SANDRO SALLES GONÇALVES

ABORDAGEM HISTÓRICO CULTURAL EM SALA DE AULA INCLUSIVA DE MATEMÁTICA: O PROCESSO DE APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DA FUNÇÃO DERIVADA POR UM ALUNO CEGO

OURO PRETO

2014

SANDRO SALLES GONÇALVES

ABORDAGEM HISTÓRICO CULTURAL EM SALA DE AULA INCLUSIVA DE MATEMÁTICA: O PROCESSO DE APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DA FUNÇÃO DERIVADA POR UM ALUNO CEGO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki.

OURO PRETO

2014

G635a Gonçalves, Sandro Salles.
Abordagem histórico cultural em sala de aula inclusiva de matemática [manuscrito]: o processo de apropriação do conceito da função derivada por um aluno cego. / Sandro Salles Gonçalves. - 2014.
197 f.: il.; color.; tab.

Orientadora: Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Ensino Superior - Teses. 3. Educação inclusiva - - Teses. I. Kawasaki, Teresinha Fumi. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 51:376

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ABORDAGEM HISTÓRICO-CULTURAL EM SALA DE AULA INCLUSIVA DE MATEMÁTICA: O PROCESSO DE APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DA FUNÇÃO DERIVADA POR UM ALUNO CEGO

Autor: Sandro Salles Gonçalves

Orientadora: Teresinha Fumi Kawasaki

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Sandro Salles Gonçalves e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 25/08/2014.

Teresinha Kawasaki
....
Orientadora

COMISSÃO EXAMINADORA:

Teresinha Kawasaki
Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki

S. H.
Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy

Reginaldo
Profa. Dra. Regina Helena de Oliveira Lino Franchi

2014

À minha esposa Janice, companheira dedica e zelosa, em todos os momentos demonstrando seu amor.

Aos tesouros que tive o privilégio de ter nesta vida, minhas amadas filhas Ingrid, Sthefanie e Louise. Não saberia definir a vida sem a presença de vocês!

Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus**, causa primeira de todas as coisas em minha vida, por insistentemente me mostrar, com toda a sua Pedagogia, o caminho da Educação como sendo a minha missão nesta Terra. Apesar de teimoso, Ele tem sido muito paciente comigo. Muito obrigado.

Agradeço à **Teresinha**, por materializar essa paciência, por abdicar, às vezes, de seus momentos de merecido descanso ou férias para ler e contribuir com a pesquisa. Muito obrigado.

À minha esposa, **Janice**, por existir em minha vida e contribuir com os necessários cuidados à manutenção de nossa família em meus muitos momentos de ausência. Te amo.

Às minhas **filhas**, por serem essas pessoas maravilhosas, dedicadas, responsáveis e contribuírem sempre para que meus vários momentos de ausência se tornassem um peso menor em minha consciência. Amo vocês.

Aos meus amigos **Juracélio** e **Júlio**, por me apoiarem, me receberem em sua casa e me propiciarem bons momentos de convívio nessa página de minha vida. Muito obrigado.

Aos **professores, colegas e amigos do Mestrado 2012**, pelo convívio oportuno, pela troca de experiências, sugestões valiosas, lições e conselhos. À professora **Maria do Carmo**, pelo auxílio nas atividades. Quando tiver “cento e tantos anos”, serei como vocês! Muito obrigado.

Ao **Daniel**, por me mostrar que o aparelho visual é desnecessário ao espírito livre quando se enxerga além dele. Muito obrigado!

Aos meus **colegas de trabalho e alunos do IFMG**, por compartilharem de nossa visão acerca da inclusão e se dedicarem a essa causa. Muito obrigado.

À professora **Lulu Healy**, por nos presentear com a palestra de abertura do Mestrado que deflagrou todo esse processo de mudança nos rumos da pesquisa, me agraciando, ainda, com o enorme privilégio de sua contribuição. Muito obrigado.

À professora **Regina**, pelas valorosas contribuições e ponderações para este trabalho. Muito obrigado.

Aos meus **pais, Elias e Maria,** e **parentes**, por existirem e, mesmo distantes, apoiarem e incentivarem essa caminhada. Muito obrigado.

E uma das condições necessárias a pensar certo é não estarmos demasiado certos de nossas certezas.

Paulo Freire

RESUMO

As dificuldades em torno do ensino e da aprendizagem de conceitos de Cálculo vêm sendo amplamente discutidas nos últimos tempos em diversas pesquisas. Algumas dessas pesquisas retratam o cotidiano da sala de aula de alunos videntes apontando caminhos que têm como ponto de partida o estímulo à visualização por meio do uso de tecnologias. A expansão do acesso ao ensino superior tem contribuído para que alunos com necessidades especiais finalmente exerçam o seu direito à educação, porém muitos são os obstáculos para que alcancemos uma efetiva inclusão. Esta pesquisa teve por finalidade observar, descrever e procurar compreender como um aluno cego utilizou a linguagem, os signos e gestos e, ainda, como se apropriou dos conceitos próprios do Cálculo, em particular o de função derivada no contexto da sala de aula e fora dela, no curso de Licenciatura em Matemática do IFMG – *campus* São João Evangelista. Dentro da perspectiva vygotskiana, esse estudante tem o mesmo potencial que os estudantes videntes para a apropriação de conceitos desde que sua "visualização" seja estimulada por meio de materiais manipuláveis para trabalhar outros sentidos. Portanto, esta investigação foi pautada na visão sócio, histórico e cultural de Vygotsky, mais especificamente nos conceitos de mediação por artefatos, Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), formação de conceitos e interiorização. A pesquisa, de abordagem qualitativa, teve como instrumento de coleta de dados a observação realizada por meio de filmagens das aulas e dos encontros particulares e de apontamentos realizados durante a pesquisa. Inicialmente, elaborei uma sequência de atividades didáticas com vistas a conduzir a atividade dos alunos e, em particular, do aluno cego, de modo que pudesse perceber como ele se apropriava dos conceitos estudados. Os resultados desta pesquisa apontam o potencial que o uso de materiais manipuláveis, especialmente no campo da educação matemática, possui no desenvolvimento das funções superiores, tendo em vista que tato é um importante campo perceptivo do cego. Destaco ainda a relevância que a confecção desses materiais teve no decorrer da realização das atividades juntamente com o aluno. Como produto desta pesquisa, elaboramos um livreto com sugestão de atividades e confecção de materiais, destinado a professores, futuros professores e formadores que se sintam desafiados pela inclusão de alunos com necessidades especiais no ensino superior.

Palavras-chave: Abordagem histórico-cultural. Educação Matemática Inclusiva. Ensino de Cálculo.

ABSTRACT

The difficulties surrounding teaching and learning of Calculus concepts have been widely discussed in recent and various studies. Some of these researches depict the everyday life of sighted students', pointing paths in which visualization through the use of technologies is a stimulus for the learning of Calculus. Expanded access to higher education has contributed to students with special needs finally exercising their right to education. However, they still face many obstacles to their effective inclusion. This research aimed at observing, describing and trying to comprehend how a blind student uses language, signs and gestures, and also how he appropriates concepts of calculus, in particular, the concept of derivative function. The research was conducted in the context of the Math classes (inside and out), offered to the undergraduate teacher education course in mathematics at IFMG, in the campus of São João Evangelista. Within the Vygotskian perspective, students with special needs have the same potential as students sighted students, since his "viewing" is stimulated through manipulative activities in order to stimulate other senses. Therefore, this research was based on the social, historical and cultural theory of Vygotsky, specifically we adopt the concepts of mediation by artifacts, Zone of Proximal Development (ZPD), concept formation, and internalization. This research has a qualitative approach, and had as instruments for data collection: observation by means of videotaping, lessons and private meetings and field notes made by the author throughout the investigation. To start, I prepared a series of teaching activities to guide students activities were prepared in orde to observe how and, in particular, the blind student, appropriated the concept of derivative function. Results indicate the potential of the use of manipulative material in the field of mathematics education in the development of higher psychological functions considering that touch is an important sense of the blind. I also emphasize the importance of making these materials during the meetings along with the student. As a product of this research, we developed a booklet with suggested activities and hints for manufacturing pedagogical materials for blind learners directed to teachers, future teachers and trainers who feel challenged by the inclusion of students with disabilities in higher education.

Keywords: Historical and cultural theory. Inclusive Mathematics Education. Teaching of Calculus.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 TRANSITANDO UM POUCO PELOS CAMINHOS DA PESQUISA

> Que é mesmo a minha neutralidade senão a maneira cômoda, talvez, mas hipócrita, de esconder minha opção ou meu medo de acusar a injustiça? Lavar as mãos em face da opressão é reforçar o poder do opressor, é optar por ele.
>
> Paulo Freire

1.1 Introdução

A situação de incômodo que gestou o objeto desta pesquisa surgiu no ensino superior quando me deparei com um aluno cego em aulas de matemática. Ao ver-me impulsionado a investigar a problemática que iria gerar esta dissertação, já trazia comigo algumas questões quanto ao ensino de Cálculo, disciplina que leciono há algum tempo combinada com o uso de ferramentas computacionais. As dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem do Cálculo e a forma como esse conteúdo é ministrado já eram questões que geravam incômodo em mim corriqueiramente. Contudo, diante desse novo desafio, algo completamente novo pra mim, nunca havia sequer pensado em ensinar conceitos de Cálculo, sem utilizar a ferramenta computacional, da forma que sempre fizera, em minhas aulas. Em seguida, retomo a minha trajetória profissional para situar como esses acontecimentos foram tomando corpo até culminar na pesquisa.

1.1.1 Um pouco da minha trajetória profissional nesta história

Durante o período escolar da educação básica, nunca fui uma sumidade em Matemática. Na verdade, entre alguns tropeços, apenas na 3º série do Ensino Médio descobri certo gosto por essa disciplina. Nesse período, o maior motivo para despertar esse gosto foi ter tido aulas com um professor com grande habilidade motivacional e simplicidade em sua forma de ser. Criei grupos de estudo e, inclusive, a opção inicial pela engenharia ganhou fôlego em minha suposta vocação. Isso aconteceu em Belém, no estado do Pará, e, no meio do ano, devido à mudança profissional de meu pai do Norte para o Sudeste, mudei-me com a família para Belo Horizonte no estado de Minas Gerais. A mudança de estado, escola, amigos e vida não provocou, de imediato, mudanças em minha escolha inicial de curso. Ingressei, assim, na UFMG para fazer o curso de Engenharia Civil. Depois de algum tempo de curso, algumas dificuldades com os Cálculos, sai do *campus* e fui para a escola de Engenharia, localizada no centro da cidade, e lá, devido ao fato de ter de trabalhar para manter a minha recém-formada família, conciliar estudos e trabalho em uma Universidade Federal, tornou-se tarefa nada fácil. Tranquei e, em seguida, abandonei o curso. Anos depois, voltei aos estudos no curso de Licenciatura em Matemática pela UNIMONTES. Nessa ocasião, trabalhava já ministrando aulas de Matemática em escolas públicas estaduais e em duas escolas particulares no interior do estado. Transitando pelas escolas públicas estaduais e privadas de educação básica, percebi os enormes desafios enfrentados pelos professores: salários baixos, indisciplina e desmotivação tanto deles quanto dos alunos. Consolidei-me como professor de Matemática no Ensino Médio em escolas particulares já no ano de 2002 e, gradativamente, migrei para a educação superior atuando em cursos de formação de professores no ano de 2004. Atuei também em cursos de Engenharia, Ciências biológicas, Administração de Empresas, entre outros. Mas foi na formação de professores que encontrei espaço para a pesquisa.

Meu interesse pelo ensino de Cálculo e suas dificuldades teve origem quando lecionei essa disciplina pela primeira vez no ano de 2004 em um curso de Licenciatura em Matemática em uma faculdade no interior de Minas Gerais. Naquele tempo, eu entendia que a enorme dificuldade encontrada pelos alunos devia-se à sua pouca experiência com conteúdos que eram pré-requisitos para a disciplina. Em sua maioria, os alunos eram oriundos das escolas públicas da região cuja realidade eu conhecia de perto por ter atuado inicialmente ministrando aulas em algumas escolas públicas. A situação mais evidente era o desconhecimento de fatos e elementos fundamentais ao prosseguimento na carreira escolar em Matemática, como os conceitos lecionados na educação básica, principalmente nas séries finais. Naquela época, procurei diversificar minha prática com a utilização de alguns recursos computacionais e, em particular, *softwares* de geometria dinâmica, o que foi bem recebido pelos alunos cujo interesse pelas aulas fez com que o rendimento deles apresentasse sensível melhora.

Alguns anos se passaram desde então, e a inserção de novos recursos tecnológicos vem acompanhando a minha prática nas aulas ministradas no Ensino Superior. Atualmente, sou professor no Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG, na cidade de São João Evangelista, interior de Minas Gerais, onde atuo no curso de formação de professores de Matemática. Nessa mesma instituição, trabalho ainda no curso de Sistemas de Informação com as disciplinas de Fundamentos de Matemática e Cálculo.

Tendo por costume utilizar recursos computacionais, deparei-me com um novo desafio: Daniel, um aluno cego. Ao longo de minha trajetória profissional, enfrentei diversos desafios de aprendizagem: desde alunos desinteressados até alunos com enorme grau de dificuldade de aprendizagem. Contudo, em minha formação, na graduação, poucas vezes falou-se em ensino para alunos com dificuldades de aprendizagem e nenhuma vez fora discutida a inclusão de alunos com necessidades especiais. Logo, não possuía habilidade alguma para enfrentar esse novo desafio. Daí surgiu a inquietação que motivou esta pesquisa: ensinar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral a alunos cegos. Quais recursos utilizar para que eles apreendam conceitos, por exemplo, de derivadas ou funções derivadas sem o auxílio de um desenho em um quadro ou mesmo o uso de um *software* de geometria dinâmica? Contudo, o meu encontro com esta pesquisa no Mestrado não começou por aí. Essa preocupação ainda não existia. As dificuldades que ocupavam as minhas preocupações naquela época passavam pelo ensino de Cálculo em ambientes virtuais de aprendizagem. Naquela época, ainda não divisava o desafio que me esperava já no ano seguinte. Transitei por essa área durante um tempo, pesquisei sobre o ensino à distância, ensino de Cálculo em ambientes virtuais de aprendizagem, uso de ferramentas de elaboração de videoaulas. Contudo, ainda não era bem isso que me motivava completamente. Algum tempo depois descobriria o porquê. Estava ainda sem saber exatamente o que fazer e por onde seguir quando duas coisas aconteceram quase que na mesma época: a primeira, conforme já relatei, foi o fato de me deparar com o Daniel, meu aluno cego, nas aulas de Matemática no Ensino Superior. A outra fora, justamente, a palestra de abertura das aulas do 2º semestre de 2013, quando tivemos a presença da professora Dra. Lulu Healy na UFOP, discutindo as questões da inclusão e os trabalhos que vêm sendo realizados por seu grupo de pesquisas no tocante a alunos com necessidades especiais – cegos, surdos, alunos com lesões cerebrais e pessoas que nasceram com síndrome de Down. De certa forma, isso me motivou enormemente a buscar e investigar quais situações tornariam a aprendizagem de Cálculo para um aluno cego mais eficaz, e esse passou a ser o assunto que permearia as minhas ações de pesquisa desde aquele momento.

1.2 Interesse na pesquisa

O meu interesse em realizar esta pesquisa nasceu no curso de Bacharelado em Sistemas de Informação. Ministrava a disciplina de fundamentos de matemática para uma turma de primeiro período e, ao adentrar a sala de aula, no primeiro dia, deparei-me com o Daniel, aluno cego, sujeito desta pesquisa. Foi algo impactante, pois nunca havia ministrado aulas a pessoas com necessidades especiais. Algumas questões fervilhavam em minha mente, uma vez que constituía um desafio significativo ensinar matemática a um aluno cuja percepção visual, ferramenta mais utilizada na matemática e cuja prática se propaga e se repete em nossas aulas, não estava ao seu alcance. Sem dúvida alguma, a visualização com o sentido da visão estava comprometida nesse aluno, mas e os outros sentidos? Como ele chegara até ali? O que sabia? Como aprendera até aquele momento? A sua presença foi tão emblemática que as discussões em torno de sua aprendizagem no curso de sistemas de informação tornaram-se frequentes na sala dos professores. No curso de Sistemas, a visualização era algo ainda mais fundamental, pois muitos programas utilizados pelos alunos têm forte conotação visual. A organização das linhas de comando e a programação de códigos seguem padrões cujos leitores de tela disponíveis no mercado nacional não conseguem ler. Fora isso, alguns colegas discutiam ainda as questões de “hardware”, redes e outras coisas próprias do curso de Bacharelado em Sistemas de informação. Na maioria das vezes, aventavam apenas as suas dificuldades. Contudo, ouvia as ponderações, lamentações e dificuldades dos colegas, mas não enxergava nisso tudo um problema e sim um desafio.

Comecei, então, a pesquisar em livros e na internet acerca da inclusão de alunos cegos no ensino superior e poucas pesquisas surgiram como retorno. Imaginei que em relação às próximas disciplinas como, por exemplo, o Cálculo I, que ele teria em breve, algumas dificuldades seriam mais patentes, pois o Cálculo é uma disciplina com forte conotação visual. Assim, surgiu o desejo em desenvolver uma pesquisa na qual pudesse estudar como um aluno cego se apropria de determinados conceitos, signos, palavras e como, derradeiramente, ele poderia aprender utilizando recursos materiais simples e de fácil acesso, combinados com o uso do computador que lhe serviria de ferramenta para ler e processar informações de cálculo de funções. No meio dessa caminhada que fizemos no primeiro semestre de 2013, o aluno, em seu foro íntimo, aventou o desejo de trocar de curso. Algumas dificuldades que se lhe apresentaram no curso de Sistemas de Informação talvez tenham contribuído para a sua decisão. Ao término do 1º semestre letivo, ele fizera pedido de transferência interna para o curso de Licenciatura em Matemática e passou a frequentá-lo regularmente no 2º semestre letivo. Sua decisão provocou uma reunião no curso de Licenciatura em Matemática, e nós, professores, elencamos quais seriam as possíveis medidas que tomaríamos no sentido de possibilitar a ele uma melhor experiência discente. Penso que essa medida fora uma das mais acertadas que adotamos, pois discutimos potencialidades e limites da infraestrutura disponível para atendê-lo e procuramos, com isso, viabilizar a compra de materiais e equipamentos para esse e outros alunos cujas necessidades especiais requeriam materiais adaptados. De imediato, isso também provocou algumas ações, como, por exemplo um curso de Braille realizado no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID. Iniciado o período letivo, comecei também a planejar qual seria um possível caminho e quais seriam as estratégias que poderia adotar para ministrar as aulas de Cálculo I, elegendo um dentre os temas dessa disciplina para implementar a pesquisa. Dentre os conteúdos disponíveis, elegi o estudo das funções derivadas, introduzindo o seu conceito através da curva de inclinações a uma dada curva.

1.3 Questões e objetivos desta pesquisa

A partir de uma revisão da literatura e de observações quanto à utilização dos materiais manipuláveis como recurso pedagógico, percebi que era possível, com algumas adaptações, utilizar o mesmo material que alunos videntes tinham à disposição para ensinar determinados conceitos de Cálculo a um aluno cego. Importante ressaltar que o uso do computador por ele foi facilitado pelo fato de já possuir habilidades desenvolvidas para o seu uso.

Pensando na combinação entre o uso do computador e materiais adaptados, delineei esta pesquisa cujo propósito foi o de construir, implementar e analisar uma proposta de aprendizagem de funções derivadas e investigar como o uso de materiais manipuláveis e o apoio do computador pode proporcionar tal aprendizagem no curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino técnico e tecnológico federal localizada na cidade de São João Evangelista (MG) segundo a percepção de um aluno cego.

Considerando a hipótese de trabalho sobre a importância do uso de materiais manipuláveis no processo de aprendizagem de Matemática para alunos não videntes, formulei o seguinte problema de investigação concernente ao ensino de Cálculo no Ensino Superior: **Quais as possíveis contribuições da utilização de materiais manipuláveis, combinados com a utilização do computador, por meio da leitura de sua tela por um software sintetizador de voz, para a apropriação do conceito de função derivada de funções elementares de uma variável para um aluno cego?**

Como um objetivo geral, procurei observar, descrever e compreender como um aluno cego passa a usar a linguagem, signos, gestos e ainda como se apropria dos conceitos próprios do Cálculo, em particular, o de funções derivadas. O contexto deste estudo tem como ambiente natural a sala de aula de uma turma do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG – *campus* São João Evangelista. Contudo, em função de determinadas particularidades e dificuldades, optei também por encontros particulares com o sujeito da pesquisa.

Como objetivos específicos, devemos:

a) desenvolver e elaborar uma proposta que vise a aprendizagem do conceito de função derivada de funções elementares de uma variável para um aluno cego;

b) observar e entender como o aluno utiliza recursos e materiais para compreender os conceitos ora discutidos mediante o estímulo do pesquisador;

c) descrever, compreender e interpretar como ele se apropria desses conceitos;

d) proporcionar aos estudantes e, em especial, ao aluno cego a perspectiva da construção do gráfico da função derivada a partir da função de origem.

Estudei tal ator em atividade, considerando o momento historicamente situado, tendo como ponto de partida a sala de aula e o possível processo de desenvolvimento e construção do seu conhecimento na interação com seus colegas e com o professor.

De acordo com os objetivos do presente trabalho, busco entender como Daniel desenvolve estratégias para aprender conceitos de Cálculo. Pensando nesse objetivo, elaborei um conjunto de atividades para nortear as ações dos alunos videntes em sala, pensando ainda que tais atividades seriam utilizadas por Daniel nesse mesmo contexto. Assim, os gráficos deveriam ser adaptados para a sua leitura táctil e as atividades lidas pelo seu leitor de tela e adequadas à versão do mesmo. Os Sistemas de leitura de tela DOSVOX e NVDA utilizados por Daniel serão apresentados no capítulo 5.

1.4 Estrutura da dissertação

Constituem esta dissertação algumas discussões sobre o ensino de Cálculo, questões legais que respaldam a inclusão em nosso país, discussões sobre a inclusão na educação, pressupostos teóricos baseados na teoria sócio cultural de L.S. Vygotsky e considerações acerca de todo o trabalho levado a cabo.

Esta pesquisa tem a seguinte estrutura:

Neste capítulo, intitulado "Transitando um pouco pelos caminhos da pesquisa", foi feita uma breve exposição do trabalho, da minha trajetória até o encontro com Daniel e meu envolvimento com a educação matemática inclusiva. Descrevi, em seguida, as justificativas, questões e objetivos que nortearam a pesquisa.

No segundo capítulo, intitulado "O ensino de cálculo", discutiu-se a situação do ensino de Cálculo atualmente, suas dificuldades e os caminhos para onde as pesquisas acenam. Fiz ainda uma pequena consideração sobre o uso de tecnologia, como, por exemplo, as planilhas eletrônicas como auxílio às aulas para organização de dados para alunos cegos. Também ressaltei alguns obstáculos de aprendizagem para alunos cegos em relação ao uso da notação matemática, visualização e aquisição de conceitos.

No terceiro capítulo, "Aspectos legais, inclusão e educação matemática de alunos cegos", foram destacadas as questões legais que amparam a inclusão de alunos com necessidades especiais na educação, as pesquisas brasileiras sobre ensino de matemática para alunos cegos e ainda a educação matemática desses alunos e seus desafios.

No quarto capítulo, “Vygotsky e a deficiência visual”, tratei da abordagem teórica que tem Vygotsky como principal aporte por entender que a aprendizagem se dá em um contexto histórico e culturalmente situado. Destacamos neste capítulo primeiramente o homem por trás da história, alguns constructos da teoria como a Zona de Desenvolvimento Proximal e algumas discussões sobre sua conceituação, a formação de conceitos e a interiorização.

No quinto capítulo “A pesquisa”, foram tratados o contexto do estudo e os procedimentos metodológicos adotados para a coleta de dados, bem como a sua importância para a pesquisa. Destaco os materiais e recursos disponibilizados ou utilizados por Daniel e descrevo alguns deles, como, por exemplo, os leitores de tela DOSVOX e NVDA. Apresento ainda a instituição e os sujeitos participantes da pesquisa.

No sexto capítulo, “Descrição e análise dos dados”, foram descritos e analisados os dados coletados, procurando um possível diálogo com os textos utilizados em nosso referencial teórico.

Por fim, no sétimo capítulo, “Considerações finais”, foram refletidas e destacadas algumas impressões e possíveis contribuições deste trabalho. Não no sentido de prescrever receitas, mas apontar possíveis caminhos a serem trilhados.

2 O ENSINO DE CÁLCULO

Não há saber mais ou saber menos: Há saberes diferentes.

Paulo Freire

Neste capítulo, apresenta-se um pequeno recorte das pesquisas na área da Educação Matemática, no Ensino Superior, que analisam questões do ensino de Cálculo. Procura-se também situar o contexto da visualização na Educação Matemática no Brasil e apontar algumas de suas tendências.

2.1 Principais discussões

Considera-se pertinente situar algumas discussões contemporâneas que permeiam o ensino-aprendizagem de Cálculo particularmente em nosso país. Não tem-se a pretensão de prescrever qualquer receita ou mesmo aprofundar nas discussões, pois o foco deste trabalho não é esse. Numa rápida busca na internet, buscando a palavra “Cálculo”, recebemos como respostas, dentre outras:

a) Tratar-se de operação da aritmética, tal como soma, subtração, multiplicação ou divisão; nome vulgar da disciplina ensinada no início de cursos de ciências exatas[1].
b) É um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada[2].

Para Stewart (2003, p. 3), o Cálculo é menos estático e mais dinâmico e trata de variação e de movimento. Sua origem sistematizada[3] remonta ao séc. XVII, com os ingleses Isaac Newton (1642-1727) e Isaac Barrow (1630-1677), o alemão Gottfried W. von Leibniz (1646-1716) e os franceses Pierre de Fermat (1601-1665),

[1] Disponível em: <http://pt.wiktionary.org/wiki/c%C3%A1lculo>. Acesso em: 14 jan. 2014
[2] Disponível em: < http://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo >. Acesso em: 14 jan. 2014
[3] Disponível em: < http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus.html#46>. Acesso em: 14 jan. 2014.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675), os quais, em pesquisas independentes com contribuições diversas, criaram as ideias que deram origem ao Cálculo que conhecemos hoje. Desses, Newton e Leibniz desenvolveram ideias através de relações entre derivadas e integrais. O primeiro chegou ao nosso tempo como o responsável pelos fundamentos do Cálculo, e o segundo, pelas notações que utilizamos ainda hoje.

Por ser a pedra angular nos ciclos básicos de diversos cursos superiores da grande área das ciências naturais e da terra, é objeto de estudos em diversos países. Em especial no ensino de Cálculo, percebemos que muitos trabalhos têm sido produzidos e significativas são as preocupações com esta disciplina, nas duas últimas décadas, visto o quadro preocupante que retrata o grande número de fracassos no seu ensino-aprendizagem (REIS, 2001; CAVASOTTO; PORTANOVA,2008; CAVASOTTO, 2010; SILVA, 2010; WROBEL, CARNEIRO; ZEFERINO, 2013).

David Tall[4] trata de pesquisas em torno das dificuldades dos alunos em conceitos básicos do Cálculo, de sua transição para a maneira formal de pensar em matemática, do uso da tecnologia e ensino de cálculo. Tall trouxe contribuições a este trabalho ao distinguir o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado, retratando que esse último é desenvolvido em disciplinas de cursos superiores, dentre elas o Cálculo.

Alguns autores, dentre eles Barufi (1999) e Rezende (2003), tratam em suas pesquisas dos altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo, com pesquisas realizadas em universidades brasileiras. Cada qual discute um viés, como, por exemplo, Barufi discute a natureza epistemológica, e Rezende, o seu aspecto metodológico. Contudo, o problema em questão é o mesmo: altos índices de reprovação. Dentre esses, Rezende (2003) destaca em seu trabalho, realizado com alunos videntes, que tal problema não possui cunho socioeconômico, como poderia se pensar, pois, nos países ditos “desenvolvidos”, a situação não é tão diferente. Seu trabalho elenca algumas respostas a questionamentos referentes ao motivo de tantas reprovações. O autor retrata ainda que o professor deve ser perspicaz e flexível para evitar a polarização entre Cálculo e Análise e procurar no próprio

[4] Professor da Universidade de Warwick e pesquisador em dducação matemática em uma importante área de pesquisa denominada “pensamento matemático avançado” cujo livro que trata do assunto teve primeira publicação em 1991. Informações obtidas na página do autor e disponível em: <homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/amt.html>. Acesso em: 15 jan. 2014.

Cálculo as metas de seu ensino e o nível de rigor desejado (REZENDE, 2003, p. 433).

Nesse ponto, concorda-se com Rezende quando discute a questão da flexibilidade. O que ensinar em Cálculo para alunos de um curso de Licenciatura, por exemplo? Como estabelecer quais as prioridades de ensino de Cálculo para alunos de um curso de Engenharia, Matemática, Licenciatura, entre outros? Qual dosimetria no tocante ao rigor deve ser dada a um curso de Cálculo? Quais os aspectos mais relevantes devem ser retratados de modo a fazer com que os alunos, de fato, entendam o que se deseja ensinar? Quais recursos utilizar para diminuir a aspereza de alguns temas? Essas questões, de certa forma, transitam livremente nas salas de professores de muitos cursos de Bacharelado e de Licenciatura em Matemática Brasil afora.

Rezende (2003) segue descrevendo que o primeiro conflito pedagógico nos cursos de Cálculo transita entre o que se pede o que se faz. O autor analisa que, geralmente, prevalece nas aulas a demonstração, e, nas provas, o uso da técnica, os cálculos de limites, derivadas e integrais. Assim, mais uma vez a supremacia é da técnica em detrimento do significado. Observamos que, tal como Rezende relata, estamos geralmente presos às “algebrizações”. As manipulações algébricas de limites, por exemplo, tem como requisitos conhecimentos de fatoração, produtos notáveis, simplificações etc. Tais requisitos, muitas vezes vistos de maneira superficial na escola básica (quando vistos), trazem como consequência algumas das dificuldades com o Cálculo retratadas no estudo de Rezende. Essas dificuldades são facilmente verificadas nos diversos cursos em que ministro aulas e, lamentavelmente, têm se acentuado.

Pode-se perceber aqui, de acordo com a opinião de Resende que, em algum lugar, distanciamo-nos do aspecto dinâmico e fluido do Cálculo, e suas ideias fundacionais, através das quais sua sistematização fora motivada no séc. XVII, ficaram para trás. Importante ressaltar ainda que o Cálculo denota em suas definições importante vertente simbólica o que, sobremaneira, valoriza ainda mais o pensamento algébrico. Kaput (1999 apud MATOS; PONTE, 2008), considera que o pensamento algébrico surge quando, através de processos de conjectura e argumentação, estabelecem-se generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Esses símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada

(SFARD; LINCHEVSKI,1994 apud MATOS; PONTE, 2008, p. 197). O Estudo de Matos e Ponte retrata a realidade da educação básica (com alunos do 8º ano) no tocante às dificuldades dos alunos com fundamentos de Álgebra e linguagem algébrica. Contudo, seu trabalho parece retratar boa parte da problemática vivida hoje na educação superior, pois tais dificuldades que se originam na educação básica assolam os cursos de Cálculo. Os autores asseveram que

> a resolução de tarefas com caráter exploratório e investigativo, envolvendo relações funcionais, e sua discussão parecem assim ter contribuído de forma assinalável para o desenvolvimento do significado mais rico da linguagem algébrica, nas suas diferentes utilizações, por parte dos alunos, promovendo o desenvolvimento do seu sentido do símbolo e a evolução do seu pensamento algébrico (MATOS; PONTE 2008, p. 229).

Como uma alternativa viável, observado o que os autores discutem, vislumbra-se a possibilidade de encontrar um meio termo entre a manipulação e demonstração, uma vez que o aluno deve reter aspectos formais do Cálculo e saber, ao mesmo tempo, operar algebricamente através de propriedades, realizando manipulações necessárias à solução dos problemas postos. Essa ideia é corroborada por Nasser (2007), quando essa autora retrata que o tipo de trabalho desenvolvido na educação básica não propicia em geral o desenvolvimento da capacidade de comunicar e expressar ideias ou mesmo justificar procedimentos e estratégias usadas na resolução de tarefas. Assim, visto que os alunos ingressam no Ensino Superior, em sua maioria, sem essas habilidades desenvolvidas, faz-se necessário que se estimule neles capacidades de modo que desenvolvam tais habilidades.

Outro debate acalorado gira em torno da incorporação das tecnologias na educação. A primeira questão a se pensar é, exatamente, o que é tecnologia? Atualmente, tal terminologia é associada quase que diretamente ao uso do computador. A sua inserção possibilita aos novos educadores refletir sobre a criação de novos espaços de aprendizagem, sendo que tais espaços trariam melhorias ao ensino da matemática e, em particular, ao ensino de Cálculo. Nesse ponto, diversos autores, dentre eles Villarreal (1999), Araújo (2002) e Zulatto (2002), discutiram, cada qual segundo uma perspectiva, o seu ensino ou sua aprendizagem. Para Villarreal (1999), a introdução de novas mídias reorganiza o pensamento matemático e faz com que os estudantes desenvolvam abordagens tanto visuais quanto algébricas que se configuram através de um jogo de conjecturas e refutações em que o processo de visualização é central na elaboração dessas conjecturas. Zulatto (2002) retrata em sua pesquisa a importância do uso dos softwares de geometria dinâmica na construção de figuras geométricas e realização de atividades investigativas, exploração e visualização de propriedades, o que estimularia os alunos. Araújo (2002) discute o uso da tecnologia segundo o viés da modelagem. Araújo (2002) assevera que toda mudança traz consigo alguns problemas e riscos, e, dentre esses, Blum e Niss (1991 apud ARAÚJO, 2002, p. 46) relacionam:

> 1) a possibilidade de atrofia das habilidades dos alunos em aritmética e geometria; 2) a desvalorização de habilidades de cálculos de rotina; 3) paradoxalmente, a realidade pode ficar mais distante da sala de aula, já que os computadores apresentarão um retrato da realidade e simulações vão substituir situações reais; 4) esforços e atividades intelectuais podem ser substituídos por mero apertar de botões; 5) o caso da matemática computacional pode ser superestimado, especialmente a matemática discreta e numérica; 6) o interesse crescente por computadores e sua crescente disponibilidade na sala de aula podem, em alguns casos, agir em detrimento da modelagem e aplicações no ensino de matemática.

Araújo menciona também a visão de Borba e Penteado (2001), na qual o uso de calculadoras gráficas e computadores enfatiza, além da multiplicidade de representações, a experimentação como um enfoque fundamental em ressonância com sua visão de conhecimento. Reitera ainda que, para esses autores, a produção de conhecimento depende do uso de determinada mídia, o que já ocorria com a oralidade e a escrita, mas que pode ser percebida nesse contexto por estarmos vivenciando agora o surgimento dessa nova mídia.

Rezende (2003, p. 19) reitera que “a questão que se apresenta então não é se “se deve usar ou não o computador para o ensino de Cálculo”, mas “**como**” e “**quando**” usar esta ferramenta”. Essa visão de Rezende está de acordo com o que Borba (2000 apud Araújo, 2002,p.49) assevera que “hoje é bem mais importante saber gerar um problema, delimitá-lo para que possa ser resolvido, do que saber uma técnica que resolva todos os problemas de uma dada classe de problemas matemáticos, por exemplo”. Pensado nas reflexões de Rezende e Borba, nesse contexto, a disciplina de Cálculo em um curso de formação de professores poderia desenvolver as habilidades discutidas por Borba e focar mais a formação do professor, tendo em vista a sua atuação na educação básica, para que o mesmo perceba o “como” e o “quando” ao invés de treiná-lo exaustivamente em abstrações e algebrizações.

Todavia, essa discussão tem como pano de fundo a sala de aula de alunos ditos “normais”. Em nenhuma dessas pesquisas, houve qualquer referência a situações que envolvam alunos com necessidades especiais de acesso ou mesmo de aprendizagem. Assim, quando tratamos da algebrização, da simbologia, do uso do computador ou mesmo da calculadora para auxiliar no processo de cálculo, temos sempre em vista alunos que enxergam. As pesquisas destacadas ressaltam a importância do uso do aspecto visual do Cálculo.

2.2 Tecnologia, ensino de Cálculo e a tendência da visualização na educação matemática no Brasil

O uso do recurso computacional e o das calculadoras científicas podem, além de motivar as aulas, facilitar a formação de conceitos e aprofundar a compreensão desses, visto que ambos integram aspectos gráficos, numéricos e geométricos de forma rápida e precisa, retirando o peso dos cálculos penosos. Contudo, não podemos perder de vista a importância que esses cálculos representaram no contexto histórico e que, por sua vez, estão por trás da programação das calculadoras e permeiam as construções gráficas realizadas pelos diversos *softwares* de geometria dinâmica. Tais ferramentas são úteis para explorar soluções de problemas e colaborarem na avaliação e validação de resultados. Nesse aspecto, o ensino de Cálculo poderia bem retratar as questões que permearam as necessidades que levaram ao seu desenvolvimento sem perder de vista parte de seu formalismo e o uso adequado de suas técnicas.

Importante ressaltar que, na maioria dos trabalhos destacados no item anterior, a palavra “visualização” tem sido utilizada para retratar um significativo aspecto reforçado pelo uso das tecnologias no que tange ao ensino de matemática e, em particular, de Cálculo.

A visualização é um instrumento importante no trato das funções e, particularmente, no ensino de Cálculo. Dada a evolução das ferramentas computacionais, o desenvolvimento de *softwares* de geometria dinâmica combinados com o barateamento das tecnologias que atingiram as salas de aula, tais recursos têm se tornado mais presentes nas aulas, principalmente no ensino superior. Percebemos hoje corriqueiramente alunos de graduação portando e utilizando *notebooks* em salas de aula, utilizando *softwares* de geometria dinâmica baixados gratuitamente da internet usados ainda para resolver exercícios de geometria e investigar situações em que a análise algébrica exigiria um esforço de cálculo mais arrojado, e ainda em diversas outras situações de pesquisa. Notamos também que muitos possuem calculadoras científicas ou gráficas dado o barateamento do custo dessa importante ferramenta. Sem dúvida, o barateamento da tecnologia e o acesso amplo à internet trouxe essa facilidade para a sala de aula.

Em seu trabalho, Machado (2008) reitera que a visualização é um instrumento que está emergindo como um aspecto importante do ensino e aprendizagem em matemática em especial quando utilizamos a ferramenta computacional para gráficos e manipulação espacial. O trabalho desenvolvido por Flores et al. (2012, p. 32) ressalta que a tendência atual é “a proposta da adoção do conceito de visualidade para problematizar o visual, a visão e a imagem, desconstruindo, desta forma, os princípios fundantes sobre os quais se construíram a noção de visão e percepção”. Tal noção é entendida por mim da mesma forma que foi apresentada por Walker e Chaplin (2002, apud SARDELICH, 2006. p. 451), quando afirmam que a visualidade é o olhar socializado. Por outro lado, a visão seria, para esses autores o processo fisiológico em que a luz impressiona os olhos. Portanto, compreendo que não há diferenças entre os sistemas ópticos de um indivíduo, em qualquer lugar do mundo, contudo há maneiras diferentes de esses indivíduos “enxergarem” um dado objeto, visto que cada um o fará de acordo com a sua cultura. No caso dos indivíduos cegos, embora não dispunham da visão, dispunham da socialização dessa visão, construída socialmente, construída por meio dos significados culturais que moldam a prática social da visão. Flores et al. (2012) destacam a década de 1980 como o marco a partir do qual as pesquisas em educação matemática se apropriaram do termo visualização, e nos parece suficiente para delinear o termo “visualização” como tem sido entendido na educação matemática no Brasil. Os autores retratam algumas pesquisas e suas relações com: a) o raciocínio visual para o ensino e aprendizagem de matemática (PRESMEG 1989; ZIMMERMAN; CUNNINGHAM, 1991; DREYFUS, 1991; ARCAVI, 1999); b) tecnologias e softwares matemáticos (NEMIROWSKY e NOBLE, 1997; BORBA; VILLAREAL, 2005); c) professores e suas crenças (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2010).

Zimmerman e Cunningham (1991, p. 3 apud FLORES, 2012, p. 34) definem visualização matemática como sendo “o processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) usando estas imagens de forma eficaz para a descoberta e compreensão da matemática”.

Para Dreyfus (1991), “visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência”. Contudo, Flores (2012, p. 42-43) destaca que, “a partir do trabalho de Foster (1988), o termo ‘visualidade’ vem sendo empregado em estudos visuais, e é descrito como sendo a soma de discursos que informam como nós vemos, olhamos as coisas e para as coisas”. Mais uma vez, percebemos que esse conceito discute e problematiza “o visual enquanto percepção natural e fisiológica e articula-se com práticas visuais no âmbito da história e da cultura” (FLORES, 2012, p. 43).

E para alunos não videntes? Quais seriam as dificuldades que tais alunos enfrentariam para “visualizar” determinados conceitos? Uma das indagações possíveis seria exatamente como propiciar a alunos com cegueira ou baixa visão as mesmas oportunidades de visualização, uma vez que não dispõem da visão para utilizar a ferramenta da mesma forma que o faz um aluno vidente. Neste trabalho, entenderemos ferramenta[5] como um utensílio, dispositivo intelectual ou mesmo um procedimento que melhore a capacidade ou propicie uma vantagem mecânica (física) ou intelectual para realizar uma tarefa.

Ao tratar o computador como uma importante ferramenta de apoio às atividades do cotidiano, encontramos ainda em seus softwares desdobramentos relevantes que auxiliam o trabalho e potencializam a capacidade de realizar tarefas e tornar conceitos mais acessíveis.

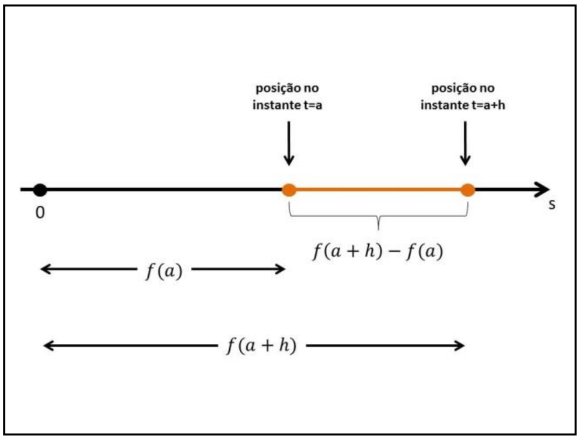
No caso do Cálculo, ao tratar do estudo das funções, de suas derivadas, de sua variação e mesmo do esboço dos gráficos, podemos pensar no conceito de reta tangente à curva em dado ponto, mais especificamente, em sua inclinação como uma ferramenta capaz de obter uma vantagem em relação ao cálculo da velocidade, por exemplo, através dos caminhos da álgebra, e ainda relacionar esse conceito a vários outros através das derivadas das funções relacionadas, tal como pensaram Barrow e Newton no séc. XVII.

Podemos ilustrar tal aspecto com um exemplo contextualizado na física. De acordo com Stewart (2013, p. 132), na equação $s=f(t)$, em que s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t, a função f que descreve o movimento é

[5] Wikipédia. Disponível em: <pt.wikipedia.org/wiki/Ferramenta>. Acesso em: 20 jan. 2014.

chamada de função posição do objeto. No intervalo de tempo entre t=a e t=a+h, a variação na posição será de f(a+h) – f(a), conforme apresenta a Figura 1:

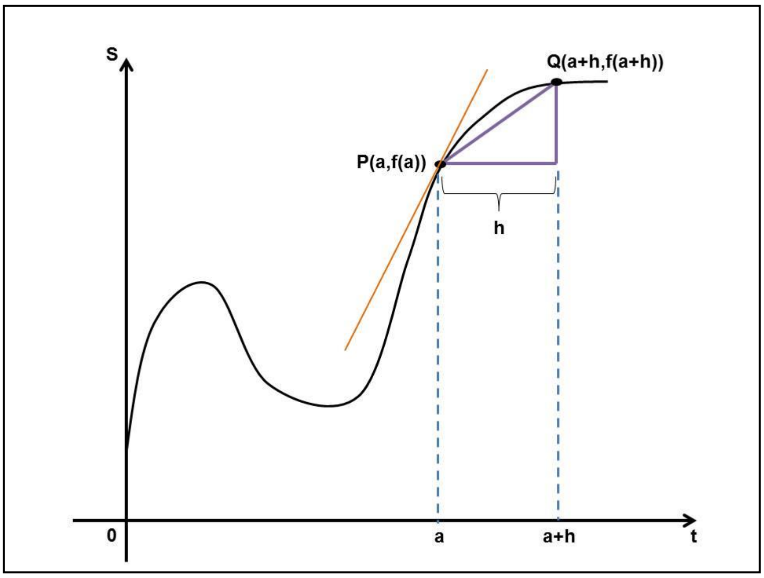
Figura 1 – Representação da variação da função f em função do tempo t



Fonte: Stewart (2013, p. 132), redesenhada pelo autor.

A velocidade média nesse intervalo é $velocidade\ média = \frac{deslocamento}{tempo}$ $= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, que é igual à inclinação da reta secante PQ na Figura 2

Figura 2 – Representação da velocidade média entre dois pontos distintos sobre a função f(t)



Fonte: Stewart (2013, p. 133) – redesenhada pelo autor.

Ainda conforme descreve Stewart, à medida que a velocidade média é calculada em intervalos cada vez menores [a, a+h] ou em outras palavras, fazendo h tender a zero, definimos a velocidade instantânea v(a) no instante t=a como sendo o limite dessas velocidades médias:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Assim, a velocidade no instante t=a é igual à inclinação da reta tangente em P. Relacionamos, dessa forma, duas variáveis: deslocamento e velocidade através de um limite. Geometricamente, temos a inclinação da reta tangente à curva nesse ponto como um aspecto de significativo valor para a interpretação visual dessa situação que envolve a função horária do deslocamento de um móvel.

De modo sintético, podemos dizer que o Cálculo é o estudo das funções. E funções também podem ser representadas através dos pares ordenados que atendam à sua lei de formação. Pensando assim, podemos utilizar planilhas eletrônicas devido à facilidade de programação, de acesso livre (para algumas) e por permitir, principalmente, a sua usabilidade via leitores de tela[6], para realizar algumas tarefas em nossos estudos. São, portanto, úteis para determinar pares ordenados necessários à confecção dos gráficos. Alguns cálculos podem ser feitos nessas planilhas com uma pequena experiência de programação e, acima de tudo, podem ser guardados e usados posteriormente. Os alunos videntes podem utilizar calculadoras eletrônicas e fazer contas com relativa facilidade, contudo os alunos cegos não dispõem dessas facilidades. Para tais alunos, temos a oferta das calculadoras científicas que verbalizam suas funções e operações, contudo são relativamente caras e não disponíveis no mercado brasileiro. Quando encontradas, verbalizam apenas palavras em língua inglesa. Assim, a alternativa viável é justamente utilizar o computador para realizar as tarefas que a calculadora faz. Nem todas as funções disponíveis nas calculadoras estão também disponíveis nas planilhas eletrônicas e isso constitui uma dificuldade para os alunos cegos. Elas também são não triviais e não têm teclas de acesso rápido como nas calculadoras.

[6] O leitor de tela é um software usado para obter resposta do computador por meio sonoro, usado principalmente por deficientes visuais. Também pode ser usado apenas para uma maior eficiência e conforto do usuário. Disponível em: <www.pt.wikipedia.org/wiki/Leitor_de_tela>. Acesso em: 23 jan. 2014.

Devem ser acessadas e programadas nas células das planilhas através do uso de funções pré-programadas. Mesmo assim, a autonomia que pode ser oferecida a eles com o uso das planilhas eletrônicas é algo que deve ser considerado, pois, assim, eles podem explorar e simular situações sem a necessidade ou a dependência de terceiros.

Durante o período de estudo que abrange a educação básica, especificamente no que tange à álgebra, podemos utilizar ábacos, materiais manipuláveis para fazê-los compreender determinadas relações como produtos notáveis e operações algébricas usando materiais concretos disponíveis no mercado. À medida que avançamos no Ensino Médio, ao lidar, por exemplo, com o estudo das funções, esbarramos nos primeiros problemas. Tais assuntos têm forte conotação visual e boa parte dos professores explora tal aspecto sem relevar muito o lado concreto. Para os alunos cegos, é fundamental que eles dispunham de um plano cartesiano em que possam tatear e experimentar materialmente as representações feitas no quadro. Logo, vejo que a combinação do uso da tecnologia juntamente com o uso de materiais manipuláveis constitui um caminho interessante para o ensino de funções. Tudo pode ser feito utilizando-se as planilhas e, em seguida, representados no plano cartesiano feito em algum material que possibilite o seu registro e fixação.

O uso da Tecnologia para o ensino de cegos não é novidade recente em nosso país. Borges (2009 apud RODRIGUES, 2010, p. 31) retrata que o ano de 1970 representa uma primeira tentativa de levar a tecnologia de computação para pessoas cegas no Brasil com o engenheiro Henrique Rosenfeld, então funcionário da Burroughs Corp. (atual Unisys), que ministrou para dois deficientes visuais um curso informal de programação, o qual permitiu que eles fossem contratados como estagiários do SERPRO. Contudo, poucas experiências têm sido retratadas na literatura quando tal tecnologia é utilizada em cursos na educação básica e menos ainda quando se trata da educação superior. Este trabalho tem por um de seus objetivos fomentar algumas alternativas viáveis do uso destas tecnologias no auxílio da aprendizagem desses alunos.

Diante do desafio de romper com o paradigma estabelecido de que a dificuldade de aprendizagem está no aluno e não em nós, na nossa incapacidade em provermos os meios e recursos necessários à sua inclusão, partiu-se da compensação social a que se refere Lev Vygotsky, cujo concepto se funda na reação do sujeito diante da deficiência, no sentido de superar suas limitações com base em instrumentos artificiais, como a mediação simbólica.

Partido destas reflexões, passou-se a concentrar parte dos esforços educacionais em buscar maneiras de tornar acessíveis os conhecimentos do Cálculo ao Daniel, tentando contornar as dificuldades de visualização e, de certa forma, fazê-lo “enxergar” os objetos através de outros sentidos que não a visão. Falarei um pouco dessa experiência no capítulo 6. Por ora, desejo situar a problemática a partir de seu aspecto legal. O que tem sido feito e qual o amparo que a legislação propicia a alunos com necessidades especiais de aprendizagem para seu acesso e permanência no ensino superior?

3 ASPECTOS LEGAIS, INCLUSÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE ALUNOS CEGOS

> A teoria sem a prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade
>
> Paulo Freire

As discussões no mundo, e em particular em nosso país, acerca dos direitos iguais para todos e do espírito democrático, trouxeram alguns avanços em termos de legislação quando se trata da inclusão de pessoas com necessidades especiais no seio da sociedade. Quando fala-se em discussões recentes no mundo, pensa-se particularmente a partir do advento da Revolução Francesa (1789-1799) e suas decorrências, cujos ideais de liberdade, igualdade e fraternidade só se fizeram presentes, em termos legais, a partir da Declaração de Direitos Humanos promulgada em 1948 na Assembleia Geral das Nações Unidas. Entre se fazer presente na legislação e se fazer presente nas atitudes das pessoas, no seio da sociedade, temos de considerar pequenos avanços no sentido da inclusão de fato.

3.1 Aspectos legais

O Sujeito cego atualmente (Brasil,1988,1994,1996,1999,2001,2007) é considerado, pela legislação em vigor, um aluno com necessidades especiais (Brasil,1989,2008) que demanda profissionais especializados, recursos e equipamentos disponíveis nas escolas onde são incluídos. O conceito de cegueira considerado neste trabalho está de acordo com Martín e Ramirez (2003), caracterizado pela total ausência de visão ou a simples percepção de luz. Para esses autores, vários países ocidentais consideram que um olho é cego quando seu campo visual se encontra reduzido a 20°. Muitos foram os avanços legais implementados para fazer cumprir a nossa carta magna que preconiza direitos iguais a todos. De acordo com a conceituação atual elaborada pela OMS – Organização Mundial de Saúde, considera-se que a educação é uma das formas de participação das pessoas na sociedade, sendo que o grau de participação de uma pessoa nos âmbitos sociais depende, diretamente, das condições criadas e oferecidas pela sociedade (TORRES, 2002). Torres ainda aponta que a referência à diversidade na educação, como necessidades educativas especiais, surgiu no Brasil a partir dos anos 1990, nas discussões referentes à atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Anteriormente a esse período, podemos determinar como marcos mundiais, em termos de discussão de igualdade de direitos, a Declaração Universal dos Direitos Humanos (1948), a Declaração dos Direitos das Pessoas Deficientes (1975) e a Declaração de Salamanca (1994). No panorama internacional, podemos citar ainda a convenção de Guatemala (1999), a Declaração de Washington (1999), a Declaração de Montreal sobre inclusão (2001), a Declaração de Madri (2002), de Caracas (2002), de Sapporo (2002).

A síntese de Mazzotta (1996, p. 27-35) nos parece conveniente para precisar, a partir do ano de 1993, o período de ações internacionais, direcionadas à inclusão educacional e com repercussão nas ações governamentais brasileiras, parecendo mais expressivas a partir do ano de 1999. Em princípio, podemos considerar a Constituição Federal, Título VIII, artigos 208 e 227 como a primeira e maior garantia legal de direitos à educação de pessoas com necessidades especiais em nosso país. Em seguida, a Lei nº. 7.853/89 que materializa esses direitos e dispõe sobre o apoio às pessoas com deficiência, sua integração social, assegurando o pleno exercício de seus direitos individuais e sociais. Alguns anos depois, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, Lei n. 9.394, 1996) estabelece, juntamente com seus Parâmetros Curriculares Nacionais para a Educação Especial (PCN), os rumos da educação em nosso país. Já a Lei nº 10.098/00 dispõe sobre a promoção da acessibilidade das pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade reduzida. No ano seguinte, com a aprovação do Plano Decenal de Educação para Todos e a Lei nº. 10.172/01 tem-se estabelecidos objetivos e metas para a educação de pessoas com necessidades educacionais especiais.

Algo mais recente, a Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência, tratado internacional, aprovado na assembleia geral da ONU em 13 de dezembro de 2006, entrou em vigor em 3 de maio de 2008. O Governo Brasileiro, signatário do tratado, asseverou o cumprimento, na íntegra, de todos os seus artigos e protocolos através de emenda constitucional por meio do Decreto nº 6949 de 25 de Agosto de 2009[7]. A Convenção não criou direitos novos ou especiais para as

---

[7] BRASIL. Decreto n. 6949, de 25 de Agosto de 2009. Promulga a Convenção Internacional sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência e seu Protocolo Facultativo. Disponível em:

pessoas com deficiências, mas procurou facilitar o exercício dos direitos, em especial o da igualdade. Nesse documento, pessoas com deficiência são definidas como

> aquelas que têm impedimentos de longo prazo de natureza física, mental, intelectual ou sensorial, os quais, em interação com diversas barreiras, podem obstruir sua participação plena e efetiva na sociedade em igualdades de condições com as demais pessoas (BRASIL, 2009).

No entanto, apesar de tantos dispositivos legais garantirem os direitos de acesso e permanência à educação apenas após o ano de 1996, as instituições de ensino superior começaram a discutir tal assunto, em razão das responsabilidades que a nova LDB implicou. O direito ao ensino, sob o aspecto da acessibilidade, foi contemplado na parte referente ao ensino superior pela Portaria 1.679/99 MEC. Os sistemas de ensino, nos termos da Lei 10.098/2000 e da Lei 10.172/2001, devem assegurar a acessibilidade aos alunos que apresentem necessidades educacionais especiais, mediante a eliminação de barreiras arquitetônicas urbanísticas, na edificação – incluindo instalações, equipamentos e mobiliário – e nos transportes escolares, bem como de barreiras nas comunicações, provendo as escolas dos recursos humanos e materiais necessários (TORRES, 2002).

A vigente Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional, Lei nº 9.394, de 20 de sezembro de 1996, trata, especificamente, no Capítulo V, da Educação Especial. Define-a por modalidade de educação escolar, oferecida preferencialmente na rede regular de ensino, para pessoas com necessidades educacionais especiais. Assim, tal Lei perpassa transversalmente todos os níveis de ensino, da educação infantil ao ensino superior. Essa modalidade de educação é considerada como um conjunto de recursos educacionais e de estratégias de apoio que estejam à disposição de todos os alunos, oferecendo diferentes alternativas de atendimento.

Apesar de a LDB preconizar a inclusão desde 1996, a inclusão e acesso ao ensino superior é uma experiência recente em nosso país. Um grande avanço em termos legislativos aconteceu com a promulgação do Decreto nº 7611 de 17 de novembro de 2011[8], que dispõe sobre a educação especial e o atendimento

---

<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2009/decreto/d6949.htm>. Acesso em: 27 de jul. 2014.

[8] BRASIL. Decreto n. 7611, de 17 de novembro de 2011. Dispõe sobre a educação especial, o atendimento educacional especializado. Disponível em:

educacional especializado. Tal Decreto determina a complementação da formação dos estudantes com deficiência, por meio de serviço de apoio especializado, tendo por base suas necessidades individuais. No ensino superior, o contingente de 5,2 mil deficientes visuais simboliza somente 0,09% dos 5,8 milhões de universitários, segundo o Censo da Educação Superior de 2008. Já no Censo da Educação Superior de 2011, esses estudantes representaram um contingente de 9,3 mil deficientes visuais num total de 6,7 milhões de universitários, o que representa 0,13% desse total. Se retornarmos um pouco no tempo, por exemplo, ao ano de 2005, não dispomos de dados oficiais relativos ao acesso de portadores de necessidades especiais nas sinopses estatísticas oficiais da Educação Superior[9]. Ressaltamos ainda que os dados apresentados no Censo não fazem distinção entre cegos e pessoas com baixa visão ou ainda outras deficiências visuais. É de se imaginar que a quantidade de cegos, nesse contingente, seja bem menor.

3.2 Incluídos ou integrados?

O conceito de inclusão tem sido exaustivamente tratado na literatura especializada. Em termos amplos, considera-se que o conceito de “Inclusão”, que ganhou fôlego a partir da conferência da Unesco em Salamanca em 1994 (UNESCO, 1994), representa uma evolução face ao conceito de integração na medida em que a inclusão significa um modelo de pertinência total à instituição, enquanto a integração se refere à adaptação a uma instituição inicialmente estranha.

As controvérsias entre os verbetes inclusão e integração são muitas, e uma delas é a semelhança semântica para as ações que correspondem a cada denominação. No dicionário Aurélio, observa-se, por exemplo, que incluir significa “conter ou trazer em si, compreender, abranger, fazer tomar parte, inserir, introduzir”. No mesmo dicionário, verifica-se também que integrar refere-se a “tornar inteiro, completar, integralizar, fazer parte de, juntar, incorporar-se” e, ainda, pode-se

---

<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2011/Decreto/D7611.htm#art11>. Acesso em: 27 de jul. 2014.

[9] BRASIL. INEP – **Sinopses Estatísticas da Educação Superior – Graduação**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/superior-censosuperior-sinopse>. Acesso em: 2 jun. 2013.

considerá-lo sinônimo do verbete inteirar, esse último com o mesmo significado de tornar inteiro (FERREIRA[10], 2006).

O verbo incluir, do latim *includere*, no sentido etimológico significa fazer parte ou participar de. Para o presente trabalho, o conceito de inclusão é o de Santos (2003), que implica no desenvolvimento de políticas, culturas, práticas que minimizem os obstáculos para a aprendizagem e contribuam para o aumento da participação dos alunos dentro e fora da escola, portanto vai além da convivência física inevitável no mesmo espaço e alcança as relações mais igualitárias nas sociedades de forma a combater práticas excludentes.

Rodrigues (2004) debate as duas posições vigentes: em uma, considera-se que as condições de sucesso da inclusão estão, sobretudo, situadas nas capacidades individuais da pessoa, isto é, o seu nível dependeria, sobretudo, da maior ou menor capacidade adaptativa do indivíduo. Na outra perspectiva, considera-se que a simples existência de condições favoráveis do envolvimento para a inclusão é o fator determinante para que ela se faça com sucesso. Minha percepção é de que nem uma posição nem outra correspondem à realidade: o processo de inclusão é determinado pela interação entre as variáveis individuais e as do envolvimento. Ninguém é aceito só pelas suas capacidades individuais nem contra as suas capacidades individuais, só pelas características do meio nem contra as características do meio. Os dois lados devem se mover, um para o outro.

Assim como retrata Rodrigues (1986 apud RODRIGUES, 2004,p.3), “o processo de Integração/Inclusão é pois um processo interativo e dinâmico resultante da influência mútua de múltiplos fatores”. Fica implícita a ideia de que a inclusão é um processo bilateral, como bem complementa Sassaki:

> pelo qual a sociedade se adapta para poder incluir, em seus sistemas sociais gerais, pessoas com necessidades educacionais especiais e, simultaneamente, estas se prepararam para assumir seus papéis na sociedade (SASSAKI, 1997, p. 41).

Essa posição é corroborada por Diniz (2007 apud BAMPI; GUILHEM; ALVES, 2010), quando afirma que o modelo social da deficiência, que sustenta a não relação direta de causalidade entre lesão e deficiência, desloca a discussão sobre saúde e direitos de pessoas deficientes para o terreno da organização social e política de

---

[10] FERREIRA, Aurélio B. H. **Dicionário Aurélio Básico da Língua Portuguesa**. 3. ed. Curitiba: Positivo, 2006.

determinada sociedade. Tal terminologia segue a tendência britânica, alinhada com o modelo social da deficiência, em contrapartida da tendência estadunidense, pautada na plataforma dos direitos civis. Segundo Bampi, Guilhem e Alves (2010), o modelo social retrata a deficiência como fruto das desvantagens ou restrições provocadas pela organização social contemporânea que pouco ou nada considera aqueles que possuem lesões físicas e os excluem das principais atividades da sociedade. No entendimento do modelo social, a lesão passa a ser entendida como uma característica corporal, doenças crônicas, desvios ou traumas, e a deficiência, como o resultado da discriminação sofrida pela pessoa em face de uma sociedade ainda desorganizada ou pouco sensível à diversidade. Estaria, assim, mais identificada com a ideia de desvantagem. Nesse caso, por exemplo, uma pessoa cega terá sua diferença corporal transformada em uma restrição de habilidades, caso os diversos ambientes que frequenta estejam, em maior ou menor grau, adaptados à sua característica corporal que demanda certas particularidades. Corroboramos, assim, com a ideia de que atuação do Estado, o respeito aos direitos humanos e a forma de adequação da sociedade contribuem para a inclusão dessas pessoas no seio da sociedade. No caso dos cegos, ambientes adaptados à sua circulação, orientação em Braille (sistema de escrita por pontos em relevo), leitores de telas etc.

Para Leitão e Fernandes (2011), em relação aos cegos, tem-se o uso universal do Sistema Braille como demarcador conceitual entre esses indivíduos e aqueles considerados com baixa visão. Os cegos são, portanto, aqueles cuja visão de perto é insuficiente para a vida escolar e leitura em geral, necessitando do uso do Sistema Braille. Pedagogicamente, delimita-se como cego aquele que, mesmo possuindo visão subnormal, necessita de instrução em Braille, e, como portador de visão subnormal, aquele que lê tipos impressos ampliados ou com o auxílio de potentes recursos ópticos[11].

3.3 As pesquisas brasileiras sobre o ensino de matemática para cegos

Inicialmente, procurei me situar no campo de pesquisa que aborda a problemática do ensino de cálculo para alunos cegos e, para isso, realizei uma

[11] BRASIL. Instituto Benjamin Constant. CONDE,A.J.M. Definindo a cegueira e a visão subnormal. Disponível em: <http://www.ibc.gov.br/?itemid=94>. Acesso em: 17 de jun. 2013.

busca no banco de teses da CAPES, no primeiro semestre de 2013, utilizando os seguintes termos: Ensino de Cálculo, Aprendizagem Mediada, Ensino de Matemática para Cegos no primeiro semestre de 2013.

É notória a escassez de trabalhos que relacionam ensino de Cálculo em classes com alunos cegos. Mudando a busca para "ensino de matemática para cegos", encontramos algumas pesquisas. A maioria dessas pesquisas (MARCELLY, 2010; SILVA, 2010b; CARVALHO, 2008; FERNANDES, 2008; RODRIGUES, 2010) retrata o cotidiano da sala de aula e propõe recursos para o ensino de matemática na educação básica para alunos cegos. Calore (2008) retrata questões relativas à inclusão no tocante a políticas educacionais, à transição entre integração e inclusão, impactos da cultura e aspectos relativos ao desenvolvimento e uso de materiais específicos para o ensino de Matemática para cegos. Já Pereira (2012) trata da questão do ensino de Geometria para alunos com deficiência visual, e Fernandes (2004; 2008) retrata a apropriação do conceito de simetria para alunos sem acuidade visual e processos de ensino e de aprendizagem de conceitos de geometria. O trabalho de Marcone (2010) trouxe importantes elementos para nossas reflexões ao descrever, por meio de uma narrativa, a trajetória de uma estudante que ficara cega ao longo de seu percurso acadêmico em um curso de matemática. Algumas discussões do trabalho de Marcone ecoam também neste trabalho, fazendo-se presentes, por exemplo, quando destaca

> Ah, mas não é mudar de curso; acho que ela tem o direito de fazer um curso de Matemática. Não é porque ela é cega que não vai fazer Matemática. E acho que um dos problemas é esse mito que já existia e que se consolidou dentre a maioria dos matemáticos, que há conteúdos da Matemática que não são possíveis de ser ensinados para pessoas cegas. Aí eu pergunto: não são possíveis de se ensinar para pessoas cegas por quê? Porque a gente não sabe ensinar. O que este conhecimento demanda para que uma pessoa cega não possa compreendê-lo? Por isso fico pensando que talvez seja mais difícil se ensinar matemática para uma pessoa cega de nascença do que para uma pessoa que já foi vidente durante tantos anos. Mas não sei, são apenas pensamentos (MARCONE, 2010, p. 40-1).

De todos os trabalhos pesquisados, os que mais se aproximaram do nosso objeto de pesquisa foram esses últimos. Contudo, é importante ressaltar que, com exceção da pesquisa de Marcone, as demais pesquisas (Pereira e Fernandes) retratam o ensino de matemática no cenário da Educação Básica. Como nossa atenção esteve voltada para o Ensino Superior, as pesquisas que retratam especificamente o ensino de Cálculo, foco de nosso trabalho, e suas discussões, foram tratadas no Capítulo 2.

Em se tratando do uso de tecnologias e artefatos tecnológicos, destacamos a tese de Borges (2009), que trata das diferenças na vida dos cegos brasileiros na presença da tecnologia e as vantagens de seu uso em favor deles. Em seu trabalho, ele retrata ainda a trajetória desde o aparecimento do sistema Braille até o advento do uso maciço do computador e os leitores de tela. Destaca como o computador modificou a forma da pessoa cega se relacionar com o mundo e ainda o uso da internet como parte dessas mudanças. Nesse caso, a pesquisa de Borges nos chamou a atenção, uma vez que Daniel faz uso dessas tecnologias e, portanto, conhecer outra realidade foi fundamental para as nossas reflexões.

No entanto, apesar de pessoas cegas terem acesso a recursos computacionais, e esses recursos, dotados de *softwares*, terem condições de ler textos via leitores de tela, como o DOSVOX[12] e o Non Visual Desktop Access (NVDA), para citar apenas dois, tais programas ainda não são capazes de verbalizar ou mesmo descrever gráficos ou representações pictóricas.

Sendo assim, é importante que sejam disponibilizados ao cego outros canais de acesso à informação, utilizando, por exemplo, a audição e o tato. Borges (2009) destaca o uso de livros em formatos Daisy[13] e gravadores de voz como auxiliares do processo instrucional. Ressalto ainda que essas ferramentas podem constituir outros recursos de memória que não apenas os penosos registros em Braille em seus cadernos de notas. Em se tratando da visualização, discutiremos a seguir algumas impressões.

---

[12] O DOSVOX é um sistema livre, para microcomputadores da linha PC, que se comunica com o usuário através de síntese de voz em português, viabilizando, desse modo, o uso de computadores por deficientes visuais, que adquirem assim, um alto grau de independência no estudo e no trabalho. Disponível em: <http://intervox.nce.ufrj.br/dosvox/>. Acesso em: 10 jun. 2013. Tratarei mais detalhadamente de seu uso no capítulo 4.

[13] DAISY (Digital Acessible Information System ou sistema de informação digital acessível) é formato aberto, padrão técnico para livros digitais, periódicos e textos computadorizados baseado em formato MP3 e XLM. Dentro dele, é possível a navegação dentro de uma estrutura sequencial e hierárquica do conteúdo do documento ou livro. Com ele, por exemplo é possível navegar por uma enciclopédia. Disponível em: < http://en.wikipedia.org/wiki/DAISY_Digital_Talking_Book>. Acesso em: 29 jul. 2014.

3.4 A educação matemática de alunos cegos – a visualização e seus desafios

André Leroi Gourhan, etnólogo, antropólogo, paleontólogo e pré-historiador, procurou interpretar a história do homem por meio das imagens deixadas por eles. Argumentava que o “desenho é a mão que fala”. Assim, o texto e a imagem são uma única coisa, pois é possível tanto escrever com imagens como desenhar com palavras. A imagem é um importante recurso para explicitar ideias, o pensamento e a visão. Elas são representações visuais associadas à pintura, desenho, esculturas e fotografias. É uma forma de registro que envolve a interiorização e a contemplação, concedendo significados (MACHADO, 2008, p. 102). Assim, entendemos que “desenhar com palavras” é um importante recurso que podemos utilizar no ensino/aprendizagem de matemática. Muitos são os conceitos matemáticos cuja linguagem pictórica é fundamental para seu entendimento. Contudo, a forma correta (se é que existe uma) de explicar dado conceito, de modo que o seu entendimento seja compreendido, da mesma forma, por todos, torna-se o centro da questão.

Atualmente, muitos livros em Braille trazem as imagens descritas em quadros próximos a elas. Em visita ao Centro de Atendimento Pedagógico para Pessoas com Deficiência Visual (CAP) de Montes Claros, pude conhecer de perto o trabalho de tradução de livros para o Braille, voltados para a educação básica em seus diversos conteúdos. Um hercúleo trabalho realizado por dedicados servidores que se desdobram para conseguir atender à imensa demanda por material didático para alunos cegos, matriculados nas escolas públicas estaduais de uma parte expressiva do estado de Minas Gerais. Naquela visita, conheci o modo como uma imagem é descrita para um cego. Nada fácil ou mesmo simples. Os digitadores descrevem a imagem que é avaliada por um revisor cego. Ele, com a sua experiência, avalia se a figura ou imagem carece ainda de alguma complementação de descrição ou não face a imagem mental que faz dela. Caso ele não entenda o que está descrito, conversa com o digitador para idealizar a melhor descrição possível da imagem. Descrever figuras e paisagens requer uma dose de criatividade significativa por parte dos digitadores. Isso sem contar, ainda, que a descrição, por mais técnica que seja, é uma interpretação da visão que ele tem da imagem. Um exercício complexo, mas possível. Fiquei imaginando como seria representar gráficos ou situações que envolvem intersecções entre funções, elementos de Geometria Plana, Geometria Espacial.

Pensando apenas no livro didático, este constitui um importante aliado para a autonomia de um aluno cego. Contudo, torná-lo disponível é um desafio a ser superado, uma vez que, em especial, a Matemática é repleta de representações visuais e formulação escrita própria.

Do ponto de vista do livro didático, o livro acessível através do Braille constitui também um desafio para o aluno e para o professor, pois ambos poderão ter “visões” diferentes do mesmo objeto. Percebi isso na visita ao CAP. Coincidentemente, no dia de nossa visita, um livro de matemática para a educação básica estava sendo traduzido para o Braille, portanto foi possível observar como funciona o trabalho de tradução de uma imagem. Durante alguns minutos, fiquei observando a tradução de certa imagem daquele livro. No meu modo de ver, a descrição daquela imagem pelo digitador não correspondia, naquele momento, com todos os detalhes que de fato estavam descritos no livro que ele traduzia. Não desejo, de forma alguma, discutir o erro ou o acerto (se é que podemos dizer que existe um ou outro). Apenas discuto a “visão” do objeto. O digitador, na maioria das vezes, é um servidor que não possui a formação em Matemática. Por outro lado, a formação em Matemática do digitador não garante, por si só, a fidelidade à imagem, uma vez que o revisor pode não tê-la. Essas ponderações são feitas para algumas questões dos livros didáticos da Educação Básica. Mas e se pensarmos no Cálculo, Análise ou mesmo nas diversas e particulares notações matemáticas comuns no Ensino Superior? Como tratar esses conteúdos tão específicos com a descrição das imagens e linguagem Matemática própria? Essas indagações me incomodaram e muito me intrigou em saber se havia alguma metodologia própria para realizar esse processo de forma metódica. Em rápida busca na internet, encontrei pouca coisa que pudesse elucidar minhas indagações. Nesse caso, percebo um desafio grande ainda para a educação matemática no Ensino Superior que temos de discutir, não tendo, ainda, superado os desafios da educação básica, principalmente no que tange ao registro escrito.

A escrita Braille, no meu modo de ver, é complexa do ponto de vista dos entes matemáticos necessários à erudição matemática no ensino superior. Carece ainda de uniformidade e padronização de registros na língua portuguesa. Em se tratando da linguagem matemática simbólica utilizada no Ensino Superior, temos um padrão, adotado em países de língua inglesa: o código de Nemeth. Essa codificação foi criada pelo matemático e cientista da computação Abraham Nemeth e, em sua homenagem, recebe o nome de Nemeth Braille. O Código Braille de Nemeth para Matemática[14] é um código Braille para decodificar símbolos matemáticos e notação científica linear usando a célula Braille padrão de seis pontos para ser utilizado por pessoas com deficiência visual. Foi utilizado pela primeira vez em 1952 e, em 1992, foi integrado ao sistema de Braille Inglês. No Brasil, o Código de Nemeth é pouco difundido ou mesmo desconhecido. Por exemplo, um símbolo de integração em Braille no Código de Nemeth é representado por ! (exclamação) e um símbolo de fatorial, que deveria ser a exclamação, é representado por & (e). Portanto, temos de avançar ainda nesse campo para discutir a forma adequada de trabalhar essa linguagem, de modo que os cegos brasileiros possam se apropriar dela, desenvolver a sua própria ou ainda criar uma via intermediária entre o que existe e o que seja melhor em termos de usabilidade.

Devemos refletir ainda que no campo da educação matemática, carecemos de informações mais específicas sobre como o processo cognitivo das pessoas com necessidades especiais se dá. Saber como proceder de maneira a tornar a aprendizagem eficaz, do ponto de vista pedagógico, ainda é um desafio substancial. Os estudos atuais indicam a necessidade de adaptação e utilização de recursos materiais manipulativos, tanto para desenvolver suas habilidades quanto seu processo cognitivo. Concordamos com Fernandes, quando assevera:

> O modo de trabalhar Matemática com os cegos pode facilitar a reflexão e busca para outros grupos de educandos com necessidades especiais (guardadas as diferenças) e inclusive a Didática da Matemática em geral, pois, se a metodologia de investigação é análoga, as soluções, podem ser indicadoras de soluções a seguir em cada caso. Dentro desta perspectiva, cada aprendiz é percebido como um aprendiz com necessidades especiais cabendo à Educação Matemática, como a todas as áreas da Educação, estruturar-se para potencializar suas competências e habilidades, e fazer desaparecer a palavra e o conceito “deficiente” (2004, p. 219).

Tornar algo “visível” para um cego é um desafio singular. Primeiramente, devemos definir o que é “ver” para um cego. Nesse sentido, particularmente entendo que ver é impressionar. Na Wikipédia[15],

---

[14] [Nemeth Braille code for mathmatics]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Nemeth_Braille>. Acesso em: 01 ago. 2014.
[15] WIKIPEDIA. **Visão**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Vis%C3%A3o>. Acesso em: 13 jul. 2014.

> ver com os olhos significa usá-los em prol da visão, enquanto o cérebro é a ferramenta essencial para processar os estímulos provenientes dos olhos criando a visão. Por isso, no sentido mais amplo da palavra visão (de percepção visual), esta requer a intervenção de zonas especializadas do cérebro no córtex visual que analisam e sintetizam a informação recolhida em termos de forma, cor, textura, relevo, etc.

Ver, para um cego, passa por outros órgãos distintos dos olhos. Tanto o tato quanto a fala, ruídos e os sons em geral são aspectos importantes na vida deles. Em se tratando da educação matemática de alunos cegos, para o professor, é importante desenvolver a habilidade necessária para falar de forma que o cego compreenda o que ele está apresentando. Mais que isso, é importante ouvir o que o cego tem a dizer sobre o que ele ouviu. Através da fala, ele externaliza aquilo que está em formação na sua mente. Por meio desse processo de diálogo, “desenhamos com palavras” as imagens para que o cego, à sua maneira, construa a imagem mental do objeto descrito. Heid (1990 apud MACHADO, 2008, p. 32) relata em sua pesquisa que, “quando os estudantes falam sobre os conceitos matemáticos, estão realmente aumentando a compreensão do conceito. A linguagem permite que eles reflitam e revisem seus pensamentos” (p. 195).

Dentre os estudiosos dessa relação, destacamos Vygotsky como um autor com o qual desejamos dialogar a respeito de questões desta pesquisa.

4 VYGOTSKY E A DEFICIÊNCIA VISUAL

> Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.
>
> Paulo Freire

O quadro teórico escolhido para a análise dos dados desta pesquisa é a teoria sócio-histórico cultural de Lev S. Vygotsky, por entender que a inclusão de pessoas com deficiência na educação, qualquer que seja o nível, requer a troca de saberes e experiências onde todos aprendem. Tal como Vygotsky, defendemos a educação inclusiva e acessível, entendendo que todos, independente de sua desvantagem, têm a mesma capacidade de desenvolvimento.

4.1 O homem por trás da história

Entendo que o trabalho e a influência do pensamento de Vygotsky, tendo por origem as práticas sociais, é relevante na busca por uma compreensão do que seja a aprendizagem matemática de estudantes com necessidades especiais. Dentre os diversos autores que discutem situações de aprendizagem de estudantes com necessidades especiais, Vygotsky discute o seu aspecto histórico social e cultural. A produção efetiva de L. S. Vygotsky em psicologia restringe-se a um curto período de 10 anos, que vai de 1924, quando foi convidado a trabalhar no Instituto de Psicologia de Moscou, a 1934, ano de sua morte prematura aos 37 anos. Grande parte de sua obra foi produzida nesse curto espaço de tempo, e sua genialidade, poder de síntese e análise de problemas complexos são reconhecidos desde aquele tempo, como retrata, de forma acalorada, Alexander R. Luria:

> Não é exagero dizer que Vygotsky era um gênio. Em mais de cinco décadas de trabalho no meio científico, nunca mais encontrei qualquer pessoa cujas qualidades se aproximassem das de Vygotsky: sua clareza mental, sua habilidade na identificação da estrutura essencial de problemas complexos, a extensão de seu conhecimento em vários campos, e a capacidade que tinha de antever o desenvolvimento futuro de sua ciência (1992 p. 43).

Grande colaborador juntamente com Luria e Leontiev, ele integrou uma nova equipe de trabalho no Instituto de Psicologia de Moscou, rompendo com a postura tradicional até então adotada pelos psicólogos de sua época. Vygotsky, como retratou Luria, começou seu trabalho em uma Escola Normal em Gomel-cidade em que vivia antes de se transferir para Moscou. Foi esse trabalho que o colocara em contato com crianças que sofriam de defeitos congênitos – cegos, surdos e deficientes mentais[16]. Foi justamente a necessidade de ajudar essas crianças a superar suas dificuldades e desenvolver suas potencialidades individuais que levou Vygotsky à psicologia acadêmica (LURIA, 1992. p. 44). Sua formação acadêmica diversificada entre cursos de Direito, Psicologia, Literatura, Filosofia e Medicina o colocaram em contato com vasto conhecimento, tendo ainda uma forte e decisiva influência filosófica de Marx e Engels, que inspirou não somente Vygotsky, mas toda a geração de jovens soviéticos de sua época (MOYSÉS, 2009).

Como explica Daniels (2003) em sua teoria, Vygotsky tenta explicar a aprendizagem e o desenvolvimento como processos mediados. Ele gostava ainda de chamar essa nova abordagem de psicologia “cultural”, “instrumental” ou “histórica”. Cada termo refletia uma faceta do mecanismo geral pelo qual a sociedade e a história moldaram a estrutura das formas de atividades que distinguem o homem dos outros animais. Em se tratando do termo “instrumental”, referia-se à natureza basicamente mediada de todas as funções psicológicas complexas. Para o aspecto “cultural”, ele explicava que os modos socialmente estruturados precediam as tarefas organizadas pela sociedade e propostas à criança. Por último, mas não menos importante, o aspecto “histórico” se referia à questão do uso de ferramentas pelo homem para dominar seu meio. Para Vygotsky, tais ferramentas não surgiram prontas mas foram inventadas e aperfeiçoadas pelo homem no curso de sua história social (LURIA, 1992, p. 48-49).

Para Cole e Scribner (1984), ele foi o primeiro psicólogo moderno a analisar os possíveis mecanismos pelos quais a cultura passa a ser parte integrante do funcionamento intelectual humano. Cumpre ressaltar que, de saída, há uma diferença fundamental entre o trabalho de Vygotsky e de outros teóricos da formação de conceitos, como, por exemplo, Ausubel e Piaget: Vygotsky não deixou nada pronto e acabado. Nesse aspecto, Luria (1992, p. 56) retrata que

> Suas aulas eram sempre um grande acontecimento. Não era incomum que se estendessem por três, quatro ou até cinco horas, sem interrupções. Além disso, ele não usava qualquer tipo de anotação. Boa parte do material que

---

[16] Atualmente, tratamos por pessoas com desafios cognitivos, déficit cognitivo ou deficiência intelectual.

> descreve o trabalho de Vygotsky que ainda resta vem de anotações estenográficas[17] feitas naquelas aulas.

Dado que sua trajetória científica fora interrompida com sua morte prematura, como relatado anteriormente, mais apontou caminhos a serem seguidos por seus sucessores do que sistematizou um corpo de conhecimentos a respeito da mente e suas relações com a aprendizagem. Luria (1992, p. 57) destaca ainda que, “ao contrário de muitos que haviam estudado as crianças deficientes, Vygotsky concentrou sua atenção na capacidade que as crianças tinham. Capacidade essa que poderia formar uma base para o desenvolvimento de pleno potencial”. Ao se interessar por suas virtudes e não por suas dificuldades cognitivas, concentrou-se na potencialidade e na criatividade que o ser humano tem em reorganizar suas capacidades diante de um novo desafio.

Van der Veer e Valsinger (1996) relatam que os primeiros trabalhos de Vygotsky na área de educandos com necessidades especiais, ou Defectologia, como foi denominado na época, foram publicados em 1924, período em que trabalhou no Instituto de Psicologia Experimental de Moscou ocupando-se da educação social de crianças surdas e cegas (1996 apud HEALY; FERNANDES, 2011, p. 229).

Ao pensar nas questões educacionais de cegos ou pessoas com baixa visão, concorda-se com Ochaita e Espinoza (1995 p. 154), quando destacam que os educadores em geral devem conhecer as características mais importantes que têm o desenvolvimento e a aprendizagem de estudantes cegos de modo a adaptar suas ações educativas às peculiaridades do estudante que tem de trabalhar. Num texto de 1929, Vygotsky (1997) critica a análise quantitativa da deficiência e rejeita as abordagens voltadas para a mensuração de graus e níveis de incapacidade. Rejeita qualquer noção da pessoa com deficiência em referência ao pressuposto da normalidade. Assim como ele, entende-se que existem vias alternativas de desenvolvimento humano na presença da deficiência.

> A criança cega ou surda pode adquirir, em seu desenvolvimento, o mesmo que uma normal, mas as crianças com defeito[18], o adquirem de modo

---

[17] Segundo o dicionário informal, a estenografia é o mesmo que taquigrafia ou seja, um método de escrita abreviado e simbólico com o objetivo de melhorar a velocidade da escrita. A estenografia usa máquinas e a taquigrafia é escrita à mão. Disponível em: <http://www.dicionarioinformal.com.br/estenografia/>. Acesso em: 31 jul 2014.
[18] Atualmente tratamos por pessoa deficiente.

> distinto, por um caminho distinto, com outros meios, e para o pedagogo é importante conhecer a peculiaridade do caminho pelo qual deve conduzir a criança (VYGOTSKY,1997, p. 17)*.

Emihovich e Souza Lima (1995, p. 377 apud DANIELS, 2003) destacam que as visões de Vygotsky sobre pedagogia e aprendizagem se harmonizam mais com as recentes descobertas de que as crianças aprendem de maneira variada em detrimento da ideia de um único caminho de desenvolvimento.

Entendemos que, nesse caso, tal como ressalta Nuernberg (2008), a deficiência e seu processo de compensação social criam a possibilidade do estabelecimento de nexos interfuncionais distintos daqueles esperados na condição considerada normal.

> No que tange à cegueira, isso se revela no papel que funções psicológicas superiores como a memória mediada, a atenção e a imaginação possuem na relação do sujeito com o universo sociocultural e o modo como as funções se vinculam ao pensamento conceitual (NUEMBERG, 2008, p. 313).

Tais nexos interfuncionais se revelam na maneira como o cego encontra novas relações entre artefatos mentais e materiais. Vygotsky destaca, em sua discussão entre memória e pensamento, que ocorrem transformações radicais nas relações entre as funções psicológicas em consequência da atividade mediada (DANIELS, 2003,p.28). Pude perceber que, com o uso de materiais manipulativos, alguns alunos com dificuldades para entender determinado conceito o faziam de maneira mais rápida. Talvez o ato de tatear determinado objeto que explicitava um conceito tornava sua aprendizagem mais rápida pelo fato desses alunos utilizarem outro canal de comunicação com a informação.

Para Vygotsky (1989), a cegueira causa uma total reestruturação de todas as potencialidades do organismo e da personalidade no que diz respeito à reorganização da forma como os conceitos serão apropriados

> A cegueira, ao criar uma formação peculiar da personalidade, reanima novas forças, troca as direções normais das funções e, de uma forma criadora e orgânica, refaz e forma a psique da pessoa. Portanto, a cegueira não é só um defeito, uma debilidade mas, também, em certo sentido uma

* [El niño ciego o sordo puede lograr em el desarollo lo mismo que el normal, pero los niños com defecto lo logran de distinto modo, por um caminho disitinto, com otros médios, y para el pedagogo es importante conocer la pecularidad del caminho por el cual debe conducir al niño]

> fonte de manifestação das capacidades, uma força (VYGOTSKY, 1989,p.74)[19]

Na apropriação cultural para Nuernberg (2008, p. 313), as desvantagens que afetam os alunos cegos em relação aos que veem estão em que a apropriação demanda um empenho deliberado nessa direção para a conquista das metas educacionais comuns. Nesse ponto, há uma concordância entre o que Nuernberg ressalta e o que Ochaita e Rosa (1995, apud BATISTA, 2005, p. 7) destacam quando evidenciam que o sistema háptico ou tato ativo é o sistema sensorial mais importante para o conhecimento do mundo pela pessoa cega, uma vez que, nesse sistema, o qual se diferencia do sistema tato passivo pela ação intencional, o indivíduo consegue captar as informações advindas do material a ser estudado. Porém, como ressalta Batista (2005,p.14), "é relevante redefinir o papel do tato como importante recurso, embora não como substituto direto da visão". Pensa-se que, apesar de Ochaita e Rosa ressaltarem a ação ativa do indivíduo por meio do sentido do tato como o meio mais importante de percepção do mundo, visto que a cegueira altera a organização das informações sensoriais, não pode se diminuir a importância dos outros sentidos como, por exemplo, o da audição, neste processo de percepção. Ochaita e Rosa (1995) destacam ainda que cada um destes sentidos tem uma saliência perceptiva diferente da visual e que faz com que a imagem da realidade que o cego percebe seja diferente – nem melhor, nem pior – que a que os videntes possuem.

Cumpre ressaltar que, para Vygotsky, não se trata de afirmar que uma função psicológica compense outra prejudicada.

> Portanto, a substituição, é preciso compreendê-la, não é no sentido de que outros órgãos assumam diretamente as funções fisiológicas da visão, senão no sentido da reorganização completa de toda a atividade psíquica, provocada pela alteração da função mais importante, dirigida por meio da associação da memória e da atenção, a criação e formação de um novo tipo de equilíbrio do organismo em contrapartida do órgão afetado *(*VYGOTSKY, 1989,p.78)[20]

---

[19] Trecho original: [La ceguera, al crear una formación peculiar de la personalidad, reanima nuevas fuerzas, cambia las direcciones normales de las funciones y, de una forma creadora y orgánica, rehace y forma la psique de la persona. Por lo tanto, la ceguera no es sólo un defecto, una debilidad, sino también en cierto sentido una fuente de manifestación de las capacidades, una fuerza.]

[20] Trecho original: [Por lo tanto, la sustitución es preciso comprenderla, no en el sentido de que otros órganos asuman directamente las funciones fisiológicas de la vista, sino en el sentido de la reorganización compleja de toda la actividad psíquica, provocada por la alteración de la función más importante, y dirigida por medio de la asociación, de la memoria y de la atención, a la creación y formación de un nuevo tipo de equilibrio del organismo a cambio del órgano afectado]

Vygotsky afirmava que as deficiências como cegueira, surdo-mudez[21] ou retardamento mental[22] congênito afetavam, antes de tudo, as relações sociais da criança e não suas interações diretas com o ambiente físico (FERNANDES, 2004, p. 30). Partindo deste suposto, ele afirma que os defeitos sejam superados por meio da linguagem e da experiência social dos videntes

> [...] a força motriz fundamental da compensação da cegueira, a saber, a aproximação através da linguagem e da experiência visual, não tem limites naturais contidos na própria natureza da cegueira, para o seu desenvolvimento (VYGOTSKY, 1989,p.79)[23]

Dentre os interesses desta pesquisa no trabalho de Vygotsky, alguns conceitos desenvolvidos por ele, como o de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), a formação de conceitos e a internalização, são relevantes para o trabalho que desenvolvemos.

4.2 Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)

As relações entre desenvolvimento e aprendizado, para Vygotsky, estão inseridas dentro da relação do indivíduo com seu ambiente social e cultural. Nesse contexto, é na ZDP que a interferência de outros indivíduos é mais transformadora (OLIVEIRA, 2006). Conforme descreve Moysés (2009, p. 32), "ao contrário do conceito de mediação, o conceito de ZDP teve um aparecimento tardio na obra de Vygotsky". Daniels (2003, p. 76-78) destaca que ele criou esse conceito como uma metáfora para ajudar a explicar como ocorre a aprendizagem social e participativa. Em linhas gerais, Vygotsky define a ZDP como a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela resolução independente de problemas, e o nível superior, potencial, determinado pela resolução assistida por alguém mais capaz (adulto, professor, colaboradores etc.). Wells (1999 apud DANIELS, 2003) descreve que, no trabalho de Vygotsky, haveria duas definições de ZDP: uma na

---

[21] Atualmente a pessoa que não ouve refere-se a si mesmo e a seus pares como Surdo.
[22] Atualmente o termo correto é pessoa com deficiência intelectual.
[23] Trecho original: [Sobre la base del análisis psicológico de las representaciones espaciales de los ciegos y de la naturaleza de nuestra vista, el ciego llega a la conclusión de que la fuerza motriz fundamental de la compensación de la ceguera, es decir, la aproximación a través del lenguaje a la experiencia social de los videntes, no tiene límites naturales contenidos en la propia naturaleza de la ceguera, para su desarrollo].

obra *Mind in Society*, enfatizando a avaliação dinâmica das habilidades intelectuais da criança numa tentativa de desvincular a avaliação dos tradicionais testes de QI, e outra, na obra *Pensamento e Linguagem*, em seu capítulo 6, com ênfase na instrução. Em suma, sua discussão teria perpassado a avaliação e a instrução.

Para Palincsar, Brown e Campione (1993 apud FINO, 2001), Vygotsky assevera que o desenvolvimento consiste num processo de aprendizagem do uso das ferramentas intelectuais, através da interação social com outros mais experimentados no uso dessas ferramentas.

Dado o intenso debate que existe acerca da definição do termo e, principalmente, da forma como Vygotsky o teria utilizado, levado a cabo por autores como Cole e Wertsch (1996), Oliveira (2006), Meira e Lerman (2010), adotaremos neste trabalho o entendimento de ZDP de acordo com Meira e Lerman (2010). Para essas autoras, a ZDP é um espaço simbólico, de mediação semiótica, e esse entendimento estaria de acordo, segundo as autoras, com a terceira fase ou formulação dessa noção, encontrada nos trabalhos de Vygotsky. Ao longo do seu trabalho, Vygotsky discute a ZDP associada ao desempenho, à interação e à mediação semiótica, nessa ordem. Asseveram ainda que o entendimento de ZDP como mediação semiótica vai além da situação sociointeracional imediata, estando mais alinhado com as atividades de resolução de problemas. Frade e Meira[24] destacam o recente trabalho de Zoia Ribeiro Prestes (2010) que, com base na compreensão do termo russo zona *Blijaichego razvitia*, defende que a tradução mais próxima dele seria “zona de desenvolvimento iminente”, ressaltando as confusões e os equívocos em sua interpretação. De acordo com Prestes,

> sua característica essencial é a das possibilidades de desenvolvimento, mais do que do imediatismo e da obrigatoriedade de ocorrência, pois se a criança não tiver a possibilidade de contar com a colaboração de outra pessoa em determinados períodos de sua vida, poderá não amadurecer certas funções intelectuais e, mesmo tendo essa pessoa, isso não garante, por si só, o seu amadurecimento (2010, p. 173).

Dentre os diferentes contextos em que a ZDP surgiu no trabalho de Vygotsky, ressaltamos os decorrentes de suas preocupações com a questão do ensino/aprendizagem. Através da observação do comportamento de crianças, ele

---

[24] FRADE,C; MEIRA,L. Interdisciplinaridade na escola: subsídios para uma Zona de Desenvolvimento Proximal com espaço simbólico. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, MG, v. 28, n. 1, p. 371-394, mar. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/edur/v28n1/a16v28n1>. Acesso em: 29 ago. 2014.

descreveu como elas criam ou utilizam novos meios para a realização ou reorganização de determinadas tarefas. Em se tratando da educação, a criação de ZDPs pelo professor estaria forçando o aparecimento de funções ainda não completamente desenvolvidas (MOYSÉS, 2009). Vygotsky (apud OLIVEIRA 2006, p. 62) assevera que "o único bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento" e, assim, a relação com o outro (professores e colegas) é determinante para a promoção do desenvolvimento. Em sua obra *Mind and Society*, Vygotsky também descreveu que o processo de desenvolvimento não coincide com o processo de aprendizagem, mas, pelo contrário, existe uma assintonia entre ambos, sendo o processo de aprendizagem anterior ao de desenvolvimento. Dessa assintonia decorreria a ZDP (VYGOTSKY, 1978 apud FINO, 2001). Para Moll (1990, p. 11 apud DANIELS, 2003, p. 81), "o foco de mudança na ZDP estaria na criação, no desenvolvimento e na comunicação de significado pelo uso colaborativo de meios mediacionais, não na transferência de habilidades do parceiro mais capaz para o menos capaz". Dessa forma, concordamos com Fino (2001, p. 7), quando ressalta que, na perspectiva de Vygotsky

> Exercer a função de professor (considerando uma ZDP) implica assistir o aluno proporcionando-lhe apoio e recursos, de modo que ele seja capaz de aplicar um nível de conhecimento mais elevado do que lhe seria possível sem ajuda. [...] Não é, portanto, a instrução propriamente dita, mas a assistência tendo presente o conceito de interação social de Vygotsky, o que permite ao aprendiz atuar no limite do seu potencial (FINO, 2001, p. 7).

Ao tratar do uso colaborativo das questões mediacionais, Vygotsky (1987 apud Daniels, p. 69) traz a necessidade do uso da palavra argumentando que maneiras específicas de empregar a palavra são uma parte necessária do processo e "pensar em conceitos não é possível na ausência do pensamento verbal". Como o desenvolvimento conceitual é parte relevante no trabalho de Vygotsky e sua relação com a ZDP importante para o contexto do trabalho, passa-se a discutir a formação de conceitos.

4.3 Formação de conceitos

O *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa* assinala que conceito é a "representação mental de um objeto abstrato ou concreto, que se mostra como um instrumento fundamental do pensamento em sua tarefa de identificar, descrever e classificar os diferentes elementos e aspectos da realidade” (HOUAISS, 2013). Uma das decorrências imediatas de aplicação do conceito de ZDP é a formação de conceitos. Vygotsky estabelece dois tipos de conceitos: o espontâneo e o científico. Em suas considerações, destacou que o primeiro é aquele que a criança aprende no seu dia a dia, nascido do seu contato com objetos, fatos, fenômenos etc., dos quais ela não tem consciência. Já o conceito científico é aquele escolar, sistematizado e transmitido com intencionalidade, segundo um certo método. Vygotsky entendia que tal conceito é aquele introduzido pelo professor na escola. Cumpre ao professor auxiliar o aluno na construção desse tipo de conceito por meio de um enlace indireto com o objeto, formando um sistema hierárquico, lógico coerente. Deve ainda abstrair as suas propriedades e a compreensão das relações desse com o conhecimento mais amplo (MOYSÉS, 2009). Vygotsky, de acordo com Daniels (2003), assevera que os conceitos científicos são caracterizados por alto grau de generalidade e por sua relação com objetos, mediada por outros conceitos. Nesse contexto, retrata que a diferença fundamental entre um dado problema que envolve conceitos cotidianos e o que envolve conceitos científicos é que a criança resolve esse último com a ajuda do professor, em contrapartida do outro que deveria fazer voluntariamente e com facilidade. Embora tais conceitos pareçam se desenvolver em direções opostas, ambos estão intimamente ligados. É preciso que um conceito espontâneo tenha chegado em certo nível para que a criança absorva um conceito científico (DANIELS, 2003). No contexto ainda dessa abordagem teórica, entenderemos as ferramentas como instrumentos de mediação, auxiliares nas relações entre os conceitos espontâneos e os científicos, envolvidos dentro de um processo aprendizagem. Vygotsky (1997 apud DANIELS, 2003) considera ainda que os fatores biológicos e as diferenças individuais determinam o grau de domínio e uso das ferramentas e conceitos. Reitera que, no caso dos conceitos científicos, por sua própria natureza sistemática, a criança os controla de maneira voluntária, porém não são assimilados numa forma já pronta. Os conceitos científicos são desenvolvidos por diferentes níveis de diálogo: no espaço social, entre o professor e o aluno; e no conceitual, entre o cotidiano e o científico. O resultado é a produção de redes ou padrões de conexão conceitual (DANIELS, 2003, p. 74).

4.4 Interiorização/internalização

Outra ideia importante dentro da teoria de Vygotsky diz respeito à internalização ou interiorização, como preferem alguns. De início, Vygotsky deixa claro que a ideia de internalização de comportamentos externos já havia sido levantada por diferentes autores, porém, ao contrário por exemplo de Piaget, defendia a ideia de que o verdadeiro curso do processo de desenvolvimento assumia uma direção que vinha do social para o individual. Em virtude de seus experimentos e observações, Vygotsky formulou o que considerou a “lei genética geral do desenvolvimento cultural” (WERTSCH,1981 apud MOYSÉS, 2009), descrevendo que a internalização transforma o próprio processo e muda as estruturas e funções, aparecendo primeiro no seio da sociedade, nas relações sociais ou entre as pessoas para, em seguida, formar a estrutura psíquica do sujeito. Ele destaca ainda que a passagem do plano externo para o plano interno não se dá por uma simples cópia, mas sim por meio de um processo de mudança das estruturas; como dito, transforma o processo e muda as estruturas e funções psíquicas. Saber, portanto, envolve mecanismos já internalizados, como afirma Oliveira:

> o indivíduo não se apoia em signos externos, mas em representações mentais, conceitos, imagens, etc., realizando uma atividade complexa, na qual é capaz de controlar, deliberadamente, sua própria ação psicológica, através de recursos internalizados (2006, p. 78).

Desta forma, leva-se à constatação que cada função psíquica a qual vai sendo internalizada implica em nova reestruturação mental. Esse processo de interação entre as novas funções e as antigas, leva a um alargamento e enriquecimento psíquico (MOYSÉS, 2009). Assim, acredita-se que a interiorização/internalização é o processo pelo qual o indivíduo se apropria ou seja, faz seu, o que é da sociedade.

Neste capítulo, procura-se descrever alguns aspectos, numa perspectiva vygotskiana, referentes ao entendimento do constructo Zona de Desenvolvimento Proximal, à natureza complexa da relação entre conceitos cotidianos e científicos e, ainda, à forma como o indivíduo se apropria desses conceitos por um processo de interiorização/internalização.

Salienta-se ainda a importância dada ao professor quando tratamos desses conceitos inseridos no cenário escolar. Para Vygotsky, “a experiência pedagógica mostra que o ensino direto de conceitos é impossível e pedagogicamente improdutivo” (VYGOTSKY, 1987, p. 170 apud DANIELS, 2003, p. 74).

Acredita-se tal como destaca Vygotsky, que o estímulo, bem como o uso dos instrumentos adequados, podem potencializar a capacidade dos cegos de usufruir de um desenvolvimento normal de suas habilidades. Tal estímulo deve ter em vista outros caminhos pedagógicos que contemplem o uso de capacidades diversas por parte do cego, não perdendo, assim, a possibilidade legítima que tem de acesso à formação por meio da instrução e, finalmente, a construção de seu conhecimento. Entendo que o trabalho do professor é fundamental na busca por caminhos para romper com o atual paradigma educacional do ensino igual para todos.

Pretende-se com os aspectos teóricos discutidos aqui, contribuir para a abordagem da análise do tema desta pesquisa. No próximo capítulo, apresenta-se o contexto do estudo e a opção metodológica adotada.

5 A PESQUISA

> Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.
>
> Paulo Freire

Neste capítulo, descreve-se o contexto do estudo e os procedimentos metodológicos adotados para a coleta dos dados. A pesquisa trata da observação de uma intervenção pedagógica realizada em aulas de Cálculo no contexto da sala de aula e fora dela, em encontros particulares. As atividades que foram utilizadas nessa intervenção pedagógica foram por mim elaboradas com o objetivo de constituírem um percurso a ser trilhado, permitindo também a exploração de outros aspectos por parte dos alunos. Por apresentarem determinadas características peculiares, a coleta de dados consistiu-se em um experimento de ensino cujos aspectos metodológicos descreverei adiante.

5.1 Retomando a questão de investigação

No capítulo anterior, discutiu-se os aspectos teóricos que julgou-se importantes para dar suporte a este estudo. Combinados com as atividades que serão apresentadas neste capítulo e a opção metodológica adotada e que passamos a descrever, procederemos à descrição e análise desses instrumentos, que foram desenhados e aplicados na tentativa de tentar responder a seguinte questão de investigação: Quais as possíveis contribuições da utilização de materiais manipuláveis, combinados com a utilização do computador, por meio da leitura de sua tela por um software sintetizador de voz, para a apropriação do conceito de função derivada de funções elementares de uma variável para um aluno cego?

Refletindo acerca dessa questão de investigação, foi possível descrever alguns objetivos para esta pesquisa, que serão resgatados adiante.

5.2 Retomando os objetivos desta investigação

Na tentativa de obter uma compreensão sobre as possibilidades de apropriação do conceito de funções derivadas por um aluno cego quando esse tem à sua disposição materiais manipuláveis e o computador, pretendemos, com nossa pesquisa, observar, descrever e compreender como ele passa a usar a linguagem, signos, gestos e ainda como se apropria dos conceitos próprios do Cálculo, em particular o de funções derivadas. Descritos no Capítulo 1 e coadjuvantes nessa tentativa, mas não menos importantes, são destacados os objetivos específicos: desenvolver e elaborar uma proposta que vise a aprendizagem do conceito de função derivada de funções elementares de uma variável para um aluno cego; observar e entender como o aluno utiliza recursos e materiais para compreender os conceitos ora discutidos mediante o estímulo do pesquisador; descrever, compreender e interpretar como ele se apropria desses conceitos e proporcionar aos estudantes e, em especial, ao aluno cego a perspectiva da construção do gráfico da função derivada a partir da função primitiva.

5.3 Opções metodológicas

A opção metodológica adotada para esta pesquisa é a de abordagem qualitativa. D'Ambrósio (2008) esclarece que nesse tipo de pesquisa centraliza-se os estudos nos indivíduos, tendo-se em conta toda sua complexidade, e a sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural.

De acordo ainda com Bogdan e Biklen (1994), uma pesquisa qualitativa é aquela cujos dados recolhidos são ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais, conversas e de complexo tratamento estatístico. Esse tipo de pesquisa possui cinco características: (1) a fonte de dados é o ambiente natural, constituindo o pesquisador o seu instrumento principal; (2) os dados coletados são na sua essência descritivos, obtidos na forma de palavras ou imagens e não números; (3) os pesquisadores qualitativos interessam-se mais pelos processos do que pelos resultados ou produtos. Assim, interessa mais ao pesquisador como as pessoas começam a utilizar certos termos e rótulos, como tais noções passam a fazer parte do senso comum; (4) os pesquisadores qualitativos tendem a analisar os dados de forma indutiva, ou seja, não recolhem dados com vistas a confirmar hipóteses apenas, mas analisam dados agrupados e constroem as abstrações a partir desses dados; e (5) atribuem importância ao significado, pois entendem que o modo como diferentes pessoas dão sentido à sua vida é de especial importância. Assim, a perspectiva do participante é sobremaneira valorizada no conjunto da pesquisa.

Esta pesquisa, portanto, apresenta todos esses pontos. Os dados foram obtidos a partir das gravações do cotidiano da sala de aula (ambiente natural) de uma instituição de ensino superior pública. As falas, gestos e comportamentos dos participantes observados foram, em sua essência, os dados mais relevantes desta pesquisa. As atividades dadas em sala, com o objetivo de gerar discussões, foram por mim planejadas tendo em vista o conteúdo a ser abordado e alguns requisitos que se faziam necessários ao seu entendimento.

Ao longo desta pesquisa, procurou-se andar em torno da questão de investigação perseguindo o objetivo de amealhar elementos capazes de respondê-la. Contudo, ao longo da pesquisa, certos procedimentos de coleta de dados foram se mostrando ineficazes para evidenciar estes elementos cuja minha intencionalidade desejava enxergar. Dessa forma, algumas vezes, durante a coleta de dados, foi necessário repensar os rumos a se adotar.

5.4 Procedimentos

Buscou-se produzir conhecimento que pudesse, de alguma forma, iluminar a questão de investigação, entendendo como Bogdan e Biklen (1994) descrevem ao afirmar que a utilidade de determinado estudo é a capacidade que tem de gerar teoria, descrição ou compreensão. Para isso, foi necessário refletir inicialmente sobre como promover atividades com a intenção de estimular em um aluno cego os questionamentos necessários para gerar nele condições de compreender o conceito de função derivada.

Na pesquisa de campo, as ações adotadas foram: 1) gravação das aulas durante a execução das atividades por mim elaboradas; 2) gravação dos encontros particulares realizados com o Daniel no laboratório de matemática; 3) entrevista com Daniel acerca de sua trajetória educacional desde que a cegueira se instalou completamente, visto que era vidente e ficara cego, suas dificuldades enquanto estudante na disciplina de matemática e atualmente enquanto aluno da graduação.

5.4.1 Gravações

A coleta de dados realizada através da gravação em áudio e vídeo ocorreu ao longo do mês de outubro de 2013, constituindo-se de 3 aulas geminadas ocorridas no horário regular no turno da noite, perfazendo um total de 5 horas e 4 encontros particulares promovidos no laboratório de matemática do Instituto, com duração de cerca de 5 horas. Ludke e André (1986) ressaltam que a decisão sobre a extensão do período de observação deve depender, acima de tudo, do tipo de problema que está sendo estudado e do propósito do estudo. Para as autoras, ainda, um aspecto que deve ser levado em conta nessa decisão é que, quanto mais curto o período de observação, maior a probabilidade de conclusões apressadas, o que compromete a validade do estudo. Noutro giro, um período longo também não é garantia de validade. Levando em conta os aspectos a serem observados, tais como diálogos, gestos, entre outros, pensou-se inicialmente em gravar as aulas durante o período de aplicação do experimento de ensino.

Ao optar pela gravação em vídeo, entendi tal como descrevem Pinheiro, Kakehashi e Angelo (2005) que o uso da câmera fixa, pela sua possibilidade de deixar o equipamento operando livremente é mais recomendado para a apreensão de imagens e sons de fenômenos de ocorrência natural, que não são programáveis. Entende-se que o ambiente da sala de aula constituía ambiente natural passível de ser filmado e, durante tais momentos, deixava a câmera filmando naturalmente todo o desenrolar das aulas, ressaltando que os dados relevantes da pesquisa foram obtidos das transcrições originadas nos diálogos e nos gestos entre pesquisador e sujeitos gerados através das imagens oriundas das gravações. Contudo, ao ver as primeiras gravações, percebi que somente esta opção de filmagem não seria suficiente devido aos motivos que descreverei adiante. Optei, portanto, pelos encontros particulares de modo que pudesse concentrar minha atenção nesses gestos e diálogos. Diante disso, concordando com Flick quando afirma que “os campos de estudo não são situações artificiais em laboratório, mas as práticas e interações dos sujeitos na vida cotidiana” (FLICK, 2002, p. 21 apud PICONEZ, NAKASHIMA; SOUZA, 2010, p. 281), passou-se a concentrar a atenção exatamente nesses diálogos e gestos, pois entendeu-se que deles aflorariam importantes elementos para compreender as situações de aprendizagem que alunos e pesquisador estavam inseridos.

Tais filmagens com câmera fixa, para Pinheiro, Kakehashi e Angelo (2005), podem ainda ser utilizadas de diferentes maneiras, como, por exemplo, filmar aspectos do fenômeno que se pretende pesquisar, para posteriormente, realizar a análise. Inserido no seio da observação, percebi que essa é uma técnica de significativo valor quando se estudam fatos ou comportamentos que ocorrem em determinado contexto ou instituição, principalmente na sala de aula. A filmagem com câmera fixa possibilita a neutralidade da observação e a captação de detalhes que o professor-pesquisador não atentaria, uma vez que este se encontrar imerso nos acontecimentos observados. Revendo as filmagens, várias vezes deparou-se com situações que aconteceram na interação entre o Daniel e suas colegas, por exemplo, sem que eu estivesse por perto.

Por outro lado, Borba (2004) discute que um obstáculo dos estudos realizados em sala de aula é, justamente, a dificuldade em evidenciar as ideias dos alunos acerca de determinados assuntos. Em se tratando de uma pesquisa em que o sujeito é cego, seus registros feitos em Braille e sua participação nas aulas muito tímida, em dado momento, assistindo ao andamento das gravações, percebeu-se que os dados qualitativos que precisaria obter não apareciam com clareza. Diante dessa dificuldade, tomou-se a decisão de retirar o Daniel de seu ambiente natural, a sala de aula, e promover encontros em outro ambiente que remonta ao ambiente natural – o laboratório de matemática. Tais encontros ocorreram no contraturno em dia e horário específicos.

Pensou-se que uma participação mais próxima e ativa entre o investigador e o sujeito pudesse evidenciar mais o processo, retratando melhor nessa relação entre Daniel e eu as falas e os gestos que ele passa a utilizar em sua forma de se comunicar e expressar. Concordou-se com Fernandes (2008, p. 91), quando destaca em sua pesquisa que “a condição do sujeito de pesquisa coloca os comportamentos não verbais, entre os quais destacamos principalmente os gestos, numa condição privilegiada”. Outro detalhe interessante para ser ressaltado é que, pelo fato de Daniel ser cego, a sua naturalidade diante da gravação é maior, pois, mesmo sabendo que estava sendo gravado, agia com espontaneidade nas conversas e gestos que descrevia.

Além da dificuldade em não conseguir, apenas com as gravações das aulas, compreender como se dava o processo através do qual Daniel entendia os conceitos estudados (e se de fato isso acontecia), havia também a dificuldade dele em registrar todas as informações descritas por mim no quadro ou mesmo discutidas em sala durante a aula. Como dito anteriormente, ele escreve em Braille e registrar entes matemáticos em Braille representa dificuldade ainda maior.

5.4.2 Encontros particulares

Esses encontros foram utilizados para oportunizar outro espaço de aprendizagem e de pesquisa, uma vez que o regular tumulto da sala de aula, muitas vezes, fazia com que, por um lado, determinados assuntos não ficassem bem registrados por ele e, por outro, determinadas cenas não eram por mim compreendidas. Dessa maneira, combinamos tais encontros, que eram por nós aguardados e muito bem aproveitados. Notadamente, o interesse de Daniel era grande nessas ocasiões, visto que a atenção do professor era unicamente voltada para ele.

Nesses encontros, havia apenas um objetivo a se atingir, porém não havia um caminho rígido a ser seguido para atingi-lo de modo que esses momentos transcorriam com tranquilidade, norteados pelas atividades dadas em sala de aula. Conforme assevera Douglas (1976, p.19 apud BOGDAM; BIKLEN, 1994, p. 34), quanto mais controlada e intrusiva for a investigação, maior a probabilidade de se verificarem “efeitos do observador”. Nesse caso, dada a proximidade da relação que estabelecemos no laboratório de matemática, não havia dúvida que a minha intencionalidade, em muitas ocasiões, poderia conduzir Daniel a algumas conclusões acerca do nosso objeto de estudo. Para Bogdan e Biklen (1994), nunca é possível ao investigador eliminar todos os efeitos que produz nos sujeitos ou obter uma correspondência perfeita entre aquilo que deseja estudar – “o meio ambiente natural” – e o que de fato estuda – “um meio ambiente com a presença do investigador”. Dessa forma, procurou-se não engessar o rumo a ser seguido de forma que houvessem apenas intenções, de modo que a criatividade e as discussões que se desenrolassem pudessem conduzir Daniel à reflexão do que precisar e como utilizar os recursos disponíveis para atingir o entendimento dos conceitos estudados naquele encontro.

Tais momentos ocorreram no laboratório de matemática do Instituto, dotado de alguns recursos e materiais de consumo, como papel, isopor, palitos, borrachinhas, jogos etc. que poderiam ser utilizados nos casos em que se fizessem necessários e ainda tinham por objetivo propiciar um momento em que ele pudesse organizar melhor seu caminho de aprendizagem e registro, uma vez que a sala de aula, dada a sua dinâmica, não permitia um acompanhamento mais próximo do caminho de aprendizagem dele. Assim, tais oportunidades se constituíram *per se* de grande importância para observar Daniel e eu em processo de transmissão e apropriação dos conceitos, de como ele passou a utilizar os artefatos e como se deu a interação aluno/professor. Tínhamos mais tempo nesses encontros para discutir as dúvidas e criar recursos para possibilitar o entendimento dos conceitos estudados. Nossas discussões baseavam-se nas atividades discutidas em sala de aula na aula anterior ou mesmo as atividades que seriam ainda discutidas na aula da noite, uma vez tais encontros ocorriam no turno da tarde.

5.5 Experimento de ensino e o planejamento das atividades

Ao iniciar esta pesquisa, o interesse consistia em investigar como um aluno cego produziria conhecimento acerca do conceito de função derivada a partir de uma sequência de atividades que o conduzissem, juntamente com seus colegas de turma, à exploração de conjecturas, tendo como pano de fundo uma sequência de atividades pré-elaboradas.

A coleta de dados aconteceu de duas formas: 1) ao longo das aulas ministradas pelo pesquisador aos alunos no curso regular da disciplina de Cálculo, consistindo, assim, de uma série de encontros entre o pesquisador e os estudantes; 2) ao longo de encontros particulares com Daniel, por um período limitado de tempo. Tendo em vista esta dinâmica, ela constituiu-se em um experimento de ensino.

De acordo com Steffe e Thompson (2000, p. 271-272), os experimentos de ensino surgiram, como metodologia de pesquisa em educação matemática, nos EUA na década de 1970 como alternativa à pouca eficácia dos métodos emprestados das ciências naturais em responder como os alunos aprendem determinados conteúdos matemáticos. Essa metodologia já era utilizada por pesquisadores da Academia de Ciências Pedagógicas da União Soviética e algumas dessas pesquisas tornaram-se disponíveis nos EUA através dos esforços do professor emérito da Universidade de Chicago, Izaack Wirszup. A versão soviética fora examinada por um pequeno grupo de pesquisadores nos EUA, que, a partir de então, formularam uma nova metodologia para as pesquisas em educação matemática.

Tal metodologia tem sua importância ressaltada por valorizar o progresso dos estudantes alcançado durante a realização de determinadas tarefas que são registradas através de uma técnica de registro de dados.

Para Steffe (1983 apud STEFFE; THOMPSON, 2000, p. 273), “Um experimento de ensino consiste em uma sequência de episódios de ensino”[25]. Consideram ainda que um episódio inclui ainda um agente de ensino, um observador (que pode ser ou não o próprio agente/pesquisador), um ou mais estudantes e um método de gravação que perpasse os episódios. Essas gravações, se possível, podem ser utilizadas para preparar os episódios subsequentes, assim como suportarem uma análise conceitual retrospectiva do experimento de ensino.

Os autores retratam ainda que um experimento de ensino propicia a interação entre professor e alunos e através dessa interação, ágil e intuitiva, o pesquisador pode explorar o raciocínio dos alunos. Pode-se ainda interpretar o que os alunos falam ou fazem, por meio de diálogos, tendo como pano de fundo as atividades e questões elaboradas pelo pesquisador. Uma virtude dessa técnica é que ela permite o estudo dos processos construtivos que são, em parte, compreendidos como as acomodações que os estudantes fazem em seus esquemas funcionais. Por causa da interação contínua entre os estudantes e o pesquisador, ele ou ela provavelmente são capazes de observar ao menos os resultados desses momentos críticos quando uma reestruturação majorante é indicada por mudanças na linguagem ou nas ações dos estudantes (STEFFE; THOMPSON, 2000, p. 286).

As atividades propostas, embora elaboradas previamente, permitem aos estudantes fazerem conjecturas que extrapolem os objetivos delas, verificando outras hipóteses. Dessa forma, o pesquisador deve estar atento para o fato de surgirem situações não previstas quando se realiza um experimento de ensino. Apesar de as atividades serem desenhadas com certa intencionalidade, nossos alunos nem sempre seguem os caminhos que esperamos que sigam.

Para Steffe e Thompson (2000 apud BARBOSA, 2009), nossas estratégias são apenas ideias do que fazer, pois o investigador tem seus próprios conhecimentos e experiências e, apesar de nem sempre possuir uma agenda rígida, deve-se ter em mente que o inesperado pode acontecer e que as hipóteses formuladas podem ser modificadas e reformuladas à medida que se vai avançando na pesquisa. As ideias e conjecturas dos estudantes devem ser respeitadas e, assim, o pesquisador deve procurar agir colocando-se no lugar desses de modo que possa tentar perceber de que forma pensam e agem em relação aos fatos que

[25] Trecho original: [A teaching experiment involves a sequence of teaching episodes].

surgem na trajetória da pesquisa. Certamente o pesquisador tem suas convicções, contudo deve ponderá-las durante o desenrolar do experimento de ensino.

De fato, o experimento de ensino foi desenhado com o propósito de eliminar a separação entre a prática da pesquisa e a prática da docência. Steffe e Thompson (2000, p. 301, tradução do autor) asseveram que “a percepção de que os pesquisadores são participantes nas construções dos alunos e os alunos são participantes ativos nas construções do pesquisador é precisamente o que recomenda a metodologia experiência de ensino“[26]. Nesse sentido, pode-se asseverar que o experimento de ensino representa o elo entre teoria e prática de modo que essa relação contribua com a produção do conhecimento de ambos, pesquisador e estudantes.

O planejamento das atividades do experimento de ensino seguiu o roteiro seguinte:

a) começamos com planos cartesianos – representação dos pontos em papel milimetrado. No caso do aluno cego, as representações foram feitas no Multiplano[27] inicialmente;
b) esboçamos alguns gráficos de funções elementares (lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, seno, cosseno) em papel milimetrado/multiplano, tendo por base um conjunto de pontos. Tal tarefa foi realizada com o uso de calculadora científica pelos videntes e, no caso de Daniel, usamos o seu *notebook* combinado com o programa Excel para determinar os pares ordenados. Fizemos uma tabela na qual, na primeira coluna, poderiam ser escolhidas as coordenadas x do ponto. Na segunda coluna, teríamos as coordenadas y, que seriam as funções quadráticas, exponenciais, logarítmicas, seno, cosseno do valor x. Nesse momento, foi necessário falar da diferença entre arco e ângulo, pois utilizamos valores reais para x. Foi também necessário falar da necessidade do uso do radiano como medida do arco para as funções trigonométricas seno e cosseno.
c) após determinar os gráficos dessas funções, tratamos das retas tangentes que passam por determinados pontos das curvas, elegendo, para cada

[26] Trecho original: [The realization that the researchers are participants in the students’ constructions and the students are active participants in the researcher’s constructions is precisely what recommends the teaching experiment methodology]
[27] Trarei mais detalhes sobre o Multiplano no item 5.7

curva, entre 4 e 8 pontos. Construímos uma tabela (ponto, inclinação da reta tangente no dado ponto);

d) para a determinação das curvas de inclinações, tratamos em especial as funções logaritmo natural, exponencial, seno e cosseno;

e) introduzimos o conceito de “curva das inclinações de uma dada função”;

f) procuramos fazer com que percebessem a relação entre a função seno e a sua curva de inclinações como sendo a função cosseno;

g) a partir de então, começamos a tratar do conceito de funções derivadas como sendo a curva das inclinações de uma dada função.

h) introduzi o conceito formal de derivadas utilizando limites ao final.

Importante ressaltar que tais atividades se constituíram algo novo em minha prática, pois nunca pensou-se em conduzir uma aula de Cálculo através de uma sequência de atividades que tivesse por objetivo instigar os alunos a perceber a relação entre uma função e sua derivada.

Quadro 1 – Cronograma das atividades desenvolvidas nas aulas e encontros particulares

Evento	Local	Data	Partici-pantes	Atividade	Materiais e Recursos	Dura-ção
1º aula	Sala de aula	01/10/2014	Todos	• Introdução histórica do Cálculo, principais articuladores e motivações. • Distribuição do material referente às atividades que se sucederão nas próximas aulas. • Esboço da função polinomial do 2º grau ($y=x^2$ e $y=3x^2$) a partir de pares ordenados.	Videntes • Material de apoio. • Papel milimetrado. • GeoGebra; Daniel • Material de apoio acessível em seu *notebook*; • Multiplano.	90 minutos

2º aula	Sala de aula	02/10/2014	Todos	• Esboço das retas tangentes à curva do seno de x e o cálculo das respectivas inclinações. • Esboço do gráfico da função cosseno de x. • Esboço do gráfico da função logaritmo de x. • Esboço do gráfico da função exponencial de x. • Esboço do gráfico da função recíproca de x.	Videntes • Material de apoio; folha em papel milimetrado com o desenho da função seno, calculadoras, lápis e papel comum e papel milimetrado. Daniel • Material de apoio acessível no seu *notebook*; Planilha de Excel com pares ordenados (fornecidos pelas colaboradoras). Tabela em Excel com posições definidas para o cálculo do sen(x), cos(x), ln(x) e exp(x) a partir de um dado valor x.	90 minutos
3º aula	Sala de aula	08/10/2014 Noite	Todos	• atividade 11 - determinação da curva de inclinações da função seno de x a partir de pontos	Videntes	90 minutos

				arbitrados pelos próprios participantes; • atividades 12 - determinação da curva de inclinações da função cosseno de x a partir de pontos arbitrados pelos próprios participantes. • Determinação da curva de inclinações como sendo a função derivada da função dada.	• Material de apoio; folha em papel milimetrado com o desenho da função seno, calculadoras, lápis e papel comum e papel milimetrado para a representação da função cosseno. **Daniel** • Material de apoio acessível no seu *notebook*; Planilha de Excel com pares ordenados (fornecidos pelas colaboradoras).	
1º encontro particular	Laboratório de Matemática	08/10/2014 Manhã	Daniel	• Esboço da função recíproca (1/x) e função logaritmo natural de x utilizando materiais disponíveis no laboratório de matemática (isopor, palitos, borrachinhas).	• Material de apoio acessível no seu *notebook*. • Planilha de Excel com pares ordenados (fornecidos pelas colaboradoras). • Folha de isopor. • Palitos de churrasco. • Borrachins de dinheiro.	80 minutos

2º encontro particular	Laboratório de Matemática	08/10/2014 Tarde	Daniel	• Continuação das discussões em torno da relação entre as funções y=1/x e y=Ln(x). • Esboço do gráfico da função y=sen(x) e estudo das inclinações das retas tangentes à curva do seno e sua relação com a função y=cos(x).	• Material de apoio acessível no seu *notebook*; Planilha de excel com pares ordenados (fornecidos pelas colaboradoras). • Folha de isopor; • Palitos de churrasco • Borrachins de dinheiro.	80 minutos
3º encontro particular	Laboratório de Matemática	23/10/2014	Daniel	• Reestudo do que fora visto nos encontros anteriores, sistematização e registro por Daniel em seu computador. • Utilização do Multiplano para representação, compreensão e sistematização do conteúdo estudado, em particular para o resgate da forma como se calcula a inclinação da reta tangente a uma curva por um ponto.	• Material de apoio acessível no seu *notebook*; Planilha de Excel com pares ordenados (fornecidos pelas colaboradoras); • Multiplano; • Caderno.	45 minutos

4º encontro particular	Sala de aula 4	30/10/2014	Daniel	Estudo, sistematização e registro em Braille por parte do Daniel da lei da função derivada de uma dada função. Sistematização do mecanismo a partir do qual de obtém a derivada de uma função composta, algebricamente.	• Caderno; • *Notebook*;	100 minutos

Fonte: Elaborado pelo autor

5.6 As atividades propostas

Inicialmente, verifiquei no plano de ensino da disciplina quais seriam os conteúdos programáticos da disciplina de Cálculo I e planejei a quantidade de aulas necessárias para cada parte do conteúdo. A ementa do curso contempla 80 aulas dividas em 4 aulas semanais ministradas em dois dias. Nesse quesito, não houve dificuldade visto que no Mestrado cursamos uma disciplina com o professor Dr. Frederico da Silva Reis cuja ênfase fora justamente planejar e ministrar um curso de Cálculo. Notadamente, a parte que coube ao meu grupo fora a da disciplina que tradicionalmente se chama Cálculo I, que constitui-se com poucas variações, da introdução ao estudo das funções até as aplicações de derivadas. O curso por mim ministrado foi dividido basicamente em 5 partes: a primeira discutia as questões relativas às funções, seu domínio, imagem, funções inversas, gráficos e reconhecimento de funções. A segunda versava sobre limites, sua definição, cálculos e continuidade. A terceira, o nosso foco de pesquisa, versava sobre as derivadas, o problema da tangente, taxas e derivada como função. A quarta dizia respeito às regras de derivação das funções elementares, às regras do produto e do quociente, funções trigonométricas e à regra da cadeia. A quinta dizia respeito à aplicação de derivadas em problemas de máximo e mínimo, teorema do valor médio, gráficos de funções usando derivadas e regra de de L’Hôspital.

Como metodologia, adotei o que tradicionalmente utilizo: aulas expositivas, trabalhos em grupo e individuais, avaliações escritas e resolução de exercícios, procurando utilizar os recursos didáticos disponíveis: computadores, softwares de geometria dinâmica, livro texto e listas de atividades. Os livros adotados na bibliografia básica são:

a) STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. I;

b) FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. São Paulo: Makron Books, 2010.

Com a introdução da pesquisa e o fato de Daniel estar inserido nesse contexto, utilizou-se um experimento de ensino de modo a orientar nossas tarefas e controlar melhor o andamento das atividades.

As atividades didáticas utilizadas nesse experimento estão disponíveis no Anexo I e foram desenvolvidas de forma dirigida ao longo das 3 aulas geminadas nos horários regulares de aula no turno da noite. Foram aplicadas ao longo de 4 aulas geminadas num total de 6 horas aula compreendidas entre os dias 1 a 30 de outubro de 2013, nas aulas das terças e quartas-feiras na sala de aula 3 do prédio de aulas II do IFMG. Eles agrupavam-se em duplas ou trios, como geralmente fazem durante todas as aulas. Não houve modificação perceptível nas atitudes dos alunos quanto à organização da sala de aula devido à introdução da pesquisa. Durante as atividades, houve expressiva participação de todos, inclusive solicitando minha presença em suas carteiras para esclarecer dúvidas.

Os estudos particulares ocorreram nos dias 8, 23 e 30 de outubro de 2013 no laboratório de Matemática, divididos em encontros de 2 horas, sendo que, no dia 8, realizamos dois turnos de encontros devido a maior disponibilidade de tempo minha e do Daniel. Nesse meio de caminho, tivemos ainda um recesso tradicional na semana de 14 a 18 de outubro, referente ao dia dos professores e das crianças. Como pode ser observado no Quadro 1, o encontro particular do dia 30 de outubro dista um pouco dos demais. Após o feriado mencionado, demos continuidade às atividades em sala de aula. Dentre elas, passamos a tratar das regras de derivação e obtenção de funções derivadas. Assim, uma vez que esse conteúdo exigia maior sistematização por parte de Daniel, inclui-o dentro das discussões desta pesquisa, visto que a sistematização escrita, em Braille, para a linguagem matemática é ainda um desafio para professores e alunos.

As atividades tinham por objetivo basicamente conduzir o aluno ao entendimento da relação entre a curva de inclinações gerada por um conjunto de retas tangentes passando por determinados pontos de algumas curvas de funções elementares e, finalmente, estabelecer que essa curva de inclinações é a função derivada.

Ao tratar da função derivada utilizando esse processo, tratamos, ao mesmo tempo, de dois conceitos: o de derivada, entendendo que essa é a inclinação da reta tangente à curva em dado ponto e o de função derivada, entendendo que essa é formada pelo conjuntos dos pares ordenados $(x, inclinação\ da\ reta\ em\ x)$.

De acordo com Boyer (1959, p. 56), algumas ideias que formam a base do Cálculo já se encontravam nos métodos desenvolvidos pelos gregos como Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C) e definida por Euclides (330 a.C. - 260 a.C.) como sendo "a linha que toca a circunferência em um único ponto e esta definição foi estendida pelos geômetras gregos para serem aplicadas às outras curvas"[28]. Depois dessa discussão, na Antiguidade, esse conceito passou ao longo da história com algumas ponderações e modificações por muitos matemáticos, mas foram Fermat (1601-1665) e depois Descartes (1596-1650) que anteciparam o conceito de tangente a partir da secante. Descartes, ainda longe do conceito de limite como é hoje utilizado no Cálculo, mas "criticando o método das tangentes proposto por Fermat, tentou corrigir o método interpretando-o em termos da igualdade de raízes e pontos coincidentes"[29] (BOYER, 1959, p. 157). Nesse período histórico, as ideias em torno de tangentes e quadraturas fervilhavam nas discussões entre os matemáticos. Isaac Barrow , durante a escrita de suas *Lectures on optics and Geometry* em 1669, com preferência pelo método grego de raciocínio geométrico, trouxe à tona a questão das tangentes preferindo o ponto de vista cinemático de Torricelli.

De todos os matemáticos que anteciparam criações do Cálculo Integral e Diferencial, nenhum chegou tão perto quanto Barrow, ao pensar as grandezas geométricas como um fluxo uniforme de pontos. Algum tempo depois, ele renunciaria sua cadeira em Cambridge em favor de seu pupilo Isaac Newton, que trabalhava há algum tempo nesses conceitos e, inclusive, contribuiu com Barrow em

---

[28]Trecho original: [... a tangent to a circle had been defined by Euclid as a line touching the circle at only one point, and this definition was extended by GreeK geometers to apply to other curves as well].
[29]Trecho original: [...In criticising Fermat´s method of tangents, Descartes attempted to correct de method by interpreting it in terms of equal roots and coincident points.]

alguns pontos de sua obra, provavelmente no que tange à óptica. Mas sua contribuição mais importante e que inspirou Newton foi o método das tangentes, utilizando um triângulo no cálculo das inclinações (BOYER, 1968, p. 425).

O objetivo de Newton era analisar o comportamento da reta secante a uma curva quando o incremento das variáveis x e y fosse infinitamente pequeno. Fazendo esses incrementos tenderem a zero, obtém-se o coeficiente angular da reta tangente no ponto (x,fx). Dessa forma, chegamos bem próximos ao conceito que é hoje utilizado: o de tangente como limite das retas secantes a uma curva que passam por uma curva. Newton (1642-1727) também pensou o conceito de reta tangente à curva como um movimento:

> [...] ele pensou a tangente não só como o prolongamento de um dos infinitos elementos lineares que a curva pode assumir ao ser composta, mas também como a direção do movimento de um ponto que, movendo-se, gera a curva.[30] (BOYER, 1959, p. 189).

Para as atividades disponibilizadas, o objetivo era encontrar a reta tangente à curva em determinados pontos. Em seguida, associar a inclinação dessa reta tangente a uma outra curva. Por fim, estabelecer que essa nova curva representada pelos pares ordenados $(x, inclinação\ da\ reta\ em\ x)$ representava a função derivada da primeira curva representada.

Como dito anteriormente, ao planejar um experimento de ensino, algumas conjecturas e problemas fogem ao nosso controle. Foi exatamente o que aconteceu. Durante a realização da atividade, na hora da determinação das inclinações das retas tangentes, os grupos encontraram valores diferentes. Os alunos então começaram uma discussão para entender por que os valores eram diferentes, e essa discussão, derradeiramente, conduziria ao conceito de inclinação da reta tangente à curva utilizando limites como a única forma inequívoca de se obter a tangente por um ponto da curva.

Confesso que, inicialmente, não havia previsto tal discussão, mas ela foi determinante para o entendimento da definição de tangente utilizando limites.

Ao optar por essa forma de abordar o conteúdo, pensei em Daniel, uma vez que a definição de derivadas utilizando limites, como tratada nos livros de Cálculo

---

[30]Trecho original: […] he thought a tangent to a curve not only as the prolongation of one the infinitely many lineal elements of which the curve might be assumed to be composed, but also as the direction of motion as a point which, by moving, generated the curve.]

utilizados em nossas referências básicas, não enseja, na minha opinião, oportunidade de reflexão aos discentes de seu real significado e importância, não passando de um procedimento algébrico. Para Gravina e Santarosa (1999, p. 79), em certas situações, historicamente o sistema de representações do conhecimento matemático tem sido tratado de forma estática e que, em determinados casos, "[...] dificulta a construção do significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenhos a ser memorizado". A necessidade de visualizar o caráter dinâmico é fundamental para uma melhor compreensão do conceito e isto tem sido evidenciado pela crescente utilização de *softwares* de geometria dinâmica em aulas de Cálculo. Contudo, como lançar mão deste recurso para um aluno cego?

Para Daniel, todos os gráficos foram realçados com cola alto-relevo. Também foi disponibilizado o texto da atividade em versão .doc para ser lido pelo seu leitor de tela.

Conforme discutido anteriormente, em razão de algumas dificuldades que percebi com as gravações das aulas, com o registro das atividades pelo Daniel e ainda o fato de determinados assuntos não ficarem bem definidos para ele, optamos também pelos estudos particulares, utilizando partes dessas atividades que desenvolvemos em sala de aula. Tais atividades foram enviadas para ele por *e-mail* e disponibilizadas em Word 2007, versão que o leitor NVDA consegue verbalizar. Assim, ele acompanhava as atividades por meio do seu computador e realizava algumas delas no seu multiplano. Como dito anteriormente, dada a dificuldade em representar determinadas funções e sua curva de inclinações no mesmo espaço do multiplano, optamos por usar também isopor, palitos e borrachinhas nos encontros particulares, materiais disponíveis no laboratório de matemática em um processo de construção.

5.7 Materiais e recursos disponibilizados ou utilizados por Daniel

Ao longo do percurso deste trabalho, alguns materiais e equipamentos foram necessários para tornar possível sua realização. Como discutido nas linhas anteriores, utilizamos recursos auxiliares que fossem capazes de suavizar a aspereza de escrever todos os textos disponibilizados aos alunos videntes durante as atividades em sala, por exemplo, em Braille. Primeiramente, porque não sei escrever em Braille. Também tive de pensar muitas vezes em substituir símbolos matemáticos, por exemplo, um simples $\frac{1}{x}$, por textos explicativos, já que o leitor de tela NVDA, instalado no *notebook* do Daniel, não lê tal estrutura, pois a entende como uma imagem. Já o multiplano foi muito útil em diversas atividades, mas insuficiente como recurso em outras. Assim, fez-se necessário adotar outras estratégias, como utilizar o isopor, palitos e borrachinhas.

5.7.1 Leitores de tela

De acordo com a Wikipédia[31], o leitor de tela é um *software* usado para obter resposta do computador por meio sonoro. Tal programa é capaz de sintetizar a voz, em língua portuguesa, e possibilitar aos cegos a leitura de textos disponíveis em editores de textos, tornando, assim, sua vida mais independente. Tais programas possibilitam que o cego dependa menos também dos textos publicados em Braille, uma vez que muitos podem ser disponibilizados em programas para Windows ou Linux. Existem vários leitores livres na internet; dentre eles, podemos citar: DOSVOX (*software* livre para ambientes Windows ou Linux), ORCA (*software* livre para ambiente Linux), NVDA (*software* livre para ambiente Windows), JAWS (*software* pago para Windows) e o Virtual Vision (*software* pago para ambiente Windows).

Desses, o Daniel utiliza o DOSVOX[32] e o NVDA. Em nossas conversas, explicou-me que teve experiências com outros leitores de tela, como o ORCA, o JAWS e o Virtual Vision.

Em relação ao ORCA, Daniel retrata que esse *software* é muito cansativo, confuso e bloqueava facilmente. Na época em que testou, utilizou o Linux, ambiente em que o ORCA trabalha. Não gostou do editor de texto do Linux, preferindo o Word 2003, usando-o por um período de 2 (dois) meses.

Em relação ao JAWS, Daniel explicou que é um leitor bom. Contudo, não detectava erros ortográficos, suportando apenas a versão Word 2003. Sua voz robótica era muito cansativa e o software bloqueava sempre. Utilizou por um período de 1(um) ano e nove meses.

Não elencamos dentre os objetivos desta pesquisa aprofundar na experiência com outros leitores de tela, uma vez que ele é perfeitamente adaptado ao DOSVOX

[31] Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Leitor_de_tela>. Acesso em: 7 de fev. 2014.
[32] Disponível em: <http://intervox.nce.ufrj.br/dosvox/download.htm>. Acesso em: 7 de fev. 2014.

e ao NVDA. O Software DOSVOX vem sendo desenvolvido desde ano de 1993 pelo NCE – Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), e conta com cerca de 40 mil usuários distribuídos entre o Brasil, Portugal e outros países da América Latina. Atualmente, ele também é distribuído na versão em espanhol pela *Universidad de las Americas*. Das várias instituições que apoiam e disseminam esse *software*, notadamente o Instituto Benjamin Constant é uma das mais importantes dada a sua natureza histórica e o trabalho desenvolvido como centro de referência em educação e pesquisas voltadas paras as questões da deficiência visual. Por causa de sua importância, atualmente acontecem anualmente encontros nacionais de usuários de DOSVOX (ENUD), em que usuários discutem usos que fazem do sistema, possibilidades de mudança para atender necessidades particulares, suas atualizações etc., como discute Rodrigues (2010, p. 45).

Importante ressaltar que os leitores de tela não “leem” a tela, mas os códigos que estão por detrás dela e que a produziram. Por isso, muitas vezes, algumas partes não são sintetizadas, pois os códigos são fechados para isso. Logo, determinadas tarefas, como o preenchimento de formulários, envio de e-mails e pesquisa de palavras, precisam ser executadas através desses softwares, dotados de teclas de atalho, que permitem a navegação e a entrada automática nesses campos específicos. Outro fato importante é a total inutilidade do “*mouse*” para um cego; toda a sua navegação deve ser feita via teclas de atalho. Daniel tem grande familiaridade com esses utensílios e utiliza ainda editores de texto para produzir textos em que “explica” para si detalhes das aulas e encontros. Utiliza ainda planilhas eletrônicas que são capazes de substituir, em certa medida, as calculadoras científicas, pois, como dito anteriormente, ainda não temos disponíveis no mercado brasileiro calculadoras que verbalizam em português.

5.7.1.1 Algumas funcionalidades do DOSVOX

O DOSVOX possui funcionalidades próprias e pode ainda ser utilizado para acessar funcionalidades do Windows. Você pode ainda controlar a velocidade da síntese de voz, aumentando ou diminuindo facilmente. Dentre suas funcionalidades, enumeramos algumas.

a) CALCUVOX – calculadora vocal.

É a calculadora vocal do programa que executa as quatro operações básicas além da raiz quadrada e da porcentagem.

b) TELEVOX – caderno de telefones.

É uma funcionalidade destinada à criação e manutenção de uma agenda de endereços e telefones computadorizados, com opções de busca e organização de informações.

c) AGENVOX – agenda de compromissos.

É uma agenda que permite ao usuário manter informações de data e hora de seus compromissos. Tais compromissos são agrupados por dia.

d) WEBVOX[33] *– acesso a* homepages*.*

É o *browser* do DOSVOX*.* Ele consegue capturar toda a parte textual da *homepage* e associar diversas características dela a efeitos sonoros. Não é uma funcionalidade perfeita, mas é um avanço. Por exemplo, a manipulação de páginas com certificados SSL ou mesmo Java e Javascript são prejudicadas e, assim, determinados serviços, como bancos e sites de compras, não funcionam adequadamente. Contudo, há um esforço contínuo de toda a comunidade envolvida em sua programação em vencer esses desafios.

e) EDIVOX – editor de textos.

É a funcionalidade do DOSVOX utilizada pelo usuário para posterior gravação ou impressão de textos. Assemelha-se ao “bloco de notas” do Windows. A digitação segue os padrões de uma máquina de escrever convencional, contudo, dentro desse ambiente, cada tecla é sintetizada pelo sintetizador de voz e verbalizada pela placa de som. O texto também aparece na tela do computador e pode ser lido por pessoas videntes ou com baixa visão. O programa, ao ser iniciado, pergunta qual o nome do arquivo que deve ser utilizado. A localização na tela é feita pelo cursor, que verbaliza

[33] Termos técnicos e informações sobre o Browser para a navegação de deficientes visuais na internet estão disponíveis em: < http://saci.org.br/?modulo=akemi&parametro=1648>. Acesso em: 20 jul. 2014.

a linha ou a letra em que ele se encontra ao longo do texto. A navegação é feita por meio de diversas teclas de atalho que o usuário deve aprender.

5.7.1.2 O Software NVDA[34]

O NVDA-Non Visual Desktop Access é um leitor de tela, livre e de código aberto, para sistema operacional Microsoft Windows. As informações do programa são sintetizadas em voz e/ou Braille e permitem às pessoas com deficiência visual, igualdade de condições de uso de um computar que utiliza o Windows. Ele é traduzido em mais de 40 idiomas e disponível em sistemas operacionais Windows XP ou superior. A vantagem é a atualização constante através de versões que são publicadas e disponíveis duas vezes ao ano.

5.7.1.3 Impressões de Daniel acerca do DOSVOX e do NVDA

Daniel, em nossas conversas, relatou suas impressões acerca dos programas que utiliza. Em relação ao DOSVOX, o tom da voz utilizada no programa MONITVOX e que sintetiza os textos dificulta o entendimento e tem a voz muito cansativa. Seu editor de texto, o EDIVOX, não atende às suas necessidades tão bem como o Microsoft Word/2003, e sua planilha eletrônica é bem mais complexa em suas funcionalidades que a do Microsoft Excel/2003. É possível utilizar o MONITVOX no Microsoft Word/2003, porém ele prefere o NVDA. Do DOSVOX, utiliza a calculadora, de fácil manipulação e acesso rápido. Utiliza ainda o ambiente Windows há cerca de quatro anos. Nesse ambiente, prefere utilizar o NVDA, cujas funcionalidades são mais amigáveis que as do DOSVOX. O NVDA relaciona-se ainda com todas as versões do Word. Possui ainda maior liberdade para formatação de arquivos, relaciona-se melhor com a leitura de sites e funciona melhor com caracteres matemáticos. Ele utiliza o NVDA há três anos. Tem maior familiaridade com a versão Office 2003. Nesse ano, vem fazendo alguns ensaios com a versão do Microsoft Word 2010 no laboratório de matemática juntamente com o monitor do

---

[34] Disponível em: <http://sourceforge.net/projects/nvda/files/releases/2014.2/nvda_2014.2.exe/download> . Acesso em: 20 jul. 2014.

laboratório. Ambos têm trabalhado juntos com vistas a elaborar um curso voltado para alunos cegos de escolas públicas.

5.7.2 Editores de texto e planilhas eletrônicas

O DOSVOX, descrito no item 5.7.1.1, pode ser utilizado sem que existam outros programas instalados no computador e que realizem tarefas como navegar na internet, acessar *e-mails*, editar textos ou computar dados como nas planilhas eletrônicas. Contudo, seus recursos são limitados. Interessante também é ter acesso a outros programas que realizem essas funções. Não há incompatibilidade entre o DOSVOX e outros programas do ambiente Windows. Como dito anteriormente, é possível utilizar os programas do Microsoft Office tanto com o DOSVOX quanto com o NVDA. Há toda uma série de teclas de atalhos necessárias a uma boa navegação em editores de texto, planilhas eletrônicas e navegadores que, como dito anteriormente, devem ser aprendidos. No caso de Daniel, ele já está familiarizado com a utilização dos editores de texto, preferencialmente o Microsoft Word na versão 2003. Nesse programa, lança notas de aulas para uso posterior. Escreve textos e manda *e-mails* anexados com documentos com facilidade. Já no caso das planilhas eletrônicas, seu uso é mais tímido. Utilizamos neste trabalho o Microsoft Excel de modo que ele pudesse observar a ampliação da funcionalidade para realizar contas e estabelecer operações mais complexas. Nessas ocasiões, eu programava o Excel para ele. Ele se interessou pelo uso do programa e se comprometeu a explorá-lo mais vezes.

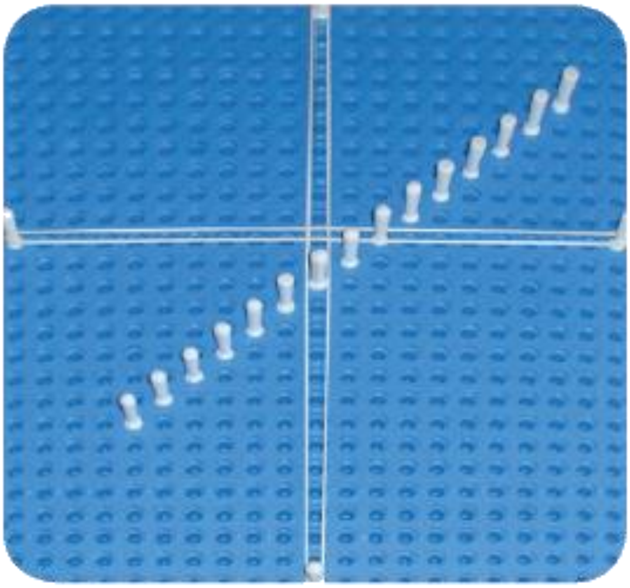
5.7.3 Multiplano

O Multiplano[35] é um recurso didático, desenvolvido pelo Prof. Rubens Ferronato, que, com dificuldades semelhantes às desta pesquisa, desenvolveu um equipamento capaz de tornar palpáveis determinados conceitos ou entes matemáticos, bem como funções, regiões planas e espaciais. Consiste em uma placa perfurada, em que se pode adaptar pinos e ligá-los com borrachinhas. Para os cegos, o desenvolvimento do tato é fundamental para que tenham autonomia e o

[35] Disponível em: <http://www.multiplano.com.br/>. Acesso em: 7 fev. 2014.

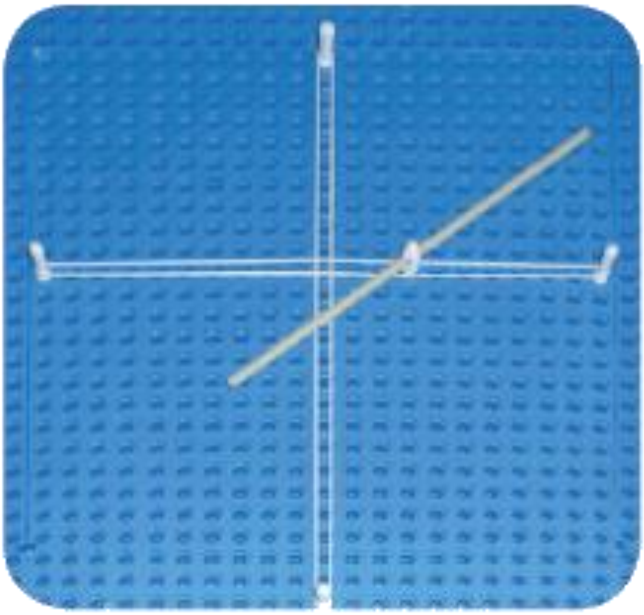
uso de materiais concretos vem de encontro a essa necessidade. Assim, o uso do Multiplano, com todos os recursos que ele possui, constitui ferramenta fundamental para promover e desenvolver essa autonomia. Um mesmo ente pode ser representado de maneiras distintas como as que podemos ver nas Figuras 3, 4 e 5.

Figura 3 – Representação de reta utilizando pinos



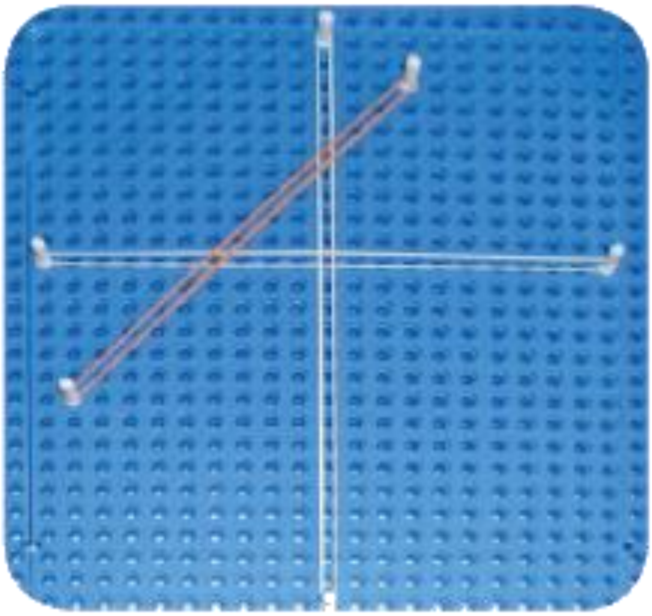
Fonte: Site institucional da indústria de produtos educacionais MULTIPLANO <http://www.multiplano.com.br/conteudos.html>. Acesso em: 7 fev. 2014.

Figura 4 – Representação de reta utilizando peça do Kit



Fonte: Site institucional da indústria de produtos educacionais MULTIPLANO <http://www.multiplano.com.br/conteudos.html>. Acesso em: 7 fev. 2014.

Figura 5 – Representação de reta utilizando pinos e borrachinhas do Kit



Fonte: Site institucional da indústria de produtos educacionais MULTIPLANO <http://www.multiplano.com.br/conteudos.html>. Acesso em: 7 fev. 2014.

5.8 A instituição e os sujeitos participantes da pesquisa

A pesquisa de campo foi realizada no 2º semestre de 2013, com um aluno cego regularmente matriculado no 2º período do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública federal localizada na cidade de São João Evangelista, Minas Gerais, no contexto da sala de aula, em aulas de cálculo diferencial. Como exposto no capítulo 1, ele pediu transferência interna do Bacharelado em Sistemas de informação, ofertado pela mesma instituição, para o curso onde está atualmente. Ao mudar para o curso de Licenciatura, a sua situação ficou irregular em relação às disciplinas a serem cursadas, uma vez que foi feito aproveitamento de algumas e, dada certa incompatibilidade nos horários, ele ficaria impossibilitado de cursar outras no 2º período em horário regular. Assim, foi montada uma grade pelo coordenador de curso, na qual ele pudesse aproveitar ao máximo o seu tempo disponível à noite. A disciplina de Cálculo I se encontra no 4º período do curso, e, como ela possui como requisito que o aluno tenha cursado fundamentos de matemática I, Daniel pôde se matricular nessa disciplina dado que tinha cursado a disciplina de fundamentos no curso de Sistemas. Nessa oportunidade, conforme o Plano de Ensino da disciplina, está previsto o conteúdo ora escolhido para a realização da coleta de dados, qual seja, derivadas de funções elementares de uma variável e funções derivadas.

5.8.1 A instituição

A Escola Agrotécnica Federal de São João Evangelista situa-se no interior de Minas na região centro leste do estado. Fundada em 27/10/1951, teve início, em 1947, através da idealização dos Doutores Nelson de Sena e Demerval José Pimenta, que, juntamente com os Senhores Oswaldo Pimenta, Monsenhor Antônio Pinheiro, Padre Davino Morais e Astrogildo Amaral, fundaram uma Sociedade Educacional. Em 1950, essa Sociedade, através de um termo de compra e compromisso, adquiriu da Senhora Ondina Amaral um terreno que possuía o nome “Chácara São Domingos”, com uma área de 277, 14ha. Dava-se início, então, ao que hoje é a Escola Agrotécnica Federal. Em dezembro de 2008, o presidente Luiz Inácio Lula da Silva sancionou a Lei nº 11.892, que instituiu, no Sistema Federal de Ensino, a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica. Hoje tal escola compõe a rede do IFMG e oferece cursos de formação tecnológica em Nutrição e Dietética, Agropecuária, Manutenção e Suporte Técnico em Informática. No nível Superior, o Instituto oferece Bacharelado em Agronomia, Tecnologia em Silvicultura, Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Sistemas de Informação. Recentemente, fora implantado o curso de Especialização em Meio Ambiente. O *campus* São João Evangelista exerce uma expressiva influência nas regiões do Vale do Rio Doce, Vale do Mucuri e Vale do Jequitinhonha e, ainda, no norte de Minas Gerais e outras regiões do Estado. Nos últimos anos, o IFMG – *campus* São João Evangelista concentrou suas atenções nos municípios de Cantagalo, Coluna, Guanhães, Materlândia, Rio Vermelho, Sabinópolis, São José do Jacuri, São Pedro do Suaçuí, Paulistas, Peçanha e Virginópolis, municípios que fazem parte de sua microrregião de atuação.

A instituição é dotada de ginásio poliesportivo, alojamentos masculino e feminino, quadras, campo de futebol profissional, laboratórios de informática em todos os prédios, salas de aulas equipadas com projetores multimídia e computadores e biblioteca com acervo atual. Para as aulas práticas dos cursos de Agropecuária e Silvicultura, a instituição possui granjas, pastos, aviários, animais e máquinas agrícolas. Possui ainda uma usina de beneficiamento de leite, transformação e industrialização de alimentos para atender ao curso técnico de nutrição e dietética. Quase todos os alimentos consumidos nas refeições por alunos e servidores são produzidos no próprio Instituto. Todos os prédios do Instituto são dotados de acessibilidade. Recentemente, fora implantado o NAPNE, com vistas a consolidar a política de inclusão na instituição.

Diante da matrícula de um aluno cego ao curso Técnico de Nutrição e Dietética no *Campus*, houvera um significativo movimento de adaptação do corpo docente, contudo não organizado ou mesmo sistematizado, para recebê-lo, conforme discutido por Machado Pimenta (2012), a qual pondera que, lamentavelmente, as ações instituídas através das ações políticas-pedagógicas ainda são incipientes e, em grande parte, ancoradas na formação dos professores para atuar nesse contexto. Atualmente, a escola não conta com outros alunos com necessidades especiais em seus cursos técnicos, porém observa-se um movimento no sentido de buscar capacitar os docentes e futuros professores para receber outros alunos. Tais ações partem, principalmente, do curso de Licenciatura em Matemática através de cursos, minicursos e oficinas ofertadas nos últimos anos que oferecem capacitação em Libras e Braille e discutem a perspectiva da inclusão.

5.8.1.1 O curso de Licenciatura em Matemática e a perspectiva da inclusão

A implantação do curso de Licenciatura em Matemática constitui-se em uma decisão acertada do IFMG, *campus* São João Evangelista para consolidar o seu compromisso com o desenvolvimento socioeconômico da região, oferecendo maiores possibilidades para a qualificação de profissionais da área de Matemática.

O referido curso surgiu a partir de um levantamento feito pelo Departamento de Desenvolvimento Educacional desse *campus*, junto aos municípios circunvizinhos, sendo que, entre as licenciaturas elencadas, a Licenciatura em Matemática foi a mais solicitada.

Essas razões é que levaram o IFMG – *Campus* São João Evangelista a ofertar o Curso de Licenciatura em Matemática, considerando, também, que a região em que esse *campus* está inserido é carente de profissionais dessa área.

As instituições de ensino superior que oferecem cursos de licenciatura têm sério compromisso de atender a essa demanda de profissionais com qualidade para atuarem no Ensino Fundamental e Médio, objetivando a promoção do desenvolvimento de ações voltadas para a sociedade, a fim de que ela possa dispor da produção do conhecimento científico e humanístico, como tem sido o trabalho do IFMG. No elenco de disciplinas do curso, em seu 4º período, consta a disciplina de educação inclusiva, cuja ementa perpassa conteúdos como políticas públicas em educação especial e de formação dos profissionais da escola na perspectiva da educação inclusiva com ênfase nas questões emanadas da sociedade contemporânea. Os temas sobre deficiência, diferença e segregação na escola pública; indivíduo, cultura, família, escola e preconceito são apresentados e discutidos, definindo certos conceitos como estudantes com necessidades especiais e inclusão social. Discute ainda ainterface entre educação de jovens e adultos, inclusão social e educação inclusiva. Já no 6º período, a disciplina de Libras é regularmente ministrada. Tendo em vista a necessidade de tornar a formação dos alunos do curso de Licenciatura mais completa, no ano de 2013 foi ministrado o primeiro curso de Braille para os discentes que atuam no PIBID. Neste ano de 2014, também estão previstas mais ações no caminho da inclusão, uma vez que o IFMG, *campus* São João Evangelista, tem papel impactante na formação geral e continuada dos profissionais de sua região de influência.

5.8.2 Daniel e os demais participantes

O Daniel, aluno cego e sujeito deste estudo, é aluno da escola desde o ensino técnico. Realizou o curso técnico de nutrição e dietética, um dos cursos técnicos da escola, e foi aprovado via vestibular para o curso de Sistemas de Informação, onde adentrou o ensino superior, tendo optado, após a conclusão do primeiro período do curso de Sistemas de Informação, por pedir reopção de curso para a Licenciatura em Matemática. Atualmente, é o único aluno cego a realizar o ensino superior do Instituto.

Os demais alunos participantes da pesquisa são alunos regularmente matriculados no curso de Licenciatura em Matemática. Desses, duas são alunas colaboradoras e voluntárias que se ocupam em dar apoio a ele em momentos de aulas. Como ele cursou quatro disciplinas, teve duas colaboradoras, as quais são colegas de turma dele e o acompanham nas disciplinas em que está regularmente matriculado. Em razão de participarem como colaboradoras, não são compensadas com bolsas ou qualquer outro tipo de remuneração, pois não existe previsão para isso no regimento da instituição. As colaboradoras auxiliam Daniel na realização de atividades no ambiente da sala de aula e, muitas vezes, fora dela também. Assentam-se ao lado dele e o auxiliam na leitura de textos escritos no quadro, esboçam ou auxiliam na montagem dos gráficos ou figuras desenhadas no quadro ou no multiplano e explicam pontos da atividade que ele não compreende de imediato.

Muitas vezes, apesar disso, notei situações de abandono alternadas com outras de auxílio. Algumas vezes, tais alunas se ocupavam de suas atribuições e mesmo esqueciam-se dele. Em outras, auxiliavam-no e discutiam com ele as atividades.

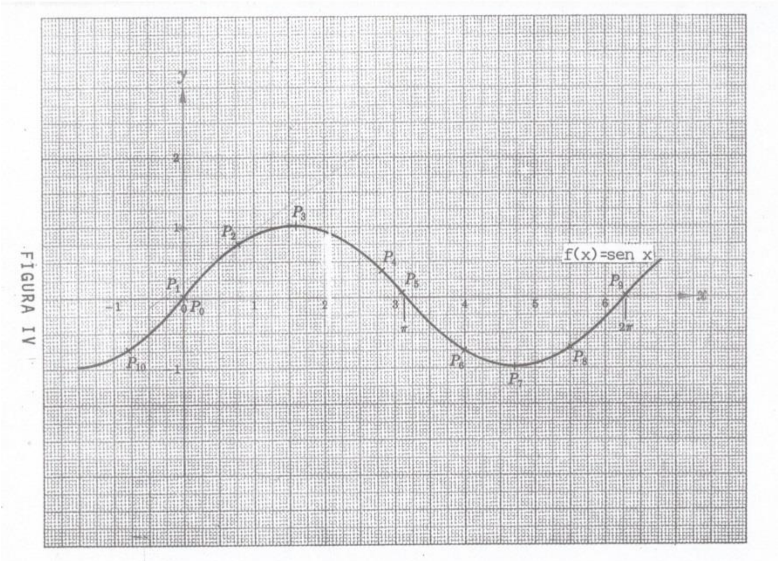
5.9 Dificuldades encontradas ao longo da pesquisa

Durante a realização das atividades, algumas coisas planejadas não transcorreram da forma como desejei. Imaginava, por exemplo, que apenas com o Multiplano conseguiríamos representar as funções e sua derivada. Enganei-me. O plano é pequeno e a localização dos pontos fica comprometida, pois algumas funções, como, por exemplo, a função Logaritmo natural, necessita de mais espaço para ser melhor representada. Os espaços entre os pontos que, geralmente, eram adotados como números inteiros não permitiam que valores decimais fossem representados no eixo y com a mesma escala. Essa dificuldade foi percebida pelo Daniel e, no encontro particular seguinte a essa aula, utilizamos um isopor e palitos combinados com borrachinhas para melhor representar tal função. O isopor também foi útil para, no mesmo espaço, representar a curva de inclinações da função logaritmo dada a sua extensão.

Outra situação que constituiu um problema foi a gravação. Dispunha-se para realizar tal intento apenas de uma câmera filmadora e uma câmera fotográfica digital. A filmadora tinha autonomia e memória ampla que permitia longo período de filmagem, desde que conectada à tomada, pois sua bateria estava viciada e não tinha autonomia para movimentos independentes. Já a câmera fotográfica, do contrário, não tinha tal autonomia. Seu tempo de gravação curto me fez perder alguns momentos importantes, segundo o meu entendimento, que pudessem elucidar alguns pontos que a câmera filmadora, fixa, não alcançava. Optei pela gravação em áudio também, mas o ruído da sala de aula impedia uma gravação mais límpida e o ruído de fundo, oriundo das conversas dos alunos, tornou a gravação de alguns momentos totalmente imprestável para a compreensão e o entendimento dos acontecimentos. Assim, mais uma vez, os encontros particulares foram de grande valia, uma vez que transcorriam em ambiente tranquilo e, eventualmente, tínhamos interrupções de alunos que necessitavam de algum material ou serviço do laboratório de matemática e, mesmo assim, tais interrupções não afetavam o andamento dos estudos que realizávamos. Nesses estudos, utilizamos o computador pessoal do Daniel dotado do programa Excel, no qual as funções que usamos estavam programadas. O computador, como dito, é dotado ainda do leitor de tela NVDA, que lia os pontos e as funções programadas para ele por mim. Durante as atividades, eu o auxiliava nas tarefas que tínhamos de realizar. Tanto Daniel quanto os alunos videntes apresentaram algumas dificuldades no tocante à confecção dos gráficos das funções causado, principalmente, devido à representação errônea no plano cartesiano e, algumas vezes, contas erradas feitas sem uma análise mais detalhada da sua validade. Interessante notar que a participação e colaboração de colegas cujo entendimento era mais rápido diante de determinados temas fez com que tais dificuldades fossem minoradas, pois ele se prontificava a auxiliar os colegas com mais dificuldades. Notadamente, poucas vezes percebi o auxílio de outros colegas que não as duas colaboradoras ao Daniel.

Outra coisa que provocou discussões foi a maneira de obter a inclinação da reta tangente às curvas. Para realizar tal atividade, utilizamos uma malha quadriculada, em que os gráficos das funções elementares (lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, seno, cosseno) já estavam esboçados, inclusive com alguns pontos marcados para que todos determinassem as inclinações das retas tangentes nos mesmos pontos e pudessem comparar seus resultados obtidos. Resgato na Figura 6 o gráfico da função $f(x) = sen(x)$, cujo esboço está representado na folha de papel milimetrado, na forma que foi disponibilizada para a realização das atividades. Alguns alunos tomavam um dado ponto, esboçavam a reta tangente, pegavam dois pontos distintos dessa reta sobre a malha e calculavam a inclinação. Outros, por sua vez, utilizaram a régua para realizar a mesma tarefa. Custei a fazê-los entender que as imperfeições nas medidas utilizando a régua na escala do papel milimetrado ou utilizando apenas a malha poderiam produzir resultados diferentes e alguns alunos demoraram para aceitar que não havia “erro”, mas resultados diferentes para o mesmo processo, devido a essas medidas imprecisas.

Figura 6 – Representação da função $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{sen(x)}$ na folha de papel milimetrado com pontos pré-determinados para a realização da atividade



Fonte: Acervo do autor.

Interessante ainda que o Daniel não percebeu isso, pois ele já adotava a sua própria escala no multiplano e não teve acesso ao papel milimetrado, e sua dificuldade fora, justamente, entender a dificuldade dos outros. Combinado a isso, ainda houve outro fator que obstruiu o andamento do trabalho que fora o fato da lâmpada do *datashow* da sala queimar-se no dia anterior ao dia que realizaria a tarefa de apresentar aos alunos a reta tangente à curva da função seno usando o GeoGebra. Como essa tarefa era a última dentre as planejadas e ocorrera justamente no último dia de aula de Cálculo na semana anterior ao tradicional feriado de outubro, não houvera oportunidade de promover a troca de sala para que a aula transcorresse conforme planejado. Mudei a estratégia e fiz algumas simulações no quadro mesmo. Voltei a essa atividade posteriormente ao feriado para, em outra sala, apresentar a proposta dinâmica da reta percorrendo a curva do seno utilizando o GeoGebra. Daniel e eu já havíamos feito essa tarefa no laboratório de matemática em um dos encontros particulares utilizando o isopor e palitos.

6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

> A escola será cada vez melhor, na medida em que cada ser se comportar como colega, como amigo, como irmão
>
> Paulo Freire

Ao longo do trabalho, procurei elaborar atividades que estabelecessem um fio condutor que, espero, permita responder à questão de investigação, tendo por base as referências do Cálculo, do meu entendimento do que seja a visualização para um cego e inspirado ainda no pensamento e obra de Lev Vygotsky.

Passo a descrever e analisar, a partir de agora, procurando ainda um possível diálogo com os textos utilizados em nosso referencial teórico.

6.1 Introdução

Nas sessões que se seguem, apresento recortes das atividades utilizadas no experimento de ensino, mas dessa vez em conjunto com os episódios de análise. Organizei essa análise procurando compreender as falas e as ações de Daniel, dentro de um processo de apropriação, considerando:

a) o que Daniel trazia consigo das explicações – diálogos, anotações em seu caderno e em seu *notebook* acerca do que vínhamos tratando em sala de aula;
b) o que Daniel já havia incorporado de atitudes novas nestas práticas e falas;
c) os dados que permitissem perceber a influência da ação do pesquisador/professor, atuando dentro de uma ZDP;
d) e como, nessas ações planejadas, Daniel respondeu e estabeleceu novas relações entre os conceitos matemáticos em questão e aqueles já discutidos anteriormente.

Devo ressaltar que nem todas as atividades inicialmente planejadas para serem utilizadas em sala de aula foram realizadas com o Daniel nos encontros particulares, que aconteceram no laboratório de Matemática, uma vez que alguns tópicos haviam sido exaustivamente discutidos, e partes das tarefas, produzidas em sala de aula. Os encontros tinham como objetivo discutir mais detalhadamente as atividades trabalhadas em sala de aula, pois, dada a dinâmica da sala de aula, muitas vezes não era possível dar a devida atenção ao Daniel. Dessa forma, optei por abordar diretamente as atividades que tinham como requisito o uso das tabelas que Daniel havia produzido em sala com as suas colegas colaboradoras. Em sala de aula, Daniel e suas colaboradoras determinaram os pares ordenados de pontos para a confecção dos gráficos das funções que representavam as curvas de inclinações das funções logaritmo natural de x e seno de x, utilizadas nas atividades; para tanto, ele fez antes, juntamente com elas, o cálculo das inclinações das retas tangentes à curva do logaritmo e do seno. A curva de inclinações da função logaritmo foi objeto de estudo do primeiro de nossos episódios particulares, como veremos a seguir. Sempre que necessário, recorríamos a esses dados produzidos em sala de aula e disponíveis em seu computador. Por último, utilizamos limites, para fechar a discussão acerca da diversidade das tangentes encontradas pelos alunos ao desenvolver a atividade relativa ao cálculo da inclinação da reta tangente em determinados pontos.

Para Vygotsky (1998 apud FERNANDES, 2010, p. 8), um experimento deveria ter por objetivo estudar "o curso do desenvolvimento do processo", oferecendo o máximo de oportunidades para que o sujeito experimental se engajasse nas mais variadas atividades que deveriam ser observadas e não rigidamente controladas (COLE; SCRIBNER, 1998, p. 16 apud FERNANDES, 2010). Assim, em nosso encontro particular, na tarefa realizada junto com Daniel, planejei abordar vários conceitos discutidos nas aulas, em sala de aula – como plano cartesiano, eixos, pares ordenados, função, inclinação de uma reta, a maneira de se obter tal inclinação dados dois pontos distintos, reta tangente a uma curva e, finalmente, função derivada. Para Vygotsky (1998 apud FERNANDES, 2004, p. 101), "A memória não só torna disponíveis fragmentos do passado como, também, transforma-se num método de unir elementos da experiência passada com a presente".

Para Daniel, observei que foi importante, em certa medida, unir as informações disponíveis em seu *notebook*[36], as informações discutidas no processo instrucional ao longo das tarefas desenvolvidas nas aulas, aquelas que estávamos construindo nos encontros particulares. Corriqueiramente, ele fazia menção a termos e ações discutidas na sala de aula e buscava relações com objetos que conhecera

[36] No *notebook*, Daniel mantinha informações produzidas em sala de aula, como, por exemplo, anotações que fazia de sua compreensão das aulas, textos que enviava a ele por *e-mail* e as tabelas produzidas em Excel com as funções que tratávamos e programadas por mim.

em sua fase da vida anterior à instalação da cegueira total, demonstrando possuir memória visual preservada. Esse fato, por exemplo, foi importante, como veremos adiante, quando ele relaciona um feixe de retas tangentes ao longo de uma dada curva com um leque, um objeto que traz como lembrança do passado de sua memória quando ainda enxergava.

Neste primeiro momento da análise, no item 6.2, deteve-se nos aspectos da confecção do gráfico por Daniel, procurando ressaltar como ele localiza pontos e estabelece escalas e medidas sobre o plano cartesiano. Nos momentos seguintes, discutiu-se as questões relativas à confecção da curva de inclinações da função $f(x) = \ln \mathrm{x}$, utilizando as inclinações da reta tangente à função $f(x) = \ln \mathrm{x}$ e a relação existente entre esta nova curva e a curva original.

Em seguida, no item 6.3, trataremos do entendimento de Daniel acerca da reta tangente à uma curva. Nessa ocasião, utilizamos as funções $f(x) = \ln \mathrm{x}$ e $\mathrm{f(x)=sen\,(x)}$.

No item 6.4, apresentou-se a maneira que encontramos para Daniel “enxergar” e guardar os pontos por meio de pares ordenados organizados em uma planilha eletrônica.

No item 6.5, ainda, procurou-se descrever como desenvolvemos a atividade da determinação da inclinação das retas tangentes à curva da função $\mathrm{f(x)} = sen(\mathrm{x})$ e o percurso de Daniel nesse processo, na tentativa de levá-lo ao entendimento da relação entre uma função e a sua função derivada. Destacou-se ainda a visão de Daniel acerca da curva de inclinações e como ele relacionou esses entes com objetos e signos.

6.2 A estratégia de Daniel para determinar escalas e estabelecer medidas

A relação de uso que fazemos corriqueiramente do conceito de medir e a forma como o fazemos, de suma importância para muitas de nossas relações com o mundo, levou-me a escolher esse conceito para estudo, principalmente porque, pelo fato de Daniel ser cego, observar como ele se sai nessas atividades – como ele modifica suas estratégias e mesmo se há em sua prática alguma estratégia – fora algo que me chamou a atenção. Justificou-se ainda a minha escolha pelo fato de que, para esboçar um gráfico qualquer, é necessário o conhecimento de escalas para a localização cartesiana dos pontos pelos quais uma dada função passa. Para os videntes, essa localização é visual. Geralmente, fazemos estimativas visuais da localização dos pontos antes mesmo de efetivamente realizar a sua marcação. A medida é um conceito oficial da matemática. Medir é comparar. Particularmente, entendeu-se que determinar uma escala requer ainda a capacidade de vislumbrar o todo e perceber como dividir o todo em partes de modo que as partes acomodem as nossas intenções com ela. Durante essa análise, pôde-se perceber como Daniel modificou suas estratégias ao determinar escalas e estabelecer medidas. A seguir, escolheu-se alguns momentos onde se fez necessário o uso desse complexo sistema de escolhas, quais sejam: determinar o todo, escolher uma escala que comporte as divisões necessárias ao nosso objetivo com ela e, efetivamente, dividir. Procurou-se evidenciar momentos onde Daniel utilizou artefatos que, para ele, nesses casos, representaram padrões de medida.

O primeiro desses momentos está localizado na sala de aula, e o segundo, no laboratório de matemática, onde ocorreram os encontros particulares.

6.2.1 O uso do Multiplano e o estabelecimento de uma escala em sala de aula no dia 1º de outubro de 2013

Essa atividade foi realizada em sala de aula, no dia 1º de outubro de 2013, na aula das 19 horas. Ao realizar a atividade 1 (Anexo A), cujo objetivo era esboçar a curva da função $f(x) = x^2$, pediu-se aos alunos que esboçassem o gráfico dessa função utilizando o papel milimetrado. Explicou-se que deveriam escolher uma escala adequada no papel milimetrado de modo a acomodar o gráfico ocupando o maior espaço possível na folha. Discutiu-se com os alunos a representação de uma curva suave, sem segmentos de reta que unissem dois pontos distintos e deixei que fizessem a atividade de construção sem muita intervenção de minha parte. Daniel, inclusive, tinha a sua disposição o Multiplano e, como não trouxera seu computador, dependia neste momento de uma de suas colegas colaboradoras para lhe informar os pontos da curva, disponíveis na Tabela 1 da Atividade 1, que resgatou-se novamente aqui na Tabela 1, previamente definidos por mim.

Tabela 1 – Pares ordenados para serem representados na folha de papel militrado referente à função $f(x) = x^2$

Ponto	(x,x^2)	(x,y)
A	$(0,0^2)$	(0,0)
B	$(\frac{1}{2},(\frac{1}{2})^2)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
C	$(1,1^2)$	(1,1)
D	$(2,2^2)$	(2,4)
E	$(-1,(-1)^2)$	(-1,1)
F	$(-2,(-2)^2)$	(-2,4)

Fonte: Atividade 1 (Anexo A).

Durante algum tempo, deixei que Daniel realizasse a atividade apenas com a orientação de Júlia, uma de suas colaboradoras. Depois de algum tempo, acerquei-me dele e observei que havia representado alguns pontos, que pareciam representar os que constavam da Tabela 1 no Multiplano. O trecho transcrito a seguir apresenta parte de nossa conversa ocorrida na sala de aula, no dia 1º de outubro de 2013. Naquele momento Daniel utilizou-se do Multiplano para estabelecer escalas e representar os pontos da Tabela 1.

Prof.: *E aí, você conseguiu localizar quais pontos?*
[Coloca o dedo indicador sobre um determinado pino.]
Daniel: *Menos dois e quatro*...
[Refere-se ao par ordenado (-2,4). Nesse trecho, cada dois números representam um par ordenado na ordem dita (x,y).]
[Muda para outro pino.]
Daniel: *Esse era um e menos um...*

Neste momento, Júlia, que escrevia algo em seu caderno, levanta e olha o ponto que ele havia acabado de falar. O trecho seguinte retrata esta conversa.

[Corrijo]
Prof.: *Menos um e um*...
Ela acena com a cabeça concordando.
[Refere-se ao par ordenado (-1,1) que está corretamente representado no Multiplano.]
[passa a mão sobre o plano e localiza mais um pino].
Daniel: *Zero e zero.*
[Refere-se ao par ordenado (0,0);]
Daniel: [...] *e zero vírgula vinte e cinco e zero vírgula cinco.*
[Júlia olha novamente para mim, percebendo que ele marcara este ponto errado].
Prof.: *Ah, tá!*

[Percebo o olhar dela mas não o corrijo neste momento. O certo seria (0,5;0,25). Mas o que vislumbrei foi algo diferente. Estava atento ao que entendi ser a escala que ele escolhera.]
Daniel: [...] *um e um; dois e quatro!*
[Coloca o dedo indicador sobre cada pino indicando a posição enquanto fala.]
Prof.: *Hummm, então você estabeleceu uma escala aí!*
Daniel: *É zero vírgula vinte e cinco para cada pontinho!*
[olho para Júlia e esboço um sorriso, espantado com a precisão que ele estabeleceu].
Júlia: *Não, e ele adotou né! Ele vem aqui e pega quatro (dedos)...*
[faz com a mão, reproduzindo o que Daniel faz com os dedos juntos (Figura 7)].
Júlia: *E só vira o dedo e roda pra fazer pra y.*
[ela coloca os quatro dedos juntos sobre o eixo x, começando pela origem e, em seguida, gira os dedos para representar a mesma medida no eixo y].
Júlia: *Ninguém aguenta!* [risos.]
Daniel: *Abaixando aqui, vem cá para o último... Se deixasse aqui no ponto normal, não caberia...*
[Ele se refere aos pinos e as borrachinhas que estabelecem o eixo x. De início, ele dividiu o Multiplano com as borrachinhas, de modo a ter quatro partes de mesmo tamanho. Para ele, este é o "ponto normal". O Multiplano tem marcações que o dividem em quatro quadrantes de mesmo tamanho e o buraco em seu centro é maior que os demais para simbolizar a origem. Como percebeu que não dava para representar os pontos mais altos (2,4) com a escala que estabelecera (0.25 para a distância entre dois pinos), colocou o eixo x na base do multiplano.]

Figura 7 – Explicação de Júlia com os dedos unidos sobre o Multiplano, descrevendo como Daniel estabelece medidas de mesmo comprimento e dimensiona sua escala na aula do dia 1º de outubro de 2013

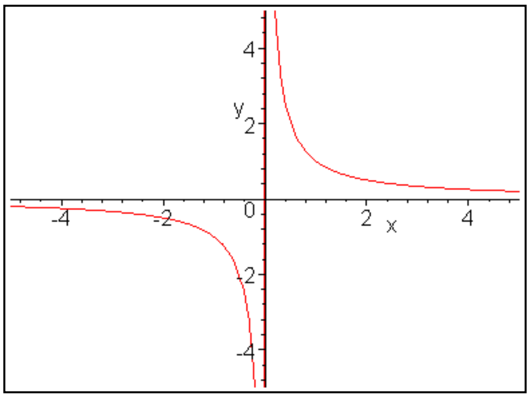
Fonte: Acervo do autor.

6.2.2 A estratégia de Daniel para determinar uma escala em uma placa de isopor sem marcações definidas previamente

No primeiro de nossos encontros particulares que aconteceu no dia 8 de outubro de 2013 no laboratório de matemática, tínhamos por objetivo relacionar o gráfico da função $\mathrm{f(x)}=\frac{1}{\mathrm{x}}$ com a de sua função primitiva $(\ln(\mathrm{x}))$, pois os pares ordenados foram obtidos por meio do cálculo das inclinações das retas tangentes à curva do $\ln \mathrm{x}$ em determinados pontos desta curva.

Para fazer o gráfico (Figura 10) representado na Figura 8, Daniel utilizou os pares ordenados (x, i_x), sendo i_x, a inclinação da reta tangente à curva $\ln(\mathrm{x})$ em $(x, \ln(\mathrm{x}))$. Esses pares ordenados foram determinados nas atividades desenvolvidas em sala de aula no dia 2 de outubro de 2013.

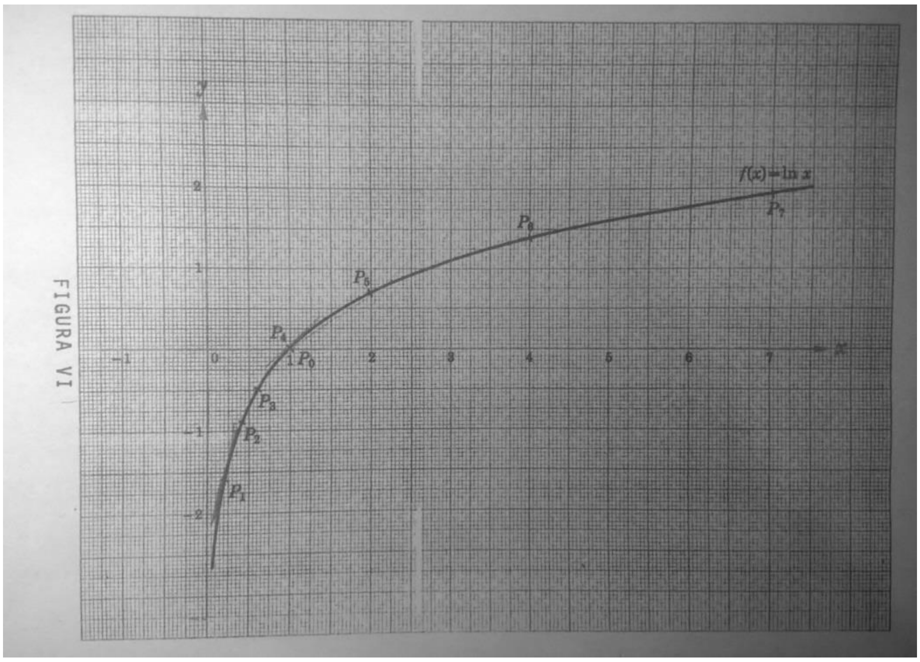
Figura 8 – Esboço do gráfico da função recíproca $\left(\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}\right)$



Fonte: Acervo do autor.

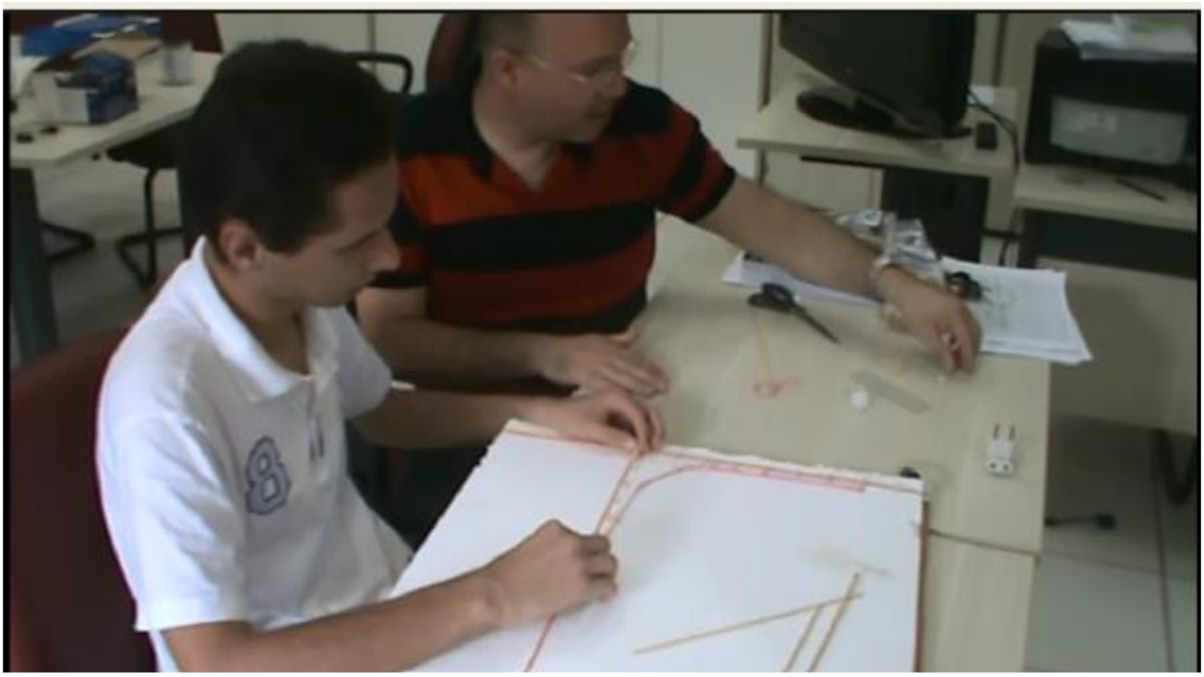
As inclinações, disponíveis na Tabela 2, foram calculadas por suas colegas colaboradoras. Daniel não participou dessa tarefa diretamente, pois ela foi baseada na Figura VI (curva da função $y = \ln(\mathrm{x})$disponível no ANEXO G) que resgatamos na Figura 9.

Figura 9 – Esboço do gráfico da $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$ utilizada na atividade 1



Fonte: Acervo do autor.

Figura 10 – Esboço de um ramo do gráfico da f(x) = $\frac{1}{x}$ realizado por Daniel com os pontos descritos na Tabela 2



Fonte: Acervo do autor.

Tabela 2 – Alguns pontos[37] obtidos por meio do cálculo das inclinações das retas tangentes à curva do $\ln(x)$

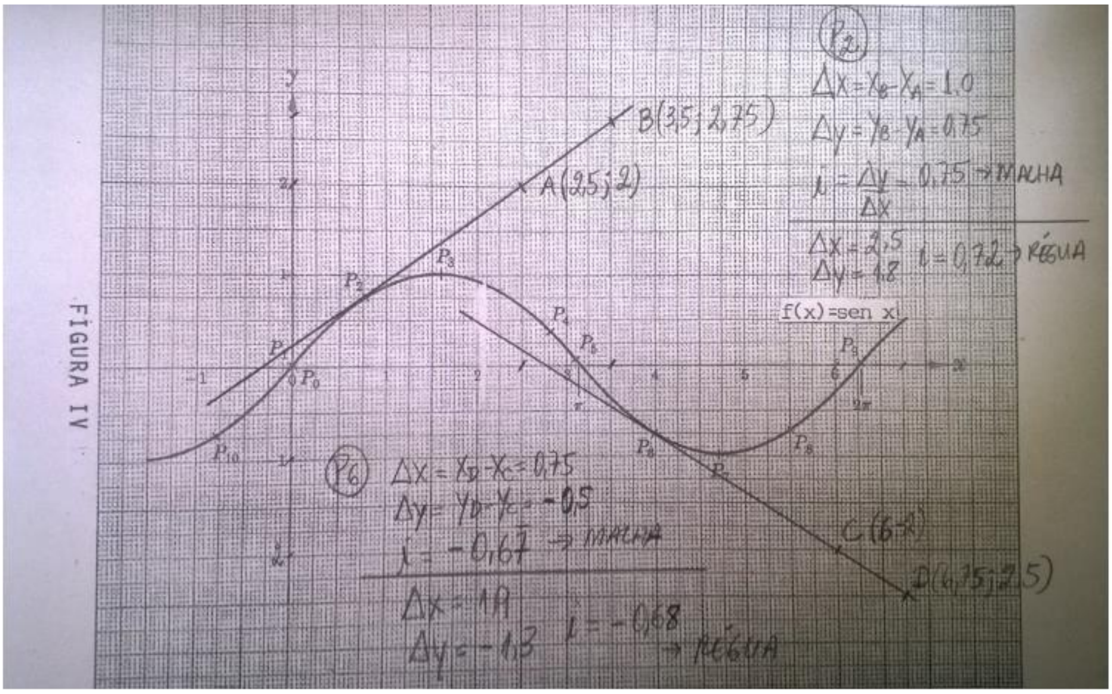
Ponto	Coordenada x	Inclinação da reta tangente à curva de $\ln(x)$ em $(x, \ln(x))$
A	0,2	7,00
B	0,4	2,40
C	0,6	1,78
D	1,0	1,25
E	2,0	0,50
F	4,0	0,28
G	7,0	0,17
H	-	-
I	-	-
J	-	-

Fonte: Acervo do autor.

Durante a atividade desenvolvida em sala, na aula do dia 2 de outubro de 2013, Daniel tinha à sua disposição os gráficos cujos traçados foram realçados com cola alto-relevo. Contudo, não tinha como realizar as contas para determinar a inclinação, pois esta deveria ser feita utilizando dois pontos distintos sobre a reta tangente. Estas retas tangentes foram determinadas visualmente pelos alunos. Recupero na Figura 11 a maneira que os alunos videntes utilizaram para determinar os pontos coletados diretamente da malha milimetrada e desta forma traçar a reta tangente.

[37] Na Tabela 2, utilizamos apenas os pontos de A a G, visto que os alunos haviam pedido para reduzir a quantidade de pontos da tarefa devido, segundo eles, ao trabalho enfadonho de calcular as inclinações de tantas retas manualmente.

Figura 11 – Determinação visual das retas tangentes à curva da função $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$ e determinação da inclinação por meio do cálculo usando a malha e medindo com a régua



Fonte: Acervo do autor.

Contudo, mesmo não realizando a atividade propriamente, Daniel participou da discussão e questionou as meninas quanto ao processo de obtenção da inclinação. Esse procedimento de cálculo foi realizado para as funções como visto na Figura 11 que retrata o cálculo das inclinações feito a partir de pontos preestabelecidos na função $f(x) = sen(x)$. Tais pares ordenados foram anotados por ele em uma tabela que fiz no Excel e que estava guardada em seu *notebook* (Tabela 2).

Os alunos determinaram as inclinações das retas tangentes à curva da função $f(x) = \ln(x)$ utilizando o cálculo de um triângulo obtido a partir de dois pontos distintos, retirados da escala da malha e localizados sobre a reta da mesma forma descrita na Figura 11. Na realização da atividade que objetivava o cálculo das inclinações para as funções trigonométricas, foi necessário explicar a diferença entre utilizar graus e radianos, uma vez que trabalhávamos na reta real e a utilização da unidade radianos e não da unidade grau nas calculadoras fazia-se necessária.

Os pontos apresentados na Tabela 2 constituíam uma dificuldade adicional a Daniel, pois alguns dentre eles tratam-se de números decimais. Nesse caso, ele deveria estimar a localização dos pontos inteiros de tal modo que comportasse ainda localizar os pontos intermediários. Ou seja, deveria utilizar a sua capacidade de estimar, dimensionar e medir.

Apesar de termos o Multiplano disponível nesse momento, optei por não utilizá-lo, pois não haveria como descrever o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{\mathrm{x}}$ nele, dada a magnitude[38] dos pontos e a limitação do Multiplano. Como estávamos no laboratório de matemática, resolvi construir os gráficos da função $f(x)=\frac{1}{\mathrm{x}}$ e, posteriormente, sua primitiva $f(x)=\ln \mathrm{x}$, tendo por base os gráficos das atividades 6 e 9 (Anexo A) realizadas em sala de aula. Para o plano cartesiano, utilizamos uma placa de isopor de 80 cm x 80 cm, elásticos para determinar os eixos do sistema cartesiano, palitos de churrasco em pequenos pedaços para marcar os pontos e borrachinhas de dinheiro para unir dois pontos formando um segmento de reta. Eu mesmo dispus os elásticos no isopor, representando os eixos x e y, de forma a dividi-lo em 4 quadrantes de tamanhos aproximadamente iguais, da mesma forma que o Multiplano retrata em seu “ponto normal”, como diz Daniel.

Sobre os eixos x e y, Daniel teria de estabelecer uma escala. De início ele tinha de dividir adequadamente o espaço de modo que coubessem ambas as funções $f(x)=\ln \mathrm{x}$ e $f(x)=\frac{1}{\mathrm{x}}$. Nesse caso, estabelecer escalas e medidas constituía o primeiro desafio para a confecção dos gráficos. Primeiramente, pedi-lhe que utilizasse os dedos para estimar o espaço disponível, como tinha costume, para em seguida, estabelecer a distância entre os pontos inteiros dos semi eixos. Contudo, ao longo das atividades em sala, notei que, corriqueiramente, ele utilizava um pedaço de régua que trazia consigo para essa tarefa e fazia dele um padrão de medida. Como meu interesse, nesse ponto da pesquisa, era observar como ele fazia uso desses artefatos, provoquei-o para que estabelecesse a escala e marcasse os pontos e passei a observar sua maneira de estabelecer relações, utilizar artefatos, construir conhecimento e externá-los através de ações, gestos e palavras. No trecho seguir, apresentamos um diálogo que analisamos na sequência onde Daniel estabelece uma escala utilizando as mãos abertas. Este acontecimento deu-se no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013.

[38] O Multiplano é uma peça retangular de 22 por 26 perfurações. Como a escolha que fizemos para as coordenadas x dos pontos variam entre 0,2 e 7, não haveria como encontrar uma escala que comportasse a representação do 0,2 e do 7,em uma mesma linha, com a quantidade de espaços disponíveis para marcar os pontos no Multiplano.

> [Começo pegando um palito de churrasco e partindo-o em pedaços que serão utilizados como pontos no isopor.] [39]
> **Prof.:** *Estabelece uma escala para o eixo x. Deixa eu ver quais foram os pontos que você registrou lá.*
> [Pego o computador do Daniel, em que estão, em uma planilha Excel[40], registrados os pontos referentes ao gráfico que iremos esboçar. Esses valores foram calculados em sala de aula.]
> **Prof.:** *É... ali* [na atividade feita na aula] *ficou assim olha: 0,2 (zero vírgula dois); 0,4 (zero vírgula quatro); 0,6 (zero vírgula seis); 1 (um); 2 (dois); 4 (quatro); 7 (sete).*
> [Para coordenadas de x dos pontos.]
> **Prof.:** *Então é melhor a gente...*
> [Nesse momento, Daniel pega um pedaço de régua que ele guarda.]
> **Prof.:** *Vai com o dedo mesmo, do jeito que você costuma fazer! Até o ponto... tenta pegar este espaço... Ah, não! vamos fazer o seguinte? Vamos arredar o eixo y para cá [para a esquerda]. Certo?*
> [Eu havia colocado os elásticos no isopor de forma a dividi-lo em quatro quadrantes de tamanhos aproximadamente iguais. Contudo, observei que, como trabalharíamos com a função ln(x), não necessitaríamos do semieixo negativo de x. Assim, arredei eu mesmo o elástico referente ao eixo y para a extremidade do isopor, garantindo mais espaço para o semieixo positivo].
> **Prof.:** *Ai é o seguinte, os pontos que a gente tem ali são: 0,2 (zero ponto dois); 0,4 (zero ponto quatro); 0,6 (zero ponto seis)...* [apesar de falar “pontos”, refiro-me à coordenada x dos pontos].
> [Daniel pega o plano e, com as mãos, começa a verificar uma possível escala para alocar os pontos.]
> **Prof.:** *Depois um; dois; quatro; sete. Então... Esse espaço todo que a gente tem aí vamos ter que utilizar até em torno do 7.*
> [Nesse momento, ele utilizava as duas mãos espalmadas para medir o comprimento total disponível no eixo x (Figura 12)].
> **Prof.:** *Vamos ver o que você vai pensar aí...*
> [Retomo ao meu trabalho de confeccionar os pontos cortando os palitos de churrasco em pequenos pedaços. Enquanto isso, o Daniel segue dividindo o espaço com as mãos e estabelecendo lugares para alocar os pontos. Agora com os dedos unidos, mede o espaço. Mede o espaço de 4 dedos e marca a posição para colocar o primeiro ponto que representará o número 1. Resmunga algo que não entendo.]

Com essa atividade, foi possível observar como Daniel utilizava determinados materiais para, por exemplo, estabelecer uma escala para localizar os pontos sobre os eixos ou, ainda, como utilizava os dedos para estimar distâncias. Disponibilizei a ele o material, mas não lhe determinei uma maneira de fazer isso. Pedi que fizesse apenas. Para um cego, medir é algo complicado, pois a maioria dos instrumentos de medida é feita para videntes. Réguas com marcações em alto-relevo não são fáceis de serem encontradas no mercado. Assim, eles acabam desenvolvendo sua própria maneira de estimar e medir. No caso de Daniel, utilizava inicialmente a mão espalmada para medir distâncias maiores (Figura 12) e os dedos juntos (Figura 13)

---

[39] Nas discussões apresentadas, procurei inserir alguns comentários meus entre colchetes, sempre que julguei necessário para melhorar o entendimento do contexto.
[40] Algumas descrições de como Daniel lida com os programas e utiliza o computador estão no capítulo 4.

para medidas de distâncias menores. Contudo, ambas as formas são apenas aproximações de medidas, sem rigor ou precisão.

Figura 12 – Uso das mãos para estabelecer uma escala no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Figura 13 – Uso das mãos unidas para estabelecer uma escala no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Daniel não fica satisfeito e resmunga algo que não compreendo. Eu interfiro dizendo que não há necessidade de tanta precisão. Retrato este diálogo no treco a seguir que aconteceu no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013.

> **Prof.:** *Não! Não, precisa ser uma coisa olho de santo também não! Isso é só assim pra gente poder... pra gente poder fazer um plano cartesiano mais ou menos decente.*
> [Daniel continua trabalhando assim mesmo; observo o seu trabalho de marcar os pontos sobre o eixo dos x e aprovo o que fizera.]
> **Prof.:** *Isso ai! Muito bem!*
> **Prof.:** *Isso! Faz o seguinte, olha aí no canto, tem os pedacinhos de pau* [os palitinhos que eu estava cortando]. *O que nós vamos fazer? Você vai colocando eles na escala aí. Cuidado para não apertar eles, pois têm umas pontinhas. Senão fura!*
> [Auxilio-o apertando os palitinhos/pontos que ele já inseriu para que fiquem mais firmes na placa de isopor e possam suportar as borrachinhas sem se soltarem.]
> **Daniel**: *Está mais ou menos certo?*

Em seguida, observo que, apesar de minha aprovação, Daniel não se dá por satisfeito, pois, com os dedos, cada espaço entre dois pontos não tem exatamente a mesma distância. Ele muda, então, a sua estratégia e passa a utilizar o pedaço de régua (Figura 14) que sempre traz consigo como uma distância inteira entre dois pontos. Interessante ressaltar que ele não utiliza o pedaço de régua na horizontal como se estivesse lendo as medidas; utiliza-o na vertical de modo que a largura da régua seja a sua distância fixa. Ou seja, a largura do pedaço de régua, para Daniel, é a sua unidade de medida. Dessa forma, garante o espaçamento igual entre os pontos. No trecho a seguir, a transcrição retrata a escolha que Daniel fez pelo pedaço de régua e sua utilização como artefato de medida da distância inteira entre dois pontos. Este diálogo ocorreu no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013.

> **Daniel**: *O meu pedaço de régua serve...*
> [O ar condicionado, neste momento, faz um ruído que confunde o diálogo da gravação.]
> **Daniel**: [Parece dizer] [...] *e exigir que a largura da régua fica bem certinho!*
> **Prof.:** *Serve! É uma escala! É uma escala!*

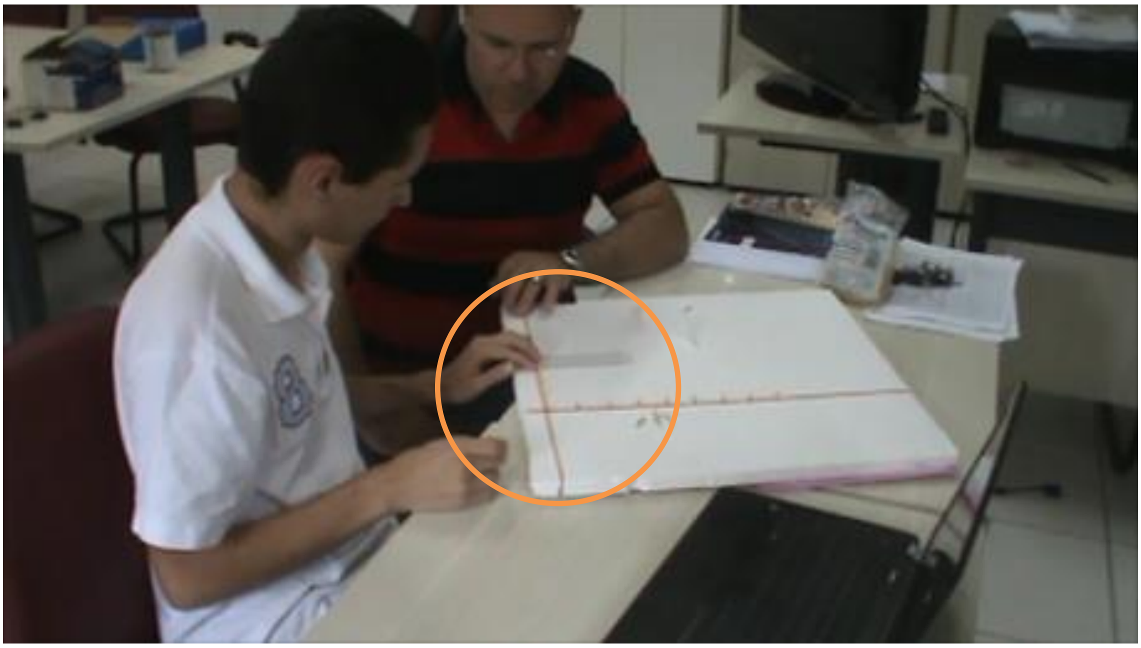
Figura 14 – Utilização do pedaço de régua para marcar os pontos no eixo x no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Em seguida, da mesma forma, Daniel passa a marcar com o pedaço de régua os pontos também no eixo y (Figura 15). Marcou, nessa ocasião, apenas os pontos do semieixo positivo. O trecho a seguir descreve esse diálogo.

Prof.: *Beleza! São quantos que a gente tem que fazer?*
Daniel*: Não sei...*
Prof.: *Sete? Sete não é?*
[Daniel volta no seu *notebook* e o NVDA fala para ele as coordenadas dos pontos.]
Prof.: *Isso! Isso! Sete. E em cima sete também.*
[Daniel continua utilizando a sua “escala de régua” para definir os pontos finais. Passa a mão sobre o que fez para verificar se está correto ou faltando algo. Conta os pontos. Até o oito.]
Prof.: *Tá bom! Vamos para a vertical agora? Deixa eu virar o plano... Vertical agora. Marca a origem né? Cadê a origem?*
[Ele coloca o dedo sobre a origem e, em seguida, passa a marcar os pontos no eixo y.]

Figura 15 – Utilização do pedaço de régua para verificação da igualdade de distância entre os pontos sobre o eixo y no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013



Fonte: Acervo do autor.

A estratégia adotada por Daniel, ao utilizar o pedaço de régua como instrumento de medida, de forma não convencional como fizera, sugere um cuidado que ele teve ao partir de medidas não padronizadas (palmos, dedos) para uma medida padronizada (largura da régua). Pedi que fizesse por estimativa, mas ele não se dera por satisfeito. De fato, como os pontos teriam coordenadas decimais, seria importante que a marcação respeitasse uma escala e um padrão uniforme de medida. Ficou evidente que ele teve esse cuidado e, como já vinha percebendo, essa estratégia constituía um método geral que ele trazia consigo.

Levando em conta que, para a sua formação enquanto futuro professor de Matemática, medir é algo indissociável de sua prática, as estratégias que ele, como aluno cego, deve desenvolver devem trazer em si o cunho da exatidão e da padronização. Cabe a reflexão acerca do uso de instrumentos para a aquisição do conceito de medir. A relação do indivíduo com os instrumentos como régua, trena, fita métrica, entre outros, deve proporcionar, como afirma D'Amore (2005, p. 66-7 apud PEREIRA, M.D., 2012, p. 2), algo além da aquisição de conceitos, mas sim o saber fazer, que engloba a construção e o uso de conceitos; pela aprendizagem de estratégias como o saber resolver e o saber demostrar; e pela aprendizagem das atividades algorítmicas, como o saber calcular e o saber operar.

Daniel, portanto, faz uso do conceito de medida através da estratégia de utilizar as mãos para estimar medidas e dimensionar o espaço disponível, mas, na hora que, por motivo da própria atividade, faz-se necessário o uso da precisão, modifica a sua estratégia utilizando um artefato que faz as vezes de unidade de medida. É comum ainda em sua prática utilizar-se de outros artefatos para medir distâncias. Percebi, algumas vezes, a utilização de palitos de bambu e mesmo de uma haste do Multiplano (Figuras 16 a e b), que, teoricamente, constitui-se em um palito que serve para representar uma reta nesse plano sendo utilizada por Daniel em momentos em que precisava estabelecer uma medida. Tal uso constitui uma prática corriqueira em sua tarefa de medir que, em seu conceito, recupera a ideia de comparar.

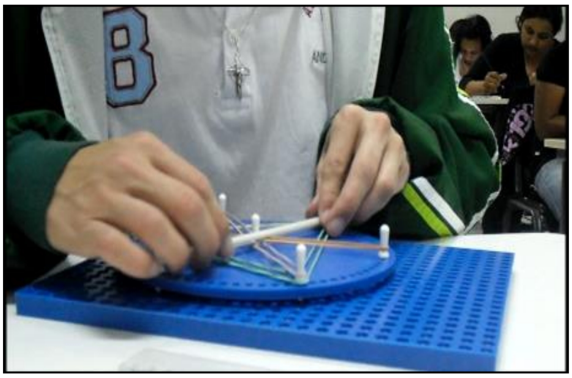
Observo nas diversas atividades desenvolvidas em sala, no contexto da pesquisa e fora dele, em que era necessário que as medidas fossem idênticas (e.g.: diâmetros de uma mesma circunferência, lados de um triângulo equilátero ou quadrado), o uso de uma haste do Multiplano para comparar tais medidas (Figura 16a e Figura 16b).

Figura 16 – Uso de uma haste do Multiplano para a comparação de distâncias entre dois pontos

Figura 16a

Figura 16b

Figura 16c



Fonte: Acervo do autor.

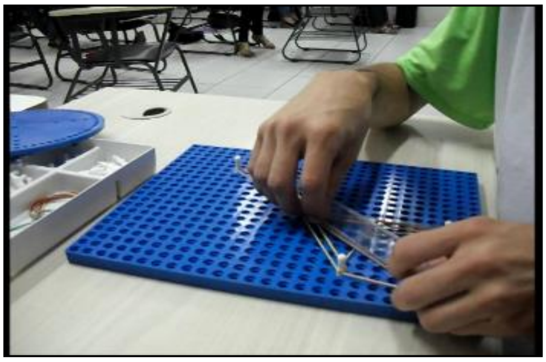
Em outra ocasião, utilizava o palito para comparar diversas medidas e verificar se os pontos que compunham determinado objeto estavam na posição correta (Figura 16c).

Em outras ocasiões, utilizava também uma régua (Figura 17), contudo não com a finalidade de ler a medidas, mas de estabelecer a distância entre dois objetos e compará-la com outras distâncias.

Figura 17 – Uso de uma régua para comparação de distâncias entre dois pontos.

Figura 17a

Figura 17b



Fonte: Acervo do autor.

6.2.3 Considerações sobre o uso de instrumentos para medir que Daniel utiliza

O uso de instrumentos é uma prática comum na relação de Daniel e o processo de medir. Entendo que Daniel, à sua maneira, sabe identificar em quais momentos a sua prática de medir pode ser de uma ou outra maneira. Quando necessita "precisar" a medida e quando precisa apenas estimar a medida e que, de uma ou de outra forma, o saber fazer, o saber demonstrar e o saber calcular, fazem parte de sua prática. D'Amore, Radford e Bagni (apud D´AMORE, 2006, p. 6) consideram que a aprendizagem matemática de "um objeto *O* por parte de um indivíduo *I* no seio de uma sociedade *S* não será mais que a adesão de *I* às práticas que os outros membros de *S* desenvolvem ao redor do dado objeto *O*".

A prática de medir, estabelecida em nossa sociedade, compreende o uso de instrumentos cujos padrões, de certa forma, são visuais. Quando fazemos uso de instrumentos prontos com os alunos, muitas vezes, pulamos etapas e vamos direto à padronização aceita e estabelecida socialmente, perdendo a essência que é a comparação. Medir passa a ser “ler” o que o instrumento mostra. Divisões e escalas de medidas são, muitas vezes, abstratas e o uso e a prática que fazemos, convencionais. Para um vidente, a estimativa é visual. Para Daniel, sua estimativa é táctil. Daniel tem por prática, quando demandado a estabelecer medidas, explorar com as mãos abertas o espaço disponível. Se o espaço é pequeno, utiliza os dedos unidos. O gesto icônico utilizado por Daniel em juntar os dedos e estabelecer uma determinada distância física padrão é uma prática comum sua e foi, inclusive, ressaltada por Júlia, conforme a Figura 7 Corriqueiramente utiliza esse processo e, como podemos observar na Figura 13, tal prática favorece a criação de uma estratégia que é empregada em outras tarefas. Quando desafiado a estabelecer medidas em uma situação nova onde não há uma escala (nesse caso, a folha de isopor), utilizou-se de sua estratégia para dividir o espaço de acordo com a conveniência da atividade.

Para um cego, a forma de medir que os videntes utilizam por meio de réguas, trenas, paquímetros etc. não fazem muito “sentido”, pois, na prática, não conseguem percebê-las, uma em relação à outra como os videntes percebem. Para um vidente, é “automático” utilizar uma régua por exemplo e ler a medida apresentada nela. É necessário possibilitar a eles (cegos e videntes) espaço de modo que desenvolvam estratégias próprias para compreender a medida como uma relação entre duas grandezas. Daniel demonstrou ao longo das tarefas que envolviam medidas que possui uma estratégia, ora utilizando os dedos, ora utilizando o seu pedaço de régua como unidade de medida. Percebi que ele consegue inferir, da sua maneira, a relação entre o espaço total e a unidade de medida que dispõe. Ele desenvolveu essa estratégia que traz consigo.

Fernandes (2004) descreve em seu trabalho com quatro aprendizes sem acuidade visual, tendo como pano de fundo os conceitos de área e perímetro, que a estratégia desenvolvida pelos alunos para o cálculo da área e do perímetro das figuras foi favorecida pela “escolha” de uma unidade de medida. Feito isso, decompuseram as figuras e verificaram quantas vezes a unidade cabia na figura. Dessa forma, o processo utilizado recupera a essência de medir, fazendo com que o cálculo e a leitura não sejam automáticos, favorecendo as estimativas. Entendemos da mesma forma que Fernandes que é necessário para os cegos criarem seus próprios métodos para verificar essas relações de uma maneira que se aproximem da prática de medir da sociedade e, assim, de fato, façam parte dela. Como descrito anteriormente, Vygotsky concentrou sua atenção na capacidade que as crianças tinham em detrimento das dificuldades. Concentrou-se nas potencialidades e na criatividade do ser humano em reorganizar suas capacidades diante de um novo desafio. Nuernberg, por sua vez, destaca que os cegos encontram novas relações entre os artefatos mentais e materiais alinhando-se ao ponto de vista de Vygotsky quando afirma que a cegueira causa uma total reestruturação de todas as potencialidades do organismo e da personalidade no que diz respeito à reorganização da forma como os conceitos serão apropriados. Daniel, ao estabelecer escalas utilizando como padrão de medida o seu pedaço de régua, resgata o conceito de comparação, essência da medida, utilizando-se desses materiais e estabelecendo nova relação entre os artefatos mentais e materiais. Daniel, portanto, diante da incapacidade visual, encontra nexos interfuncionais distintos dos esperados na condição normal. Encontra sentido na utilização de um pedaço de régua que, para a maioria das pessoas, não passaria de um pedaço de régua.

6.3 A reta tangente à curva por um dado ponto

Uma de minhas intenções nas atividades programadas era favorecer, de alguma forma, estratégias para que Daniel pudesse compreender o conceito de reta tangente a uma curva em um dado ponto de modo que ele mesmo, Daniel, pudesse, à sua maneira, dispor de ferramentas que fizessem sentido para ele não só naquele momento como em momentos futuros.

6.3.1 Algumas considerações preliminares

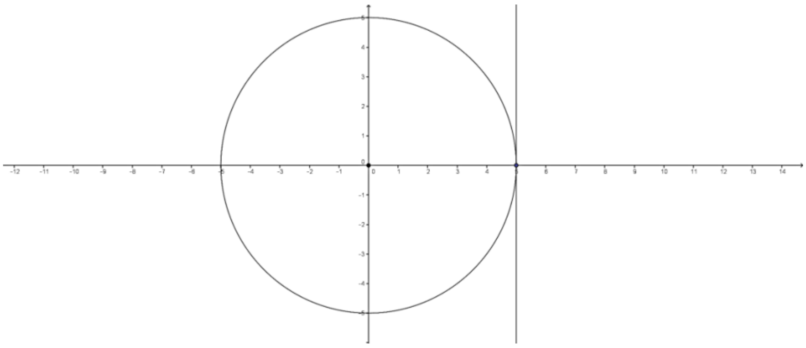
Discutimos, inicialmente, tal conceito em sala de aula nas aulas regulares. Parece fácil discutir o conceito de reta tangente no Cálculo, mas não é. Primeiramente, devemos considerar o que é uma reta tangente, e esse problema permeou o pensamento de diversos matemáticos ao longo da história e foi com Isaac Newton (1642-1727) que esse conceito foi aperfeiçoado, dando origem aos fundamentos do Cálculo como conhecemos hoje. Quando tratamos do termo tangente em matemática, a sua definição encerra dois significados: um em geometria e outro em trigonometria. Na primeira, entende-se que se trata de uma espécie de reta que intercepta uma curva ou uma circunferência um único ponto. cuja generalização provém da situação observada no caso da circunferência. Por outro lado, a tangente é a razão entre duas medidas de um triângulo retângulo – o cateto oposto pelo cateto adjacente a este ângulo.

Ao discutir tais conceitos em sala, observei no discurso dos alunos certa confusão quanto aos conceitos. Procurei evidenciar o percurso histórico que essas questões foram tratadas pelos matemáticos em determinados períodos da história da matemática. Num primeiro momento, escolhi não tratar do conceito de reta tangente à curva por um ponto como o limite da secante, pois, evidentemente, tal conceito é abstrato demais para ser abordado de início, segundo a minha opinião. Comecei discutindo o conceito de tangente apenas de modo a provocar a turma para a discussão que, de fato, sucedeu.

Essa discussão em sala suscitou muitos questionamentos principalmente como relação à frase “tocar em um único ponto”. Nesse dia, não fiz nada mais que apresentar no quadro alguns exemplos em que a reta e uma curva poderiam interceptar-se.

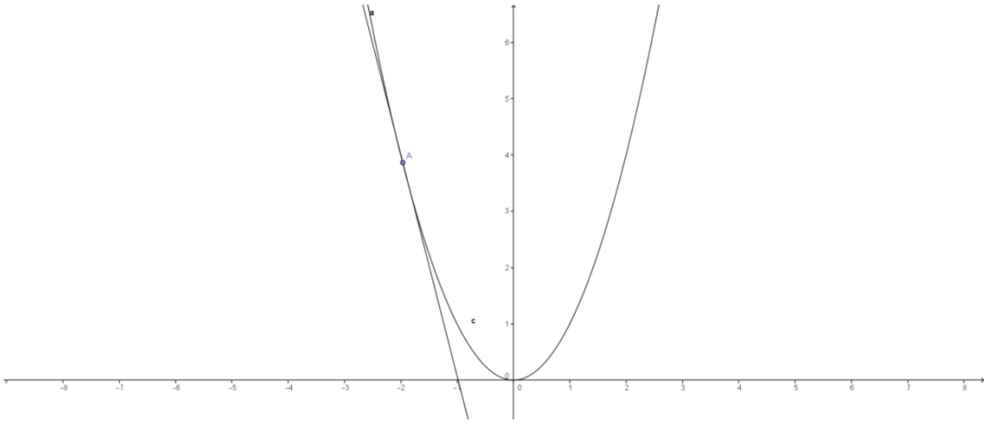
As Figuras 18 e 19 descrevem o fato da reta tocar em um único ponto.

Figura 18 – A reta tangente toca a circunferência em um único ponto



Fonte: Acervo do autor – produzida com o auxílio do GeoGebra.

Figura 19 – A reta tangente toca a parábola em um único ponto



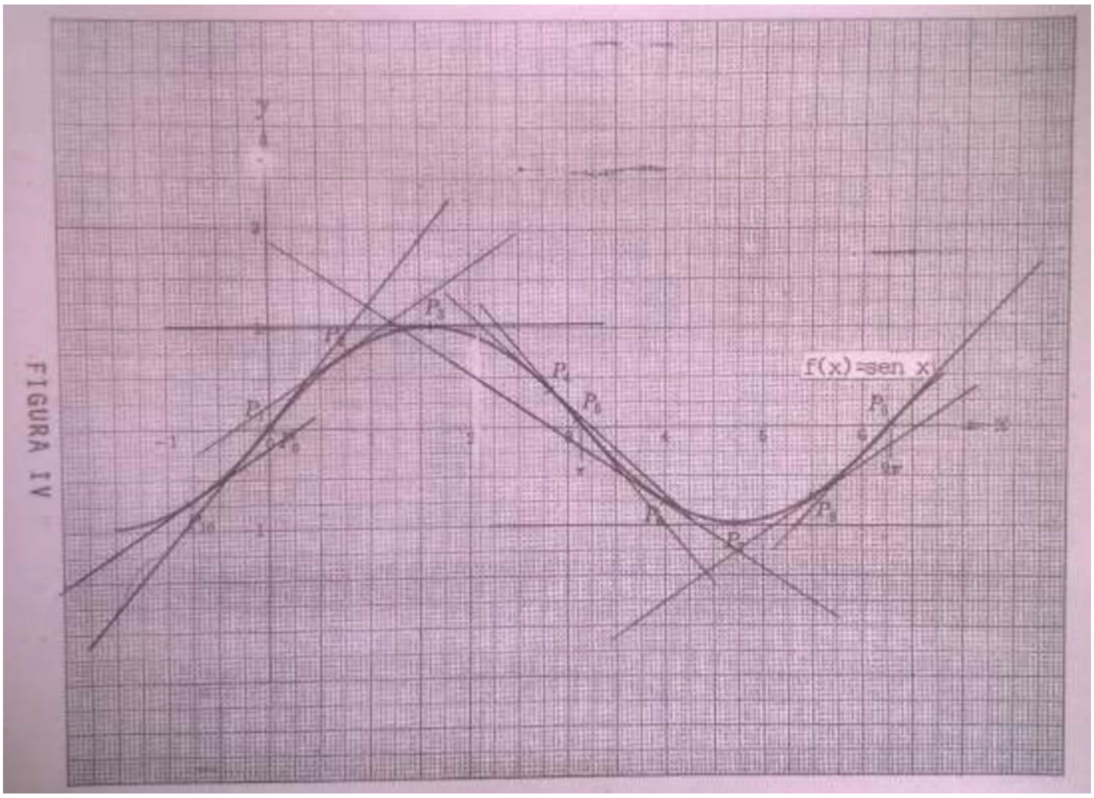
Fonte: Acervo do autor – produzida com o auxílio do GeoGebra.

Nas Figuras 18 e 19, é indubitável a questão do “tocar em um único ponto” e, em qualquer posição que a reta seja colocada em relação à curva, prevalece essa situação.

Na aula seguinte, utilizei o GeoGebra para apresentar as curvas descritas nas Figuras 18, 19 e 20 de modo que os alunos videntes pudessem perceber as diferenças discutidas na aula anterior. Nas Figuras 18 e 19 de início, parece que a reta “toca” a curva em mais de um ponto. Contudo, percebemos que, dependendo do *zoom* que se utiliza no GeoGebra, a curva e a reta tendem a se confundir, aproximando-se de um ponto. Mas essa é uma noção intuitiva e ela só é entendida, de fato, com o conceito de limites e a aproximação da tangente pela secante. Do contrário, visualmente, temos de acreditar que isso acontecerá. Daniel acompanhou tudo isso ouvindo as explicações.

Na Figura 20, surge o primeiro problema: como toda reta é infinita, a reta tangente à curva em certo ponto toca a curva nesse ponto, contudo atravessa a curva em outro ponto.

Figura 20 – A reta tangente toca a curva em um dado ponto e a atravessa em outro ponto



Fonte: Acervo do autor.

Da situação descrita pela Figura 20, percebemos que o conceito de reta tangente a uma curva em um único ponto está longe de ser geral. Funciona em determinadas situações e, no entanto, em outras situações, não. Também não é um consenso pensar que localmente a reta toca a curva sem atravessá-la. Só iremos, de fato, resolver essa situação ao abordar o tema tratando-o com limites. Tendo por base o livro texto de Stewart (2013), que define que se tivermos uma curva C com equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a(f(a))$, consideramos ainda um outro ponto próximo $Q(x(f(x)$, de modo que $x \neq a$, basta calcularmos a inclinação da reta secante PQ

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

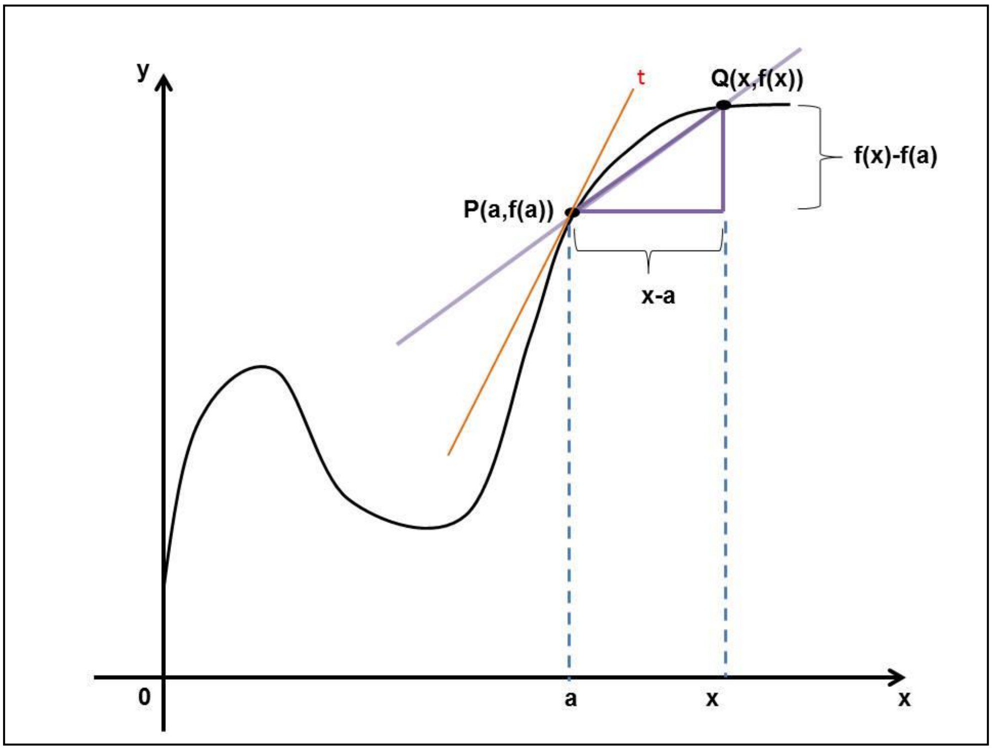
Então, fazendo Q aproximar-se de P ao longo da curva C teremos que, o valor “x” será obrigado a tender a “a”. Neste caso, m_{PQ} vai tender a um número *m*.

Somente desta forma, definimos a tangente t de maneira única, sendo a reta tangente à curva da função $y = f(x)$ em um ponto $P(a(f(a))$ a reta que passa por P com inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista (Figura 21).

Figura 21 – Reta tangente à curva como posição limite da reta secante



Fonte: Stewart (2013, p. 131) – redesenhada pelo autor.

Durante a realização das atividades referentes ao cálculo das inclinações das retas, os alunos perceberam que não era única a inclinação encontrada. Naquele momento, expliquei a eles que só chegaríamos a um único valor utilizando limites e fazendo a reta secante tender para a reta tangente. Contudo, não demonstrei esse fato no momento em que surgiram os questionamentos. Apenas ao final de todas as atividades, formalizei o conceito de derivada. Confesso que o conceito de derivada e o de função derivada foram misturados por mim, visto que as atividades levadas a cabo culminaram no conceito de função derivada que foi visto antes do de derivada propriamente. Contudo, parece que os alunos compreenderam o que representava propriamente a derivada e a função derivada, apesar da confusão, pois perceberam a necessidade de uma conceituação que tornasse a reta tangente única. Não saberia avaliar se essa inversão, levando-os primeiramente à relação entre as funções primitivas e sua função derivada, seria interessante do ponto de vista do entendimento posterior do conceito de derivadas.

Imaginei que, dessa forma, conseguiria que Daniel também participasse, uma vez que seria mais fácil para ele entender os conceitos de “tangente” e “inclinação da reta” a partir de uma construção no Multiplano.

Nas aulas em que discutimos esses conceitos, Daniel permanecera calado. Trabalhou sozinho, ora utilizando o Multiplano, ora utilizando as folhas com os gráficos em alto-relevo. Mas, durante tais momentos, pouco ou nada perguntou. Também teve pouca contribuição de suas colegas. Instiguei, algumas vezes, a sua participação, mas ele recusava meus convites. Talvez porque estivesse absorto em sua tarefa. Trazia consigo algumas anotações e apontamentos e lia essas observações e tentava representar objetos de nossa discussão no Multiplano.

Durante os momentos que explicava a todos os alunos, utilizando o quadro ou o GeoGebra, Daniel se manteve trabalhando no seu Multiplano para representar um período da função seno x.

Convidei os alunos a desenharem as tangentes, tendo por base a atividade IV (Anexo A), utilizando o gráfico da função seno pelos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4.

Nessa etapa, apenas desenharam as retas sem inferir ainda sobre o valor da inclinação (Figura 20).

6.3.2 Como Daniel externaliza o conceito que traz consigo de reta tangente

Durante a realização dessa atividade no dia 1º de outubro de 2013, na sala de aula, Daniel e Tatiana, sua colega colaboradora, travam um diálogo acerca do que entendem por tangente. Primeiramente, Tatiana explica a Daniel o que seria a reta tangente a uma curva, por um ponto, exemplificando no gráfico que ele havia esboçado no Multiplano, tendo por base suas concepções do que seria a tangente, combinadas com as explicações que eu havia dado a todos. O trecho a seguir retrata a transcrição da conversa entre Tatiana e Daniel onde ele externaliza um conceito que tem de reta tangente. Este diálogo ocorreu na sala de aula, no dia 1º de outubro de 2013.

> **Tatiana:** *Agora o Sandro tá explicando o seguinte: a Tangente é a reta que vai passar em um ponto da curva...*
> [Ao mesmo tempo em que ela explica rapidamente para Daniel o que eu havia explicado no quadro acerca da reta tangente, corrige um pino (ponto) que Daniel havia colocado em lugar errado no Multiplano.]
> **Tatiana:** *A reta tangente é essa aqui ó...*
> [Segura a mão de Daniel, de forma a simular o traçado da reta tangente na representação que ele fizera de um período da função seno no Multiplano (Figura 22).]
> **Tatiana:** *Você não vai poder cortar a função tipo assim ó...*
> [Ainda segurando a mão dele, faz um movimento de forma a atravessar a função, passando por um ponto qualquer, de um lado para outro da função e não, tocando em um ponto. Estabelece para ele a diferença entre "tocar" e "atravessar". A reta "t", representada na Figura 21 descreve o fato da reta tocar a curva em um ponto, em contrapartida da outra reta que, passando pelo mesmo ponto, atravessa a curva]
> **Tatiana:** [...] *porque elas* [as retas tangentes] *são de um lado só da curva, ou de dentro ou de fora...*

Figura 22 – Tatiana explica a Daniel como se comporta a reta tangente à curva por um determinado ponto conduzindo sua mão sobre o Multiplano na aula do dia 1º de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

> [Tatiana pega a mão de Daniel e passa seu dedo indicador, em um dos pontos da função seno que ele fizera no Multiplano, fazendo com ele o traçado da reta tangente por este ponto (Figura 22).]
> **Tatiana:** *Entendeu isso?*
> **Tatiana:** *Você entendeu?*
> **Daniel:** *Deixa eu ver... tangente é uma reta que passa paralela à circunferência!? Como, por exemplo, quer ver?*

[Nesse instante, ele pega o disco do multiplano que está à sua frente (Figura 23) e pega em seguida, dentro da caixa que tem à sua frente, uma haste (Figura 24) que representa uma reta.]

Figura 23 – Daniel pega a peça circular do Multiplano para apresentar a Tatiana a sua ideia de reta tangente na aula do dia 1º de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Figura 24 – Daniel pega uma haste com um pino móvel no Kit do Multiplano a sua frente na aula do dia 1º de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Essa haste, diferente de outras do kit, tem um pino com um furo por onde ela passa livremente. Esse pino pode ser acomodado em qualquer ponto da haste. Nessa ocasião, Daniel coloca o pino no centro da haste e fixa o pino na extremidade do disco, de forma que a reta colocada assim simule a ideia de uma reta tangente como a da Figura 25 e passa a explicar para Tatiana o que pensa sobre a tangente.

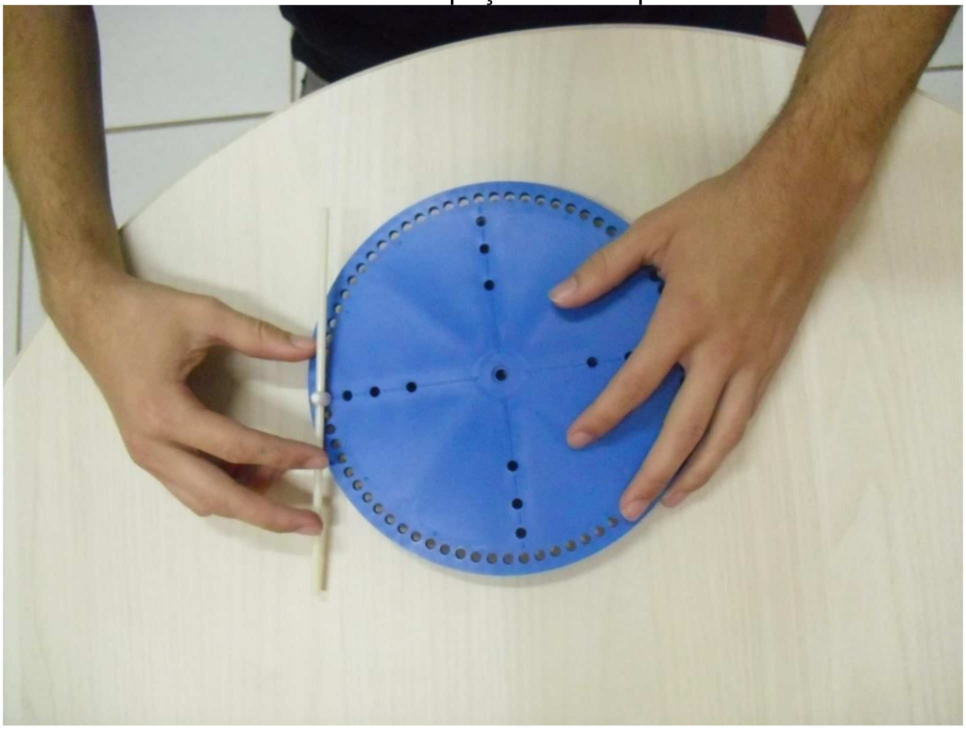
Figura 25 – Daniel explica a Tatiana o que é a reta tangente para ele na aula do dia 1º de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

O conceito de tocar, utilizado por Daniel, é exatamente o representado na Figura 18. Ele utilizou peças do Multiplano e fez essa construção para apresentar a Tatiana a sua concepção (Figura 25), resgatada, a meu pedido, na Figura 26.

Percebo que Daniel possui um conceito de reta tangente que, mesmo com as explicações que havia dado naquela aula, não havia se modificado. Talvez suas convicções tenham sido até corroboradas pelas minhas explicações. Ele foi convicto ao pegar a peça circular do multiplano, pegar uma peça que simula uma reta na caixa do Kit, pegar um pino com furo de modo a passar a reta por dentro e, ao fixar esse pino na extremidade da peça circular, ele materializou o signo “reta tangente à curva por um ponto”. Ao apresentar tal conceito a Tatiana, mesmo depois de sua explicação, ele reforça o conceito que possui desse ente.

Figura 26 – Daniel resgata, a pedido meu, o conceito de tangente que explicara a Tatiana na aula do dia 1º de outubro de 2013 utilizando as mesmas peças do Multiplano



Fonte: Acervo do autor.

6.4 A maneira que Daniel vê os pontos no gráfico da função $y = sen(x)$

Na sala de aula, no dia 2 de outubro de 2013, inicialmente, pedi aos alunos que determinassem as retas tangentes na atividade 2 (Anexo A), que utilizava a curva do seno. Nessa tarefa, deveriam efetuar as medições adequadas e computar o valor da inclinação. Expliquei no quadro que, a partir da reta esboçada por cada ponto marcado na função $f(x) = sen(x)$ (de 1 até 10), dado que eles tinham tal desenho feito sobre uma folha de papel milimetrado, deveriam tomar dois pontos distintos dessa reta, da mesma forma que fizeram no processo descrito na Figura 11, e determinar a inclinação da reta tangente à curva nos dados pontos sendo $tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dessa forma, foram fazendo as contas e computando os valores na própria folha da sequência dada.

Já para Daniel, tínhamos naquele momento, a folha com o gráfico da função seno em alto-relevo. Ele, de início, explorou o gráfico com as mãos (Figura 27), procurando identificar o seu traçado e confirmando o que Ochaita e Rosa (1995, p. 185 apud FERNANDES; HEALLY, 2010, p. 4) retratam ao afirmar que “as mãos do não vidente movem-se de forma não intencional captando particularidades da forma a fim de obter uma imagem desse objeto".

Contudo, sobre a função, estavam marcados os pontos de 1 (um) até 10 (dez), conforme descrito na Figura IV da atividade (ANEXO A), porém Daniel não tinha como lê-los na malha. Assim, fazia-se necessário que ele soubesse onde estavam esses pontos. Tive a ideia de utilizar uma tabela de Excel para representar esses pontos para que ele soubesse localizá-los.

A ideia de ponto é algo compartilhado em nossa sociedade. É um signo que media o ente geométrico e que está determinado dentro de uma categoria de objetos. A observação direta é o recurso que nós videntes fazemos desse objeto cuja representação é visual. Ao tratar da localização de pontos sobre uma determinada curva, medimos as suas coordenadas em relação à origem de um convencionado sistema de coordenadas e escalas. Para Oliveira (2006, p. 30), "o signo é uma marca externa, que auxilia o homem em tarefas que exigem memória ou atenção", em sua forma mais elementar. Oliveira retrata ainda que os signos ampliam a capacidade do homem em sua ação no mundo e podem referir-se a elementos ausentes do espaço e do tempo presentes, tornando-se, assim, um poderoso instrumento de extensão da memória. Para Daniel, era necessário criar outra maneira de perceber os pares ordenados que compunham os pontos cujas inclinações iríamos determinar e mais ainda: criar uma maneira de armazenar tais informações para uso em outro espaço e tempo, uma vez que, para os videntes, os pontos estavam disponíveis na própria folha. Encontrei na tabela de Excel uma forma de transformar as informações visuais presentes no gráfico em algo que pudesse estender a sua capacidade de memória e a sua visão destes entes.

De um modo geral, adotamos procedimentos educacionais tendo por parâmetro as formas de aprender e armazenar informações dos videntes. Porém, os cegos devem formar seus conceitos acerca dos entes estudados e, mesmo que de forma distinta dos videntes, compreender o mesmo conceito da forma que os videntes o fazem. Nas atividades que levamos a cabo, procurei utilizar como ferramenta o computador para entender como esta ferramenta poderia ajudar Daniel na tarefa de armazenamento, organização e síntese das informações adquiridas ao longo do percurso.

Figura 27 – Daniel explora o traçado do gráfico da função $\boldsymbol{y = sen(x)}$ disponível a ele na folha milimetrada e cujo traçado foi realçado com cola alto-relevo na sala de aula no dia 2 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Comecei lhe explicando como localizaríamos primeiramente os pontos da tarefa no seu computador. No trecho a seguir, transcrevo a conversa que tivemos onde explico como faríamos para que Daniel entendesse, em uma tabela do excel, a localização dos pontos da função formada pelo conjunto de pontos cuja abscissa era o valor x e a ordenada, a função $sen(x)$. Este diálogo ocorreu ao longo da aula do dia 2 de outubro de 2013.

Prof.: *Meninas! Olhem aqui! Pra vocês irem orientando o Daniel aqui, olha!*
[Neste momento, pego o computador do Daniel e passo a explicar aos três.]
Prof.: *Como é que ele vai enxergar os pontos que estão aí na tarefa?*
Prof.: *Aqui!*
[Coloco o dedo indicador na folha que tem o gráfico da função $\mathrm{y = sen(x)}$, referindo-me à folha em que a função fora realçada com cola alto-relevo e que ele tem disponível diante dele.]
Prof.: *Estes pontos que vocês estão vendo aqui que são P_1, P_2, P_3, tá, tá, tá... nós vamos criar estes pontos aqui no Excel.*
Prof.: *Aí, eu estou fazendo uma programação aqui, olha! Eu já criei! Olhem, aqui é o x* [mostro a elas na tabela do Excel que criei as duas colunas: uma para entrada dos valores de x e outra para obtenção do seno deste valor], *então o x é o valor que você vai pegar de P_2 aqui.*
[Coloco o dedo sobre o eixo x, na folha de papel, na projeção que o ponto P_2 faz sobre o eixo x.]
Prof.: *Pra ele poder saber qual é o ponto P_2, nós vamos colocar aqui o $sen(x)$.*
Prof.: *Então, qual é o $sen(x)$? É aquele que está em cima da curva. Aí o ponto P_2 para o Daniel vai ser o valor que tiver aqui...*
[Coloco o dedo indicador sobre a folha indicando, sobre o eixo x, a posição que estou explicando naquele momento, e indico ainda a ordenada do ponto que é seno do valor x, sobre a curva.]
Prof.: [...] e o valor de y, que é $sen(x)$. Entendeu?
Prof.: Aí ele vai enxergar este ponto aqui, olha! Certo?

[Coloco o dedo indicador sobre o ponto P_2 na folha.]
Tatiana: Humm! Então eu passo pra ele os valores...
Prof.: Isso! Você passa pra ele os valores, pra ele preencher a tabela dele aqui [na tabela Excel no computador] pra ele enxergar quais são os pares [ordenados].
Tatiana: Então eu passo pra ele as coordenadas de P_2?
Prof.: Não! Só a coordenada x de P_2! Porque ai ele vai colocar o valor do x aqui [na tabela Excel no computador] e o computador vai calcular o valor do $sen(x)$ que é onde está o ponto P_2.
Prof.: Aí, depois, tem outro trabalho que é a inclinação! A inclinação eu já vou fazer aqui uma conta que é o que a gente vai concluir... certo? Eu vou fazer já a conta porque aí a inclinação da reta neste ponto já vai aparecer aqui [na tabela Excel no computador]. Depois vocês vão fazer o gráfico das inclinações que é a conclusão do nosso trabalho.

Depois dessa conversa, ocupei-me em terminar rapidamente de organizar a tabela para Daniel preencher. Daniel pega novamente seu computador, e o programa NVDA sintetiza para ele como ficou organizada a tabela que acabei de fazer. Em seguida, Tatiana passa e lhe dizer as coordenadas x dos pontos e ele os lança em sua tabela (Figura 28).

Figura 28 – Daniel lançando a coordenada x dos pontos na sua tabela do Excel para determinação da coordenada y por meio da função $\boldsymbol{y = sen(x)}$ relevo, na sala de aula, no dia 2 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Peço, então, a Tatiana que fale para Daniel (conforme a transcrição do trecho a seguir) quais os valores das coordenadas x dos pontos. Este diálogo ocorreu ao longo da aula do dia 2 de outubro de 2013.

Tatiana: *P_1 é zero;* [Tatiana lê para Daniel as coordenadas de x dos pontos a partir da folha que Daniel tem] *P_2 é 0,5 (zero vírgula cinco); P_3 é*... [Para e passa a olhar com mais atenção a malha] *Peraí!*

> **Tatiana:** *P_2 é 0,75 (zero virgula setenta e cinco)!* [Corrige o ponto anterior que havia falado errado para ele].
> **Tatiana:** *P_3 é 1,65 (um vírgula sessenta e cinco) mais ou menos!*
> **Tatiana:** *Agora o P_4 é 2,76 (dois vírgula setenta e seis) mais ou menos...*
> **Tatiana:** *P_5 é 3,15 (três vírgula quinze) mais ou menos...*
> **Daniel:** *3,15 (três vírgula quinze)... 3,14 (três vírgula quatorze) é o valor de Pi?*
> **Tatiana:** *É! Isso!*
> **Tatiana:** *P_6 é quatro.*
> **Tatiana:** *P_7 é 4,75 (quatro vírgula setenta e cinco)*
> **Tatiana:** *P_8 é cinco e meio.*
> **Tatiana:** *P_9 é 6,28 (seis vírgula vinte e oito)*
> **Daniel:** *Dois pi!* [Ele balbucia de forma quase inaudível como se concluísse somente para ele].
> **Tatiana:** *Acabamos. Agora é com você! O que é pra fazer?*
> [Dirigindo-se a mim.]

Apesar de passar quase desapercebido, ressalto que Daniel relaciona o número π e 2π com suas representações decimais. Esse fato é importante, pois há uma confusão entre definir o seno ou cosseno no triângulo retângulo como a razão entre duas medidas e, posteriormente, defini-los como função trigonométrica. Justamente porque usamos ângulos medidos em graus no primeiro caso e ângulos/ arcos medidos em radianos no segundo para definir o domínio real para essas funções. Essa confusão fica evidente no trecho transcrito na página 139 desta análise. Mas, apesar disso, tal fato é interessante, pois ele também teve de localizar esses pontos no plano feito em isopor e, para isso, utilizar-se de estimativas.

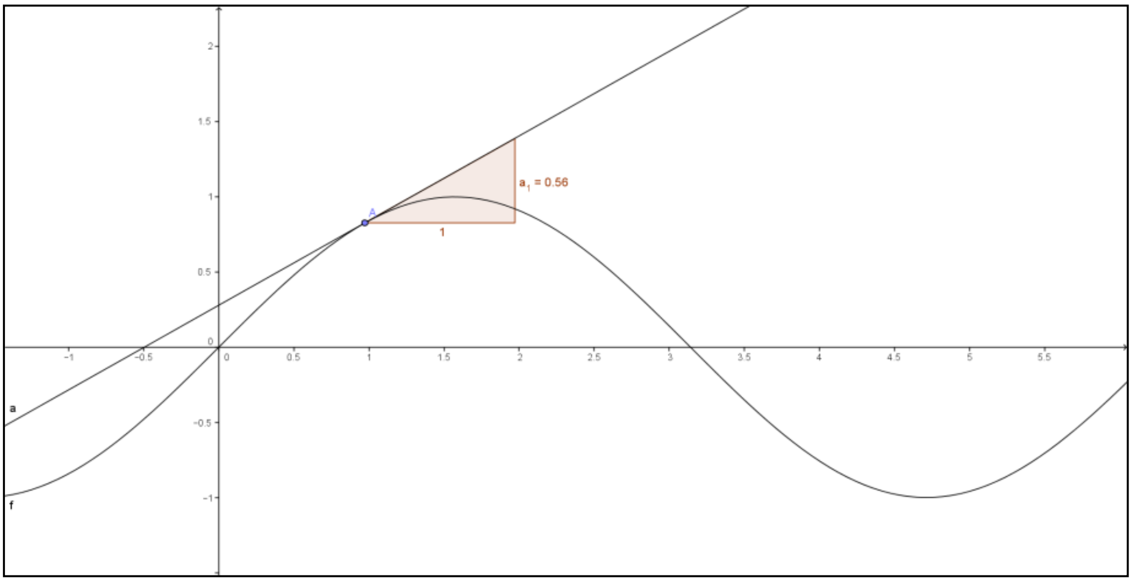
6.5 A determinação da inclinação das retas tangentes à curva da função $\mathbf{f(x) = sen(x)}$ e o percurso de Daniel nesse processo

Dentre as atividades elaboradas e desenvolvidas em sua totalidade com a turma em sala de aula, apenas duas foram trabalhadas com Daniel nos encontros particulares: a função $y = \ln(x)$ e a função $y = sen(x)$. Passo a descrever a seguir como utilizamos essas funções na tentativa de levar Daniel a entender o conceito de função derivada.

6.5.1 A sala de aula – processo instrucional

Para determinar a inclinação das retas tangentes à curva da função $\mathrm{y} = \mathrm{sen(x)}$, pedi que determinassem dois pontos distintos sobre a reta, conforme descrito na Figura 29 (realizado pelos alunos conforme a Figua 11), utilizando o mesmo processo que desenvolvemos na atividade referente a curva de $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x})$.

Figura 29 – Determinação do valor da inclinação da reta tangente à curva da função $\mathbf{y} = \mathbf{sen}(\mathbf{x})$ utilizando a tangente trigonométrica do ângulo



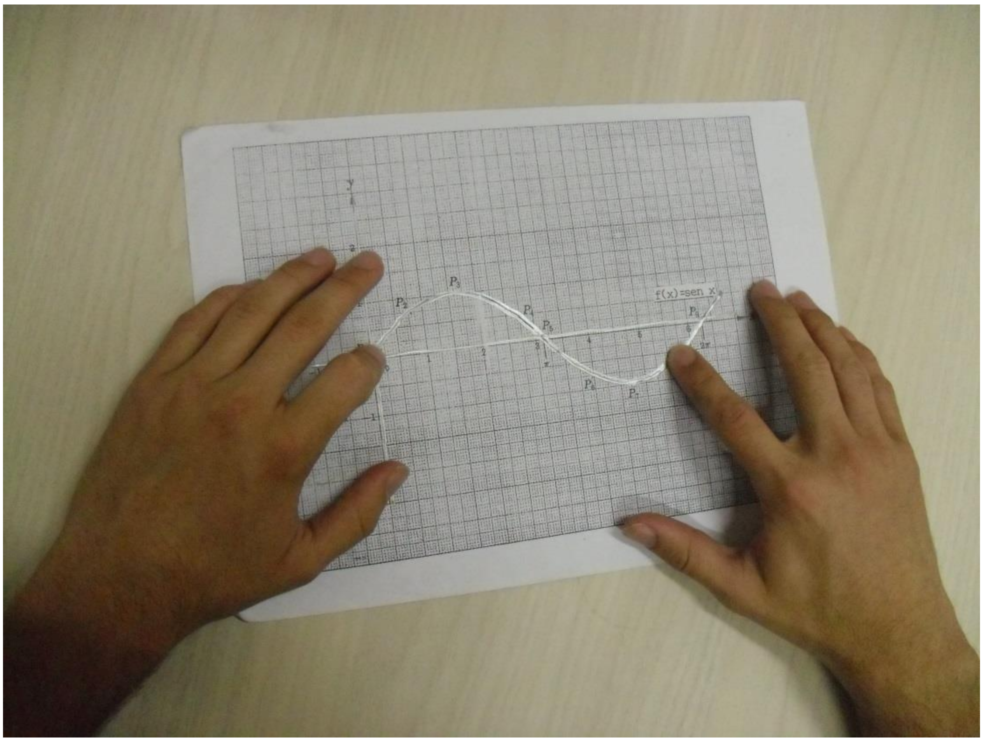
Fonte: Acervo do autor –produzido com o auxílio do Geogebra.

Inicialmente, cogitei a possibilidade de Daniel realizar essa atividade fazendo as contas no seu *notebook*. Mas esbarrei em um problema: ele teria de ter outro ponto distinto do ponto de tangência sobre a malha. E, mais uma vez, ele não teria como coletar esse ponto. Dependeria de uma de suas colegas. Sugeri a ele que participasse da discussão do processo e anotasse as inclinações em uma nova coluna ao lado daquela criada para o $y = sen(x)$. Assim, teríamos três valores na tabela: o valor de x, o valor do seno de x e o valor da inclinação da reta tangente à curva naquele local x dado. Durante o processo instrucional, surgiram dúvidas quanto ao valor (positivo ou negativo) da inclinação da reta, pois as alunas colaboradoras estavam obtendo valores positivos de inclinações para retas decrescentes. Expliquei a elas qual era o equívoco que estavam cometendo e, em seguida, situei Daniel também na discussão. O trecho a seguir descreve nossa conversa sobre esse assunto.

> [Nesse momento, ocupava-me em dar algumas explicações às colaboradoras em relação a questão da inclinação da reta e o valor numérico da inclinação. Daniel ouvia tudo atentamente. Em seguida, passei a explicar a ele diretamente.]

Prof.: *O que elas estão fazendo aqui Daniel é o seguinte*... [Pego a folha com a função seno em alto-relevo (Figura 30) que ele tem diante dele.]*...qual é a função? A função é seno de x.*

Figura 30 – Gráfico da função $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{sen}(\mathbf{x})$ realçado com cola alto-relevo e disponível para Daniel



Fonte: Acervo do autor.

[Pego uma caneta e passo a simular a reta tangente à curva. Pego sua mão e ele passa a acompanhar com ela o percurso da reta ao longo da função.]
Prof.: *Essa reta, percorrendo a função, quando ela chega aqui no eixo x, determina um triângulo, não é?*
[Nesse momento, temos a reta sobre o ponto P_5 (x=3,14). Quando falo assim, ele, imediatamente, faz com a mão a representação do triângulo retângulo em que a hipotenusa é a caneta e cujos catetos são o eixo x e o seu dedo indicador direito (Figura 31).]

Figura 31 – Representação por Daniel do triângulo, que é utilizado na determinação do valor da inclinação da reta tangente à curva da função $\mathbf{y} = \mathbf{sen}(\mathbf{x})$ na sala de aula, no dia 2 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Prof.: *Isso! Exatamente! Esse ai! Esse triângulo!*
[Aprovo a sua construção representativa do triângulo]
Prof.: *Aí, o que acontece? Esse triângulo que nós estamos representando, esse valor aqui* [Refiro-me a um ponto fictício nesse exemplo para ele, mas ao local aproximado do ponto que as alunas haviam escolhido para fazer as contas], *elas estão esquecendo, que esse valor aqui está pra baixo do eixo x. Então ele é negativo. Entendeu?*
Daniel: *Uhumm...No caso essa altura aqui é negativa!*
[Passa o dedo indicador esquerdo sobre o seu dedo indicador direito, que representa, neste momento, o cateto oposto ao ângulo formado entre a reta tangente e o eixo x.]
Prof.: *Nós não temos altura negativa, mas no sistema cartesiano, ela é negativa! Ai você pega esta altura que é negativa, com este valor aqui que é positivo...*
[Refiro-me ao cateto adjacente desse triângulo sobre o qual discutimos. Daniel passa o dedo indicador esquerdo sobre esse cateto, explorando-o enquanto sigo explicando.]
Prof.:*... aí vai dar negativo. A inclinação da reta é negativa. Certo? Só que, se você fosse pegar esse tamanho aqui, [o do cateto oposto] só o tamanho, o tamanho é positivo.*
Daniel: *Uhumm.*
Prof.: *Isso que estou discutindo com elas. Entendeu?*
Daniel: *O tamanho é positivo?*
Prof.: *Um tamanho não pode ser negativo, concorda? Tamanho é uma medida de comprimento. Concorda?*
[Ele acena com a cabeça, concordando]
Prof.: *Aí você pega essa medida* [cateto oposto do triângulo] *e divide por essa medida* [cateto adjacente do triângulo] *aí vai dar um número positivo.*

Daniel: *Essa de cá* [Refere-se ao cateto oposto passando o dedo indicador sobre ele], *por essa de cá* [cateto adjacente passando o dedo indicador sobre ele].
Prof.: *Aí, esta é a inclinação desta reta! Só que esta reta é uma reta decrescente...*
Daniel: *Ah, tá! Esse aqui é positivo, sobre positivo, vai dar positivo, mas a reta é negativa!* [Refere-se à inclinação].
Prof.: *Isso! Exatamente!*
Prof.: *Então á reta é decrescente! Sacou?*
Daniel: *Crescente não era só assim? E decrescente só assim?* [Faz com a caneta que tem nas mãos a posição de uma reta crescente (Figura 32) e de outra decrescente, em relação ao eixo x.]
Prof.: *Isso!*
Daniel: *Mas crescente era assim e decrescente era assim!*
[Faz com a caneta, novamente, o movimento simbolizando a posição de uma reta crescente e depois, de uma reta decrescente. Noto que ele está confuso com a questão da posição das retas e até entendo a sua confusão, pois percebo que ele está misturando as novas ideias com o estudo de sinais das funções dado o jeito que representou e afirmou.]
Prof.: *Crescente ou decrescente em relação ao eixo x. O eixo x não está ai embaixo?* [da reta]
[Ele passa a mão abaixo da reta localizando o eixo x e fica pensativo.]
Prof.: *Entendeu?*
[Ele acena com a cabeça concordando. Mas, pelo visto, não concordou completamente. Uma aluna me interrompe e pede para tirar dúvidas. Vou atendê-la e Daniel passa a escrever em seu computador, pelo visto, um resumo do que havia entendido de nossa discussão como era costume dele fazer.]

Figura 32 – Daniel demonstra o que ele entende por reta crescente na sala de aula, no dia 2 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Como conheço o Daniel e percebo quando ele compreende um dado assunto ou simplesmente concorda comigo, volto à sua mesa novamente para verificar o que ele, de fato, apreendeu da nossa conversa. Durante a minha ausência, Julia passa para ele anotar em seu computador alguns valores de inclinações que elas se ocupavam em calcular.

Ao retornar em sua mesa, novamente ele me pergunta sobre a inclinação da reta. Agora em relação ao ângulo de inclinação. O trecho a seguir as primeiras construções de Daniel acerca da ideia de inclinação da reta tangente à curva da função $f(x) = sen(x)$. Este diálogo ocorreu em sala, na aula do dia 2 de outubro de 2013.

> **Prof.:** *Daniel, olha só! Você entendeu a nossa discussão anterior?*
> **Daniel:** *Eu queria o seguinte... esse valor que a gente tem aqui* [Refere-se ao valor da inclinação que anotou na tabela em seu *notebook*] *não é o tamanho da reta! É o ângulo que ela faz com o eixo x?!*
> **Prof.:** *Não! Olha só: é a inclinação que ela faz com o eixo x.*
> [Ele procura uma caneta sobre a mesa tateando. Julia lhe entrega uma caneta e ele passa a tatear o desenho da função novamente.]
> **Prof.:** *Olha só!* [Pego a caneta em sua mão e situo-a na origem, sobre a curva do seno. Começo a movimentar a caneta simulando uma reta percorrendo a curva. Ele acompanha com a mão] *A reta vai percorrera a curva!*
> **Daniel:** *Então a inclinação vai variar*...
> **Prof.:** *Exatamente!*
> **Daniel:** *A inclinação é o ângulo?*
> **Prof.:** *Não. É um número.*
> **Daniel:** *No caso é o grau!*
> **Prof.:** *Não. É uma relação entre duas medidas. Vamos pensar somente na inclinação agora.*
> [Ele está com a caneta na mão sobre a folha onde tem representada a função seno. Ele posiciona a caneta na horizontal sobre a posição onde temos o $\frac{\pi}{2}$.]
> **Daniel:** *Então, por exemplo, aqui é zero? Zero Pi?*
> **Prof.:** *Isso! Zero. Zero. Pi, não! Só zero*.
> [Ele tira a mão que está sobre a caneta e volta-se para seu *notebook*. Provavelmente para procurar este ponto em sua tabela. Mas não estou certo se fizera isso mesmo pois não estava vendo o que se passava na tela, visto que estava de frente pra ele.]
> **Prof.:** *Aí, tudo que está pra cá...* [Pego a caneta e represento a inclinação da reta positiva antes de $\frac{\pi}{2}$] *... é positiva! E quando estiver do lado de cá, é negativa!* [Pego a caneta e represento a inclinação da reta negativa depois de $\frac{\pi}{2}$.]
> **Prof.:** *Entendeu?*
> [Ele acena com a cabeça concordando.]

Percebo que ainda não ficara satisfeito, mas não tinha outra explicação melhor pra ele naquele momento. Não queria falar de ângulo, arco tangente, arcos, radianos. Naquele momento, pensei que isso poderia piorar a situação. Pensei apenas que, se ele entendesse o que era inclinação positiva, nula e negativa, seria suficiente. Ele passa a anotar alguma coisa em seu *notebook* e eu vou atender outros alunos, percorrendo a sala de aula. Julia volta a falar para ele as inclinações das retas que ela e Tatiana calcularam. Ele anota em sua tabela. Utilizaríamos esses dados para esboçar a curva de inclinações nos encontros particulares.

Noto que Daniel parece ter uma concepção do que seja inclinação. Ele associa a inclinação ao ângulo de inclinação. Em certa medida, percebi também que ele associou o fato de termos inclinações positivas e negativas ao estudo de sinas de funções polinomiais do 1º grau. Assunto esse visto em uma disciplina no semestre anterior e que, por coincidência, foram também seu professor.

6.5.2 Encontros particulares e a construção da curva de inclinações – processo de apropriação

No item 6.2.2 e seguintes, descrevemos a construção dos gráficos das funções $f(x)=\frac{1}{\mathrm{x}}$ e a relação dela com sua curva primitiva $f(x) = ln\,x$, ressaltando os aspectos relativos ao comportamento de Daniel quando necessitava estabelecer escalas e medidas e ainda, conforme descrito no item 6.4, a maneira que encontrei para que ele pudesse perceber os pontos em um gráfico e ainda armazenar essas informações para transporte e uso posterior.

Agora trataremos dos encontros particulares ocorridos nos dias 8 e 23 de outubro de 2013, nos quais procurarei, em certa medida, apresentar o processo de construção do conceito de função derivada através da relação entre as duas funções que utilizamos na construção dos gráficos. Essa parte está divida em dois momentos: numa primeira etapa, construímos os gráficos de $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \ln(\mathrm{x})$ (Figura 33) e procuramos estabelecer relações entre eles. Optei por começar com essas funções por se tratarem de curvas mais simples.

Figura 33 – Daniel construindo os gráficos das funções do triângulo que $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \ln(x)$

Fonte: Acervo do autor.

Numa segunda etapa, utilizamos o gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}\,(x)$ disponível no papel milimetrado e realçado com tinta relevo para discutir algumas ideias.

Após a construção do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, desejava saber o que Daniel havia incorporado ou mesmo lembrava-se de nossas discussões oriundas na sala de aula acerca de determinadas ideias, como, por exemplo, a maneira de se obter a inclinação da reta tangente à curva e sua relação com a função derivada. Apesar de ainda crer que ele não havia se dado por satisfeito quando debatemos essas ideias em sala, desejava entender o que ele havia trazido até então e auxiliá-lo no processo de construção dos conceitos até então estudados.

6.5.2.1 Primeiras palavras sobre a relação entre as funções – trabalhando numa ZDP

Num primeiro momento, no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013, observo que as ideias ainda estão soltas em sua fala. Ao externalizar seu entendimento do assunto, vacilava em alguns momentos. Em outros momentos, era necessária a minha intervenção no sentido de corrigir o rumo do diálogo. Mas, nesse momento, já era possível notar alguma construção ou mesmo uma tentativa de formulação dos conceitos. Nesse processo de elaborações, Daniel vacilava, parecendo resgatar algumas ideias discutidas em sala e, algumas vezes, procurava repetir o que eu lhe dizia com suas palavras tentando juntar trechos, ideias como discute Hutchins (1986, p. 57 apud DANIELS, 2001, p. 39):

> O que aprendemos e o que conhecemos, e o que nossa cultura conhece para nós na forma da estrutura de artefatos e organizações sociais são esses pedaços de estrutura mediadora. Pensar consiste em coordenar essas estruturas umas com as outras de tal modo que elas possam se formar umas às outras. O pensador nesse mundo é um meio muito especial, que pode produzir coordenação entre muitos meios estruturados, alguns internos, outros externos, alguns corporificados em artefatos, alguns em ideias, e alguns em relações sociais.

Ressalto a seguir alguns trechos desse processo de elaboração em que indago Daniel acerca da relação entre as funções, bem como as suas respostas.

Comecei tentando resgatar um detalhe que Daniel ressaltou quando iniciamos a tarefa da construção do gráfico de $f(x) = \ln(x)$.

a) A tentativa de junção das ideias de Daniel sobre o comportamento da função $f(x) = \ln(x)$ e a relação com a sua curva de inclinações

No a seguir, procuro resgatar, na memória de Daniel, as ideias que ele tinha sobre o comportamento da função $f(x) = \ln(x)$, tentando perceber quais elementos ele havia trazido do processo de instrução em sala de aula e quais elementos haviam sido compreendidos a partir de nossas conversas no encontro particular deste mesmo dia na parte da manhã. Este trecho transcrito foi extraído de nossa conversa na tarde do dia 8 de outubro de 2013.

> **Prof.:** É... dentro da nossa conversa, a gente estava olhando a tabela e mexendo nesses pontos aqui...
> [Passo a mão sobre os pontos da curva $f(x) = \ln(x)$ no trecho compreendido entre o valor de x=1 seguindo para o zero e ele me acompanha com a mão.]
> **Prof.:** [...] *aí você olhou na sua tabela, na sua tabela tinha uns valores negativos mas os valores negativos não eram para x, eram para y, né? Que são esses aqui, né?*
> [Aponto os valores anteriores novamente e ele está com a mão esquerda sobre eles.]
> **Prof.:** *Certo?*
> [Continuo resgatando as falas de Daniel.]
> **Prof.:** *Aí você falou: Ah! Então, a gente vai ter valores negativos só pra y porque o x