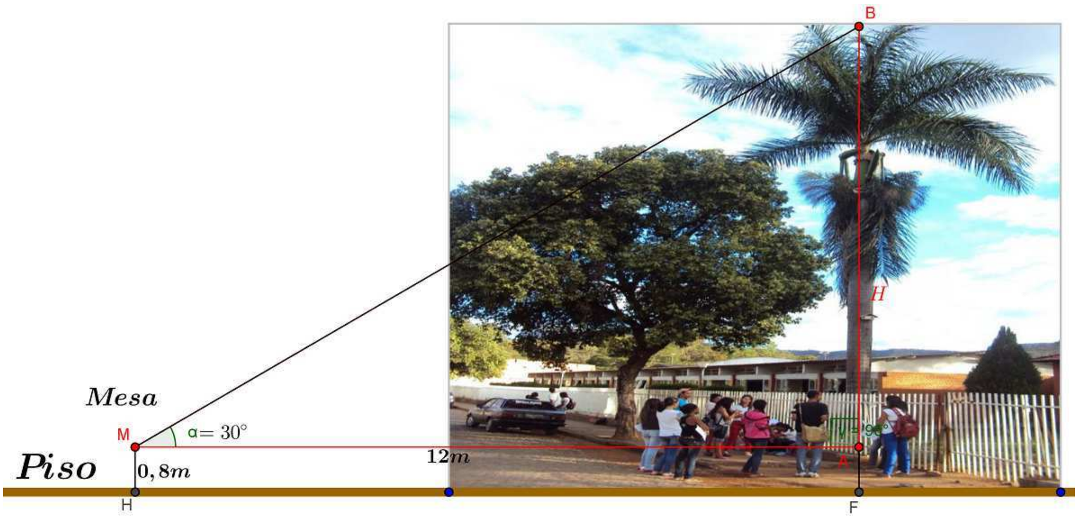


Figura 4.7: Modelo matemático no cálculo da medida da altura da palmeira - Fonte: Dados do autor.

Após o modelo matemático da situação problema, usando a calculadora científica e ou a tabela dos valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, os alunos poderão calcular a medida h da altura da palmeira e para isso recorrerão à razão tangente.
$tg30° = \frac{H}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{12} \Rightarrow H = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}m$. Portanto a altura ($h$) da palmeira é a soma

$H + \overline{AF} = (14\sqrt{3} + 0,80)$ *metros*. Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, então $h = 4.1,7 + 0,8 = 7,6$ m.

Resposta: a altura da palmeira mede aproximadamente $21,2$ **metros.**

Vale ressaltar que para esta atividade os alunos poderão resolver esta situação-problema usando o teodolito caseiro com ângulos de observação diferentes de 30°, encontrando valores diferentes para a altura da palmeira. Mas os valores obtidos poderão ser bem próximos do valor obtido sob o ângulo de visão do modelo da figura 4.8. Esta diferença nos valores devem~se à falta de precisão nos instrumentos utilizados.

Com a realização das atividades 1 e 2, espera-se que haja motivação e interesse por parte dos alunos sentindo-se estimulados a aprender. Conforme Selbach[6], (2010), a aprendizagem através de situações-problema é uma atividade estimulante e atraente em função do confronto entre as representações dos alunos e do conjunto de dispositivos didáticos que implica na reelaboração dessas representações, potencializada pela imposição de um interessante conflito cognitivo.

Atividade 3

Esta atividade terá como objetivos desenvolver nos alunos a capacidade de localização no plano de coordenadas cartesianas, identificar o sinal das funções seno cosseno e tangente no círculo trigonométrico, calcular o valor do seno, cosseno e tangente de um arco no círculo trigonométrico e utilizar as ferramentas prancha trigonométrica e o software GeoGebra no ensino das funções circulares.

3.1) **Em que quadrante se tem simultaneamente**:

a) $sen\theta < 0$ e $cos\theta < 0$?

b) $sen\theta > 0$ e $tg\theta > 0$?

c) $cos\theta > 0$ e $tg\theta > 0$?

3.2) **Calcule:**

a) $sen300°$

b) $cos210°$

c) $tg1845°$

Solução da atividade 3

Para a solução das atividades 3.1 os alunos poderão encontrar muita facilidade quando utilizarem a prancha trigonométrica , pois ao movimentarem a parte transparente, conseguiram ver quando as funções são negativas e quando são positivas. facilitando assim a identificação do quadrante conforme o exercício.

3.1 a) Como $sen\theta < 0$, logo $\pi < \theta < 2\pi$e como também$cos\theta < 0$, logo $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ assim, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Portanto, θ está no terceiro quadrante.

3.1 b) Como $sen\theta > 0$, logo $0 < \theta < \pi$e como também$tg\theta > 0$, logo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Portanto, θ está no primeiro quadrante.

3.1 c) Como $cos\theta > 0$, logo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$e como também$tg\theta > 0$, logo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Portanto, θ está no primeiro quadrante.

Para resolver as atividades do item 3.2, os alunos poderão utilizar a prancha trigonométrica e a calculadora científica. Na calculadora científica os resultados obtidos estarão na forma de números decimais, enquanto que na prancha trigonométrica estarão na forma de fração. Mas, no item *c*, onde pede $tg1845°$, a maioria dos alunos terão dúvidas quanto à utilização da prancha trigonométrica, pois nela existem arcos até 360°. Neste caso, provavelmente, haverá alguns questionamentos que poderão ser resolvidos entre eles, sem a interferência do professor pesquisador. Nesse, faz-se a definição de arcos côngruos no círculo trigonométrico.

3.2 a) $sen300°= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Figura 4.8: Foto resolução da atividade 3.2 item **a** usando a prancha trigonométrica - Fonte: Dados do autor

3.2 b) $cos210° =-\frac{\sqrt{3}}{2}$

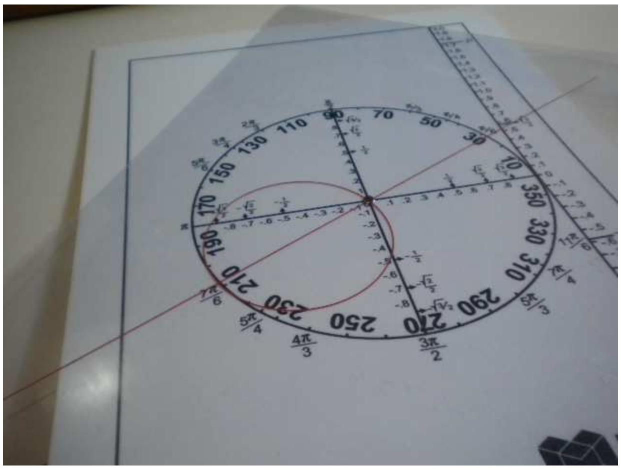


Figura 4.9: Foto da resolução da atividade 3.2 item **b** usando a prancha trigonométrica - Fonte: Dados do autor

3.2 c) $tg1845° = tg45°$=1

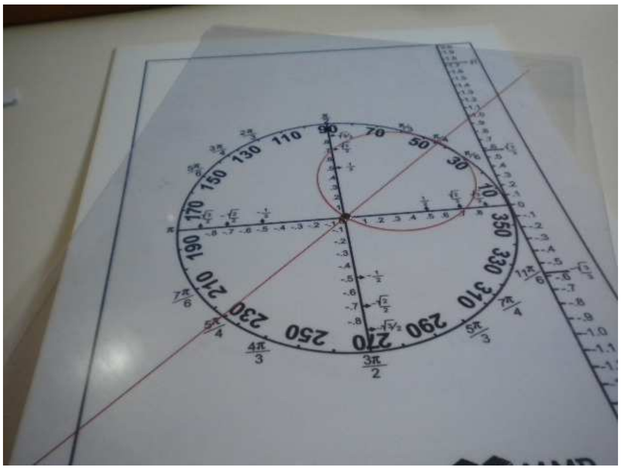


Figura 4.10: Foto da resolução da atividade 3.2 item **c** usando a prancha trigonométrica - Fonte: Dados do autor

Atividade 4

4.1) Usando o software GeoGebra, esboce os gráficos das funções f e g no mesmo sistema de coordenadas cartesianas identificando-os usando cores diferentes. A seguir anote suas observações sobre o comportamento desses gráficos:

a) $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(2x)$

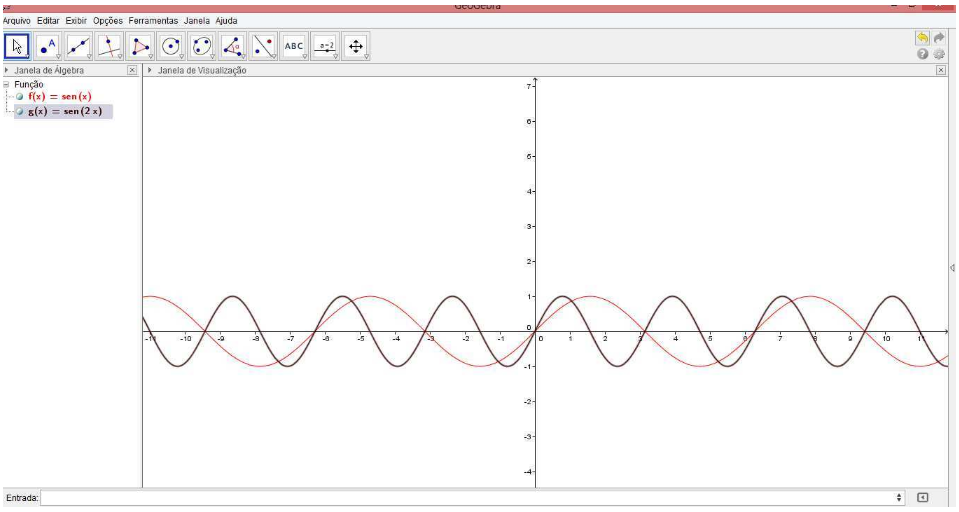


Figura 4.11: Ilustração da solução da atividade 4.1 item a - Fonte: Dados do autor.

Esta atividade terá como objetivos identificar o gráfico da função seno e de suas transformadas, bem como avaliar, comparar e determinar os elementos básicos destas funções, tais como: as raízes, os períodos e os intervalos de crescimento e decrescimento.

b) $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = 2 + 2cos(2x + 2)$

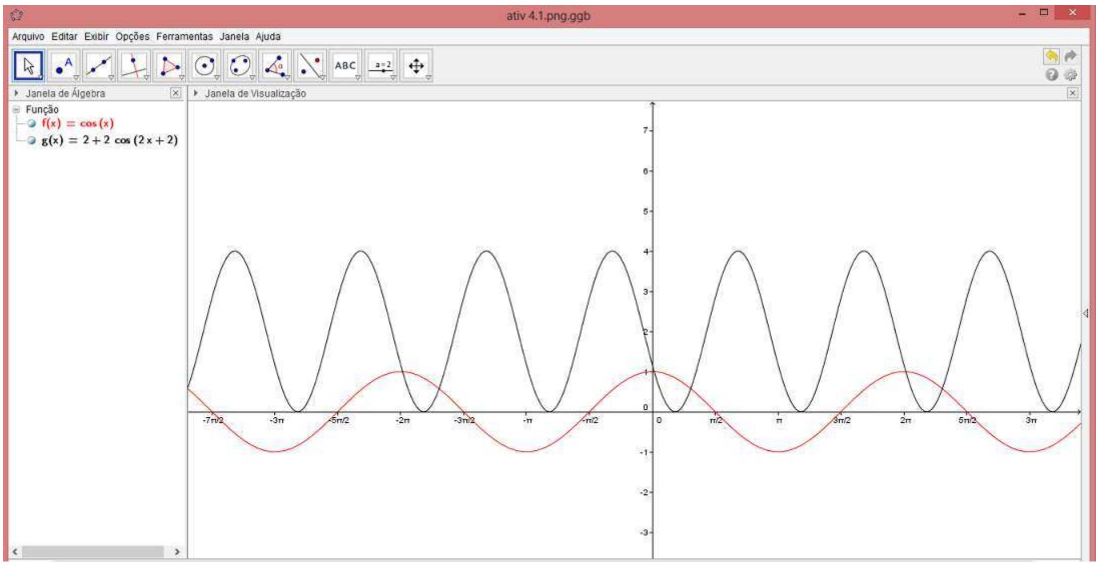


Figura 4.12: Solução da atividade 4.1 item b -Fonte: Dados do autor.

Esta atividade terá como objetivos identificar o gráfico da função cosseno e de suas transformadas, bem como avaliar, comparar e determinar os elementos básicos destas funções, tais como: as raízes, os períodos, intervalos de crescimento e decrescimento.

4.2) Usando o software GeoGebra, esboce o gráfico da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$, anotando em seu caderno o que acontece com o gráfico da função quando variamos cada um dos parâmetros **a**, **b**, **c** e **d**

Roteiro para o desenvolvimento da atividade 4.2

1. Escolha a ferramenta “Controle Deslizante” clique na janela de visualização gráfica e crie os números **a**, **b**, **c** e **d**

Propriedade desses números mínimo -5 e máximo 5.

2. Digite na janela “Entrada” a função $f(x) = a + b * sen(c * x + d)$ e enter

3. Selecione a ferramenta “Mover” arraste cada um dos parâmetros a, b, c e d

Solução:

Esta atividade tem como objetivo estudar as variações do gráfico da função seno de acordo com a variação de cada parâmetro dado.

Quanto a esta atividade, acredita-se que os alunos não terão dificuldades no seu desenvolvimento, mas alguns poderão ter dificuldades na avaliação das variações do gráfico, quanto às variações dos parâmetros.

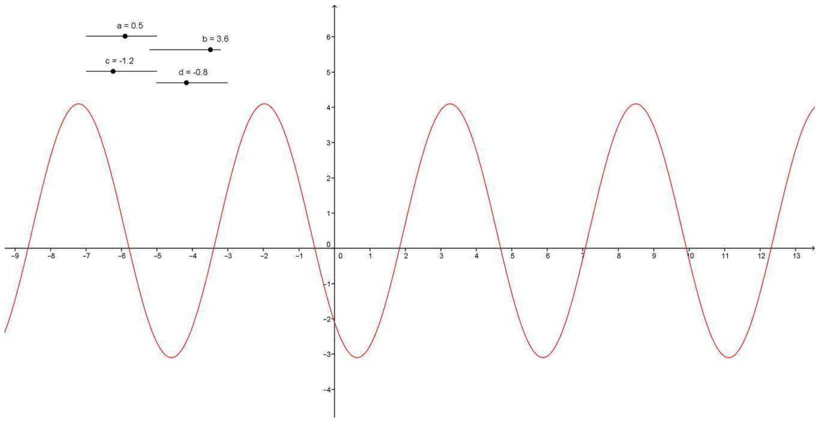


Figura 4.13: Ilustração da atividade 4.2 - Fonte: Dados do autor.

Pode-se observar que, nesta atividade, quando arrasta o parâmetro *a* o gráfico da função sofre uma translação na vertical. Quando varia o parâmetro *b*, o gráfico da função sofre um achatamento horizontal, aproximando-se de uma reta, quando *b* aproxima-se de zero,mas que os valores continuam maiores que zero ou quando os valores de *b* estão cada vez mais próximos de zero mas menores que zero. Observa-se também que o intervalo de crescimento ou decrescimento da função inverte quando *b* muda de sinal (negativo para positivo e vice versa). O parâmetro *c* altera o período da função enquanto que o parâmetro *d* provoca uma translação na horizontal.

Atividade 5

Desenrolando o seno.

Esta atividade terá como objetivo ensinar para os alunos o conceito de radiano. Conforme *Giraldo, Caetano e Mattos[26],(2012)*, ensinar o conceito de radiano não é um tarefa muito fácil. Muitos alunos saem do Ensino Médio sem qualquer percepção intuitiva de medidas angulares em radianos. Esse fato pode ser verificado, solicitando aos alunos que representem medidas angulares em graus e em radianos por meio de aberturas com os braços, provavelmente, eles não terão dificuldades para representar uma abertura de 60°, por exemplo, mas não terão ideia de como abrir os braços para indicar 1 radiano.

O aplicativo desenrolando o seno, permite relacionar graus com radianos e ao mesmo tempo, desenrolar arcos no eixo horizontal para traçar o gráfico da função seno. A geometria dinâmica do aplicativo desenrolando o seno dá-se pelo movimento do ponto P sobre o eixo horizontal, desde a origem até o ponto A de abscissa igual a 2π. A seguir, digitando os comandos na janela de entrada no GeoGebra, tem-se os passos para a construção do aplicativo desenrolando o seno.

Passos para a construção do aplicativo desenrolando o seno

1.$O = (0,\ 0)$
Propriedade desse ponto: na aba básico habilitar a opção Fixar Objeto.
2. $C = (-1,\ 0)$
Propriedade desse ponto: na aba básico habilitar a opção Fixar Objeto.
3. $c = Círculo[C,\ O]$
Propriedade desse círculo: na aba básico desabilitar Exibição de Rótulo, na aba estilo mudar o estilo da linha para tracejado.
4. $A = (2pi,\ 0)$
Propriedade desse ponto: na aba básico habilitar a opção Fixar Objeto.
5. $P = Ponto[Segmento[O,\ A]]$
Propriedades desse ponto: na aba cor escolher vermelho, na aba estilo escolher Espessura da Linha 5; movimente esse ponto sobre o eixo horizontal até a abscissa 1.
6. $radiano = Segmento[O\ P]$
Propriedades desse segmento: na aba básico em Exibir Rótulo escolher a opção valor, na aba cor escolher verde escuro, na aba estilo escolher Espessura da Linha 9.
7. $Q = Girar[O,\ radiano,\ C]$
Propriedade desse ponto: na aba cor escolher vermelho.
8. $grau = \hat{A}ngulo[O,\ C,\ Q]$
Propriedades desse ângulo: na aba básico em Exibir Rótulo escolher a opção valor, na aba estilo escolher tamanho 50.
9. $cc = Arco[c,\ Q,\ O]$
Propriedades desse arco: na aba básico desabilitar Exibir Rótulo, na aba cor escolher verde escuro, na aba estilo escolher Espessura da Linha 9.
10. $h = Reta[Q,\ EixoX]$
Propriedades dessa reta: na aba básico desabilitar Exibir Rótulo, na aba estilo escolher Estilo da Linha pontilhado.
11. $v = Perpendicular[P,\ EixoX]$
Propriedades dessa reta: na aba básico desabilitar Exibir Rótulo, na aba estilo escolher Estilo da Linha pontilhado.
12. $seno =$Função$[sin(x), x(O), x(A)]$
Propriedades desse gráfico: na aba cor escolher vermelho, na aba estilo escolher Espessura da Linha 9.

Fonte: GiIraldo, Caetano e Mattos[26], (2012), adaptado pelo autor.

Desenvolvendo a atividade desenrolando o seno.

Antes da apresentação desta atividade, os alunos envolvidos com o trabalho poderão ser questionados pelo professor pesquisador:

1. Vocês conseguem somente erguendo o braço direito representar um ângulo de 60°? Alguém é capaz de fazer esta representação para o grupo?

2. Alguém consegue, também erguendo o braço direito representar um ângulo de 1 radiano?

Neste momento o pesquisador apresentará a atividade desenrolando o seno para os alunos, juntamente com o tutorial para o desenvolvimento desta atividade usando o software GeoGebra

Após o desenvolvimento desta atividade no ambiente do GeoGebra seguindo o roteiro proposto, os alunos serão orientados utilizar a ferramenta "Mover" do GeoGebra com o objetivo de arrastar o ponto P sobre o segmento OA contido no eixo das abscissas, assim construirá o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ no intervalo $[0,\ 2\pi]$. Depois que os alunos brincarem bastante arrastando o ponto P, novamente poderão ser questionados pelo professor pesquisador.

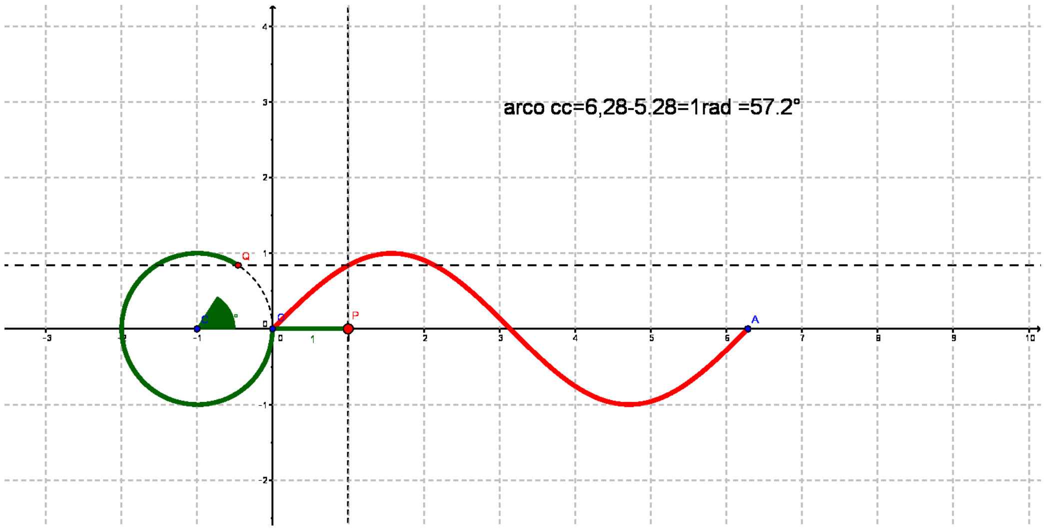


Figura 4.14: Atividade desenrolando o seno no GeoGebra com a distância da escala do eixo x igual a 1 - Fonte: Dados do autor.

1. A quantos graus corresponde 1 radiano?

Nesta pergunta, espera-se que os alunos respondam corretamente $57,2°$ com muita rapidez.

2. E 2 radianos correspondem a quantos graus?

Neste momento, espera-se que todos os alunos respondam $114,68°$, identificando que grau e radiano são grandezas diretamente proporcionais.

Ainda, pode-se propor para os alunos que mudem a distância da escala do eixo x para $\frac{\pi}{2}$ conforme a figura 4.15. A seguir o professor pesquisador poderá, novamente, questionar os alunos:

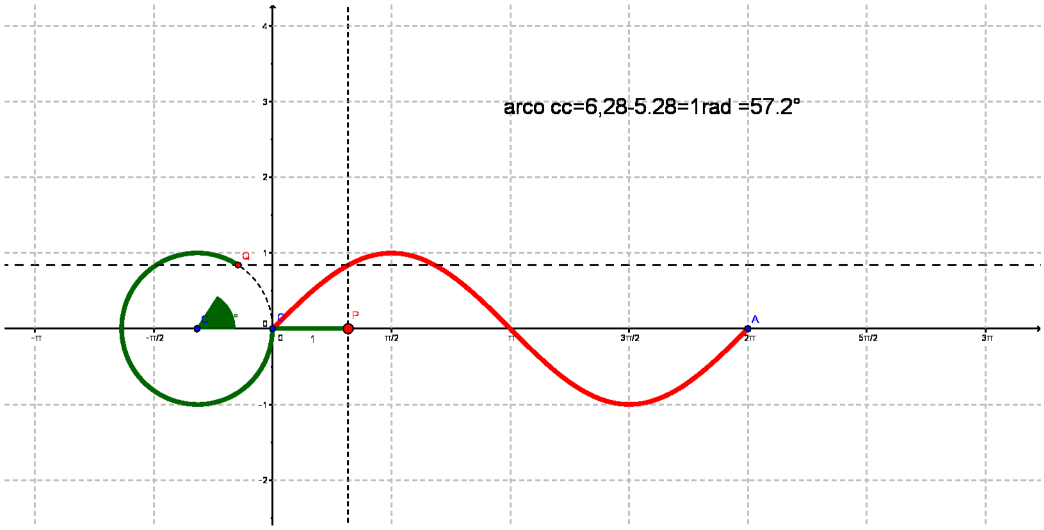


Figura 4.15: Atividade desenrolando o seno no GeoGebra com a distância da escala do eixo x igual a $\frac{\pi}{2}$ - Fonte: Dados do autor.

A quantos graus correspondem $\frac{\pi}{2}$ radianos? E π radianos correspondem a quantos graus?

Espera-se que todos os alunos respondam com facilidade a estas perguntas, pois observando o gráfico no ambiente gráfico do GeoGebra poderão verificar que quando o ponto P coincide com $\frac{\pi}{2}$ no eixo das abscissas, a medida do arco cc corresponde a 180°. Assim, os alunos observarão que dobrando a medida em radianos, dobra também a medida em graus.

Com esta atividade, espera-se que haja bastante interação dos alunos com o conteúdo, onde o professor pesquisador poderá explorar outras questões além da relação entre grau e radiano, tais como:

Qual é conjunto imagem da função $f(x) = sen(x)$?

Esperamos que os alunos darão como resposta o intervalo $[-1, 1]$ pois a reta paralela ao eixo das abscissas que contém o ponto Q realiza um movimento na vertical, atingindo o valor máximo igual a 1 e mínimo igual a -1.

No intervalo $[0, 2\pi]$, quais são os zeros desta função?

Nesta questão espera-se que os alunos percebam que os valores de x que anulam a função são $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$. Portanto, $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ são os zeros da função $f(x) = sen(x)$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Atividade 6

Problema de Otimização

De todos os paralelogramos, nos quais as medidas a e b dos lados adjacentes são mantidas fixas, qual é o de maior área?

Para resolver este problema, observa-se que, as medidas dos lados são constantes, então a única medida que pode mudar de valor é o ângulo α, pois, a área de um paralelogramo é dada pela expressão $A = b\,.\,h$, onde b é a medida de um dos lados do paralelogramo e h é a medida da altura deste paralelogramo relativa à esse lado.

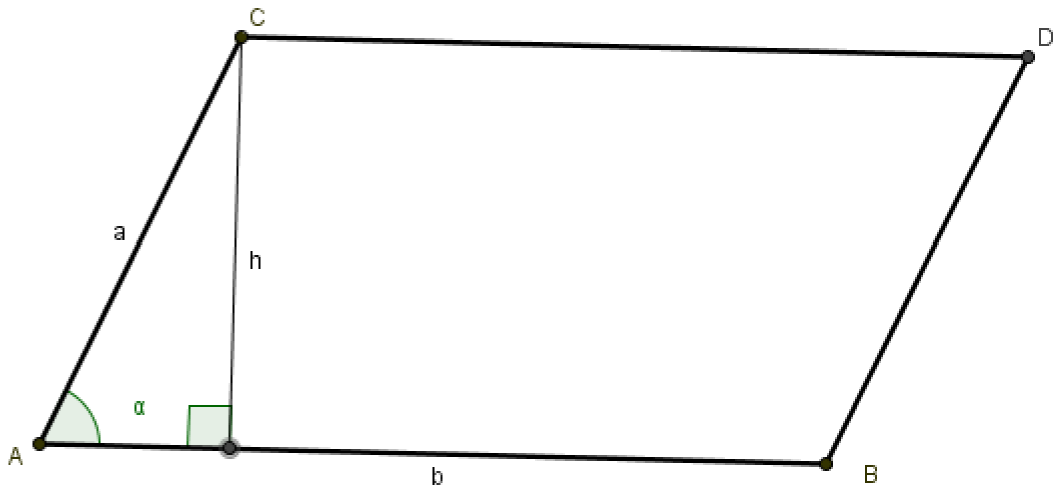


Figura 4.16: Ilustração do paralelogramo do problema de otimização - Fonte: Dados do autor

Mas, como no problema tem-se que as medidas a e b são constantes, então a única medida que pode variar é a medida α do ângulo BAC, consequentemente, varia a medida h da altura do paralelogramo pois $sen\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\,.\,sen\alpha$, assim, $A = b\,.\,h = b\,.\,a\,.\,sen\alpha$ sabe-se que o seno de um número real α é um número do intervalo $[-1,\ 1]$, então a área do paralelogramo será máxima quando $sen\alpha = 1$.

Conclusão: a área máxima ocorre quando a medida α do ângulo formado pelos lados adjacentes de medidas a e b é igual a $90°$.

Com esta atividade os alunos poderão experimentar uma aplicação da função seno. Às vezes, será a questão que mais poderá gerar muita perguntas devido a utilização de outros conceitos, tais como: O que é um paralelogramo? Como encontrar a área de um paralelogramo? Neste momento pode-se constatar que a maioria dos alunos apresentarão carências de outros conteúdos de matemática, principalmente os conteúdos de geometria plana. Após alguns diálogos entre o professor pesquisador e os alunos envolvidos na pesquisa e entre os próprios alunos pode-se defnir o que é um paralelogramo e como obter a sua área.

Conforme Barbosa[16], (2012), Paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e congruentes. A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de um de seus lados pela medida da sua altura relativa a este lado.

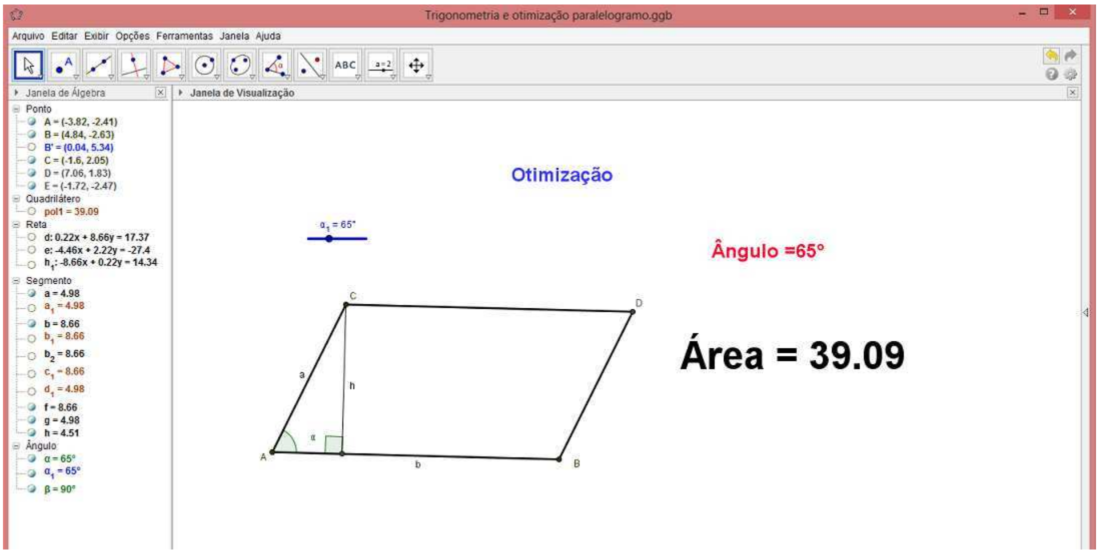


Figura 4.17: Ilustração da atividade 6 no GeoGebra - Fonte: Construção no GeoGebra feita pelo autor.

Primeiramente, pode-se solicitar que os alunos construam este paralelogramo usando o ambiente do GeoGebra, onde eles poderão mover o parâmetro α e observar o que acontecerá com a medida h da altura e com a medida A da área do paralelogramo. Assim observarão que a área máxima ocorre exatamente quando $\alpha = 90°$, isto é quando os lados adjacentes de medidas a e b são perpendiculares, quando o paralelogramo representar um retângulo.

Depois que todos entenderem a dinâmica desta atividade, espera-se que os alunos considerem uma das atividades mais interessante que exigirá deles a busca de outros conteúdos que eles já estudaram e que não tiveram a oportunidade de realizar atividades de interesse deles.

4.4 Etapa 4 - Teste diagnóstico final

O teste diagnóstico final será aplicado após o desenvolvimento das etapas 1, 2 e 3, com o objetivo de verificar, através do uso das ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra, os conhecimentos dos alunos envolvidos neste trabalho quanto ao ensino das funções seno, cosseno e tangente verificando a viabilidade do uso das ferramentas propostas neste trabalho no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente.

O teste diagnóstico final foi elaborado com as mesmas questões do teste diagnóstico inicial de forma que os alunos utilizem as ferramentas propostas neste trabalho, para a sua resolução. Consta neste teste uma questão aberta e pessoal além das questões do teste diagnóstico inicial, conforme o anexo II.

A questão aberta proposta no teste diagnóstico final foi: **"Este trabalho contemplou suas expectativas quanto ao ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente?**

Espera-se que as opiniões dos alunos envolvidos seja que as ferramentas propostas aliadas à proposta didática proporcionará uma aprendizagem significativa quanto ao ensino das funções seno, cosseno e tangente de forma atraente e prazerosa, porque assim eles estarão fazendo matemática em tempo real.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o propósito de verificar, junto a um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio, as contribuições que as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra provocam no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica. A prática deste trabalho mostrará que o ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente com o auxílio destas ferramentas tornará o processo de ensino mais dinâmico, interativo, participativo e construtivo, provocando envolvimento dos alunos. Além disso, as atividades propostas e desenvolvidas os desafiaram a analisar, refletir e tirar conclusões.

No desenvolvimento deste trabalho, procurou-se adotar uma metodologia que pudesse estimular a criatividade e o interesse dos alunos envolvidos, abordando situações-problema desafiadoras e intrigantes do cotidiano deles, buscando alternativas para aumentar a motivação e desenvolver a autoestima e o raciocínio lógico dedutivo.

A realização de atividades utilizando as ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGebra também poderá contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas nos alunos envolvidos, estimulando a criatividade e incentivando a construção de modos críticos de pensar. Partindo das experiências vivenciando neste trabalho e utilizando as ferramentas propostas no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica, considera-se que esta prática proporcionará melhor compreensão dos conteúdos propostos. Os alunos poderão achar interessante o ensino de matemática e utilizando essas ferramentas, as aulas tornarão mais significativas, atraentes, prazerosas, de forma dinâmica, palpável e acessível.

Constata-se assim, que o uso dessas ferramentas no ensino dos conteúdos de matemática, em especial as funções seno, cosseno e tangente na educação básica, terá boa receptividade por parte dos alunos envolvidos fazendo com que considerem importante o ensino de trigonometria nas escolas, passando a percebê-lo como uma ferramenta útil, tendo sentido e entendendo que faz parte de seu dia-a-dia. A partir das atividades realizadas, observa-se nos alunos envolvidos a capacidade de estabelecer relações, de tomar decisões e de fundamentar suas afirmações, discutindo e enriquecendo os conhecimentos existentes.

A visualização e a experimentação por parte dos alunos envolvidos, terão um importante papel na compreensão de alguns saberes ligados ao domínio, imagem e período das funções seno, cosseno e tangente. Enfim, este trabalho mostrará como a interação direta com o objeto de estudo poderá conduzir numa melhora na capacidade precisa de estimar elementos das funções seno, cosseno e tangente.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

[2] D'AMBRÓSIO, Ubiratã. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. São Paulo: Summus, Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César e WAGNER, Eduardo. **Trigonometria/Números Complexos**. 3ª Edição, Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[4] ROSA, Rosana Camilo da. **Trigonometria e números complexos**: livro didático/ Rosana Camilo da Rosa, Eliane Darela, Paulo Henrique Rufino; design institucional.

[5] MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[6] SELBACH, Simone. **Matemática e Didática**. Coleção Como Bem Ensinar / Coordenação Celso Antunes. Vários autores. Editora Vozes, 2010.

[7] GONÇALVES, Paulo Gonçalo Farias. **Etnomatemática e resolução de problemas: da labor dos trabalhadores das industrias de cerâmica do município de Russas - Ce ao desenvolvimento de uma experiência educacional**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM. Curitiba, PR. 2013.

[8] BOYER, Carl B. **História da matemática**. (Tradução de Elza F. Gomide) - 2ª ed.- São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[9] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** - tradução Hygino H. Domingues, 5ª Ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[10] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. vol. único, 3ª edição. Ática - São Paulo, 2011.

[11] LIMA, Elon Lages [et al.]. **A matemática do ensino médio**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2006.

[12] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **A história da trigonometria**. In: CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Trigonometria / números complexos. SBM, 1992, p. 101 - 108.

[13] JÚNIOR, José Carlos de Souza. **Introdução ao GeoGebra**. Universidade Federal de Alfenas-UNIFAL-MG, 2010.

[14] MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais - SEE/MG. **SIMAVE/PROEB - 2012**/ Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdadade de Educação, CAEd. Juiz de Fora, 2012. Revista Pedagógica, 3° ano do Ensino Médio - Matemática.

[15] RIBEIRO, Jackson e SOARES, Elizabeth. **Construindo Consciências: matemática, 8ª série**. 1ª edição. Scipione - São Paulo, 2006.

[16] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[17] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, 1999.

[18] RPM – **Revista do Professor de Matemática nº 78**. 2º quadrimestre de 2012. São Paulo, SBM, 2012.

[19] SEE/MG – Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais – **Currículo Básico Comum de Matemática/ CBC**.

[20] GOOGLE IMAGEM. **Teodolito**. Disponível em:https://www.google.com.br/search?q=teodolito Acesso em: 20 de setembro de 2013.

[21] GOOGLE IMAGEM. **Calculadora Científica**. Disponível em: https://www.google.com.br/#q=fotos+calculadora+cientifica. Acesso em: 20 de setembro de 2013.

[22] BECHARA, Evanildo. **Dicionário da língua portuguesa**. Evanildo Bechara / Evanildo Bechara. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2011.

[23] ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática**/Ernesto Rosa. 12.ed. - São Paulo: Ática, 2010.

[24] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** Volume único. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2005.

[25] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[26] GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo e MATTOS, Francisco. **Recursos Computacionais no Ensino Matemática.** Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[27] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2011.

[28] GOOGLE IMAGEM. **Prancha trigonométrica**. Disponível em http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/09/apranchatrigonometrica.html. Acesso em 20 de setembro de 2013

[29] MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais - SEE/MG. **SIMAVE/PROEB - 201**1/ Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdadade de Educação, CAEd. Juiz de Fora, 2011. Revista Pedagógica, 3° ano do Ensino Médio - Matemática.

[30] BARTOLI, Gladis. **Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa**. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas - PPGECE. Disponível em www.univartes.br/bdu. Acesso em 18 de novembro de 2013.

[31] COSTA, NML da. Artigo. **A História da Trigonometria.** Pontifícia Universidade Católica- SP, São Paulo, 2003 . Disponível em www. ufrgs.br. Acesso em 18 de novembro de 2013.

ANEXOS

Anexo I

Teste Diagnóstico Inicial

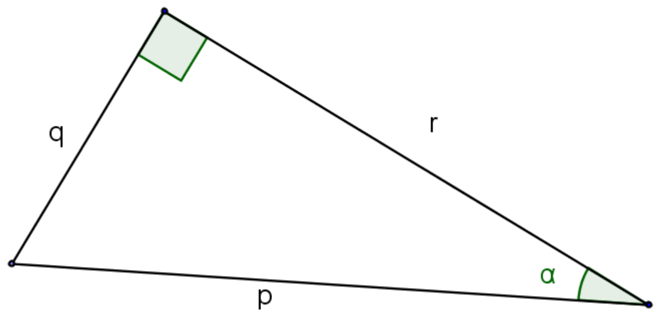
Pesquisa: Ferramentas auxiliares no ensino das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Disciplina: Matemática

Pesquisador: Silvino Domingos Neto

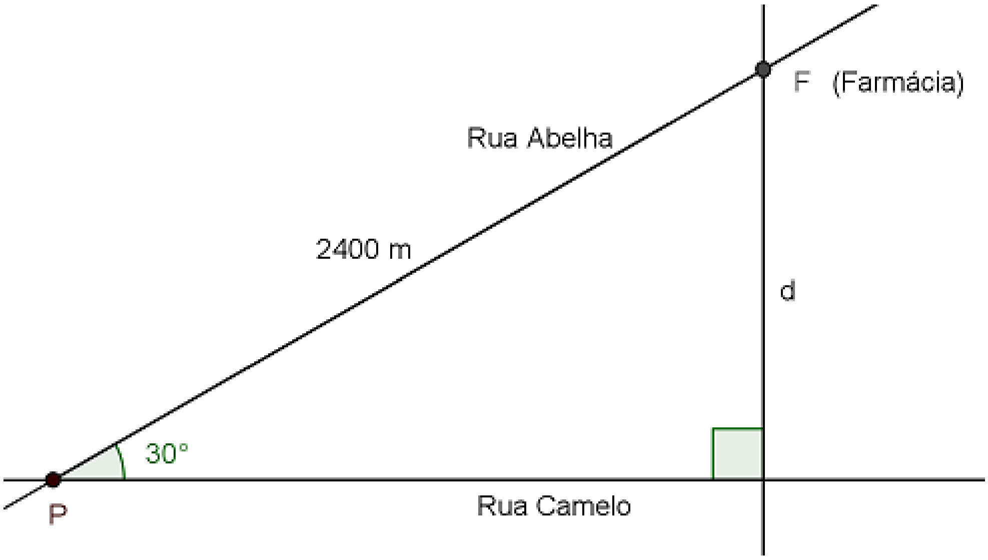
Questões

Questão 1) A professora de matemática desenhou no quadro um triângulo retângulo no qual p, q er são as medidas dos seus lados, em centímetros, e α é a medida de um de seus ângulos, em graus, o cosseno do ângulo α é:



(A)$cos(\alpha) = \frac{p}{q}$
(B)$cos(\alpha) = \frac{q}{p}$
(C)$cos(\alpha) = \frac{q}{r}$
(D)$cos(\alpha) = \frac{r}{p}$

Questão 2: Duas ruas de uma cidade encontram-se em P formando um ângulo de 30°. Na rua Abelha, existe uma farmácia F que dista 2400 m de P, conforme mostra a ilustração abaixo.



Sabendo que $sen30° = 0,5$, $cos30° \cong 0,86$ e $tg30° \cong 0,68$, a distância d, em metros, do ponto F à rua Camelo é aproximadamente igual a:

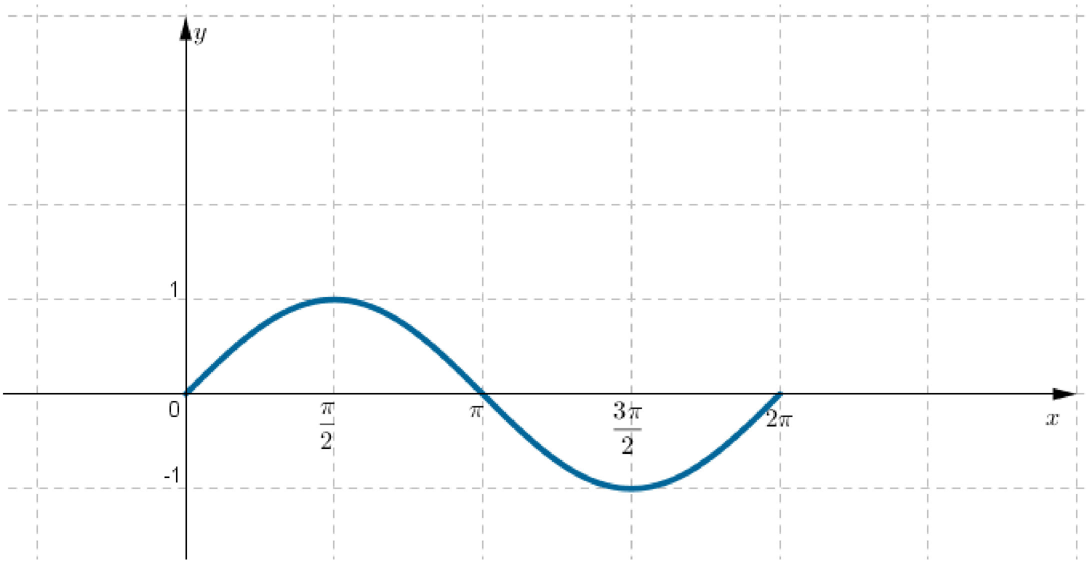
(A)1200

(B)1392

(C)4800

(D)2064

Questão 3) Observe a figura abaixo



A função trigonométrica representada nesse gráfico é:

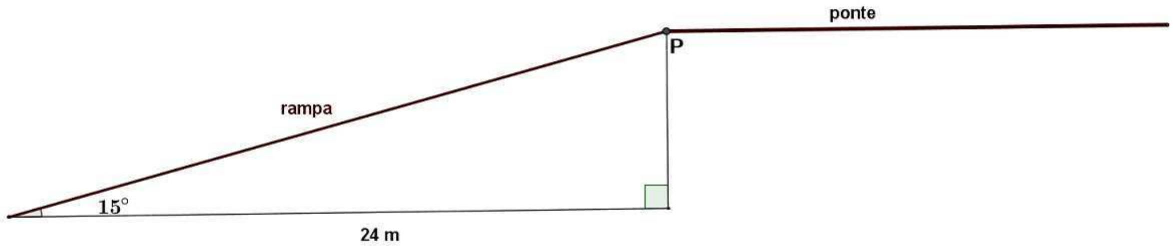
(A) $y = cosx$

(B) $y = tgx$

(C) $y = senx$

(D) $y = -senx$

Questão 4) Um caminhão sobe uma rampa com inclinação de 15° em relação ao plano horizontal. Sabendo-se que a distância horizontal que separa o início da rampa até o ponto P no início de uma ponte mede 24 m, qual é a altura em metros, aproximadamente, dessa ponte, sabendo que ela é paralela ao plano horizontal?



Dados : $sen15° \cong 0,25$, $cos15° \cong 0,96$, $tg15° \cong 0,27$

(A) 6

(B) 23

(C) 25

(D) 96

Questão 5) A trigonometria é um ramo da matemática que relaciona:

(A) Medidas dos ângulos e medidas dos lados de um triângulo.

(B) Medidas das arestas e medida da área da superfície de um poliedro.

(C) Medida dos lados e medida da área de um quadrado.

(D) Apenas as medidas dos lados de um triângulo.

Anexo II

Teste Diagnóstico Final

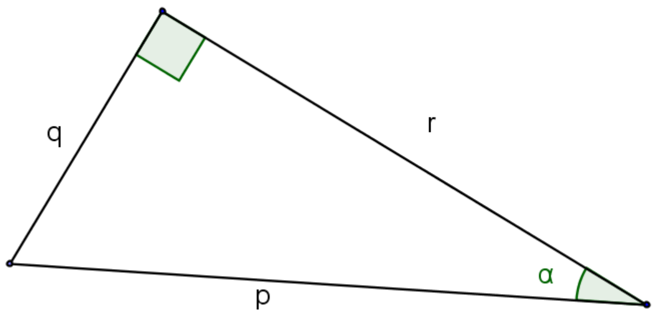
Pesquisa: Ferramentas auxiliares no ensino das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Disciplina: Matemática

Pesquisador: Silvino Domingos Neto

Questões

Questão 1) A professora de matemática desenhou no quadro um triângulo retângulo no qual p, q er são as medidas dos seus lados, em centímetros, e α é a medida de um de seus ângulos, em graus, o cosseno do ângulo α é:



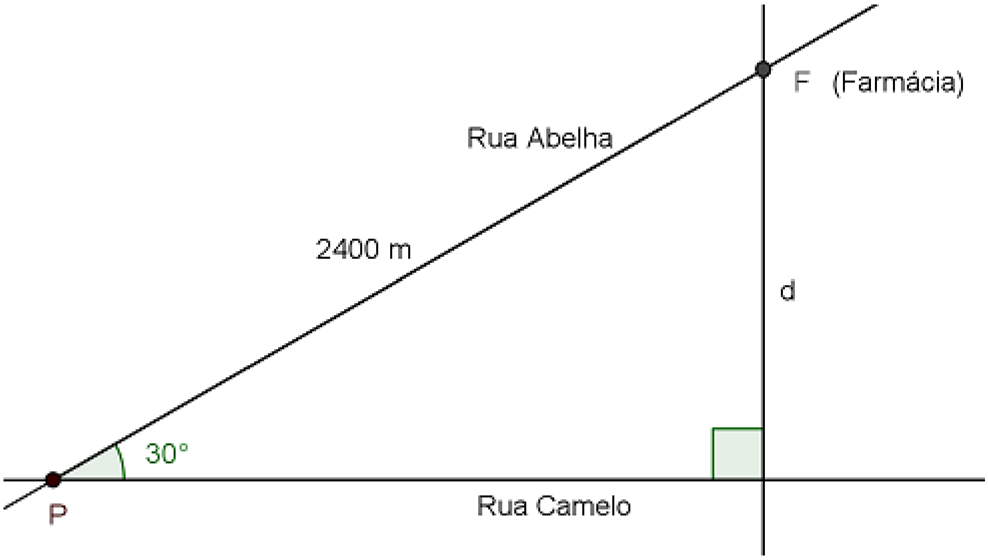
(A)$cos(\alpha) = \frac{p}{q}$

(B)$cos(\alpha) = \frac{q}{p}$

(C)$cos(\alpha) = \frac{q}{r}$

(D)$cos(\alpha) = \frac{r}{p}$

Questão 2) Duas ruas de uma cidade encontram-se em P formando um ângulo de 30°. Na rua Abelha, existe uma farmácia F que dista 2400 m de P, conforme mostra a ilustração abaixo.



Sabendo que $sen30° = 0,5$, $cos30° \cong 0,86$ e $tg30° \cong 0,68$, a distância d, em metros, do ponto F à rua Camelo é aproximadamente igual a:

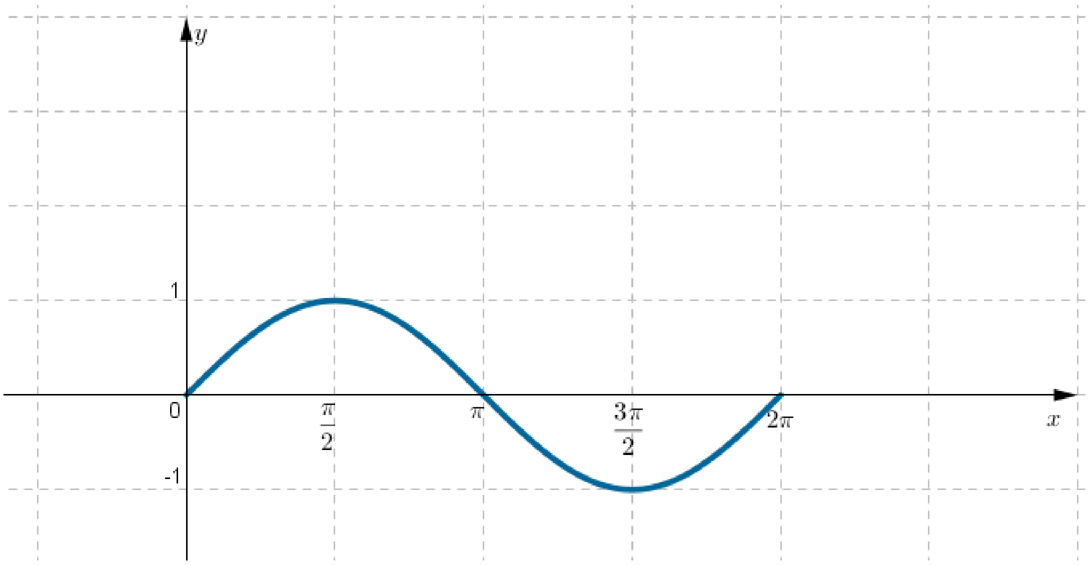
(A)1200

(B)1392

(C)4800

(D)2064

Questão 3) Observe a figura abaixo



A função trigonométrica representada nesse gráfico é:

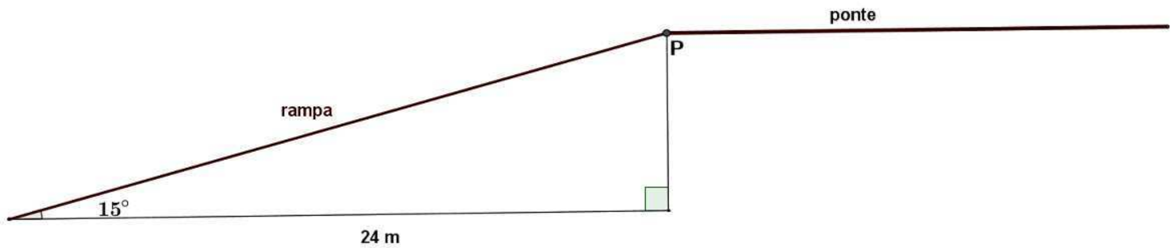
(A) $y = cosx$

(B) $y = tgx$

(C) $y = senx$

(D) $y = -senx$

Questão 4) Um caminhão sobe uma rampa com inclinação de 15° em relação ao plano horizontal. Sabendo-se que a distância horizontal que separa o início da rampa até o ponto P no início de uma ponte mede 24 m, qual é a altura em metros, aproximadamente, dessa ponte, sabendo que ela é paralela ao plano horizontal?



Dados : $sen 15° \cong 0,25$, $cos 15° \cong 0,96$, $tg 15° \cong 0,27$

(A) 6

(B) 23

(C) 25

(D) 96

Questão 5) A trigonometria é um ramo da matemática que relaciona:

(A) Medidas dos ângulos e medidas dos lados de um triângulo.

(B) Medidas das arestas e medida da área da superfície de um poliedro.

(C) Medida dos lados e medida da área de um quadrado.

(D) Apenas as medidas dos lados de um triângulo.

Questão 6) Este trabalho contemplou suas expectativas quanto ao ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente?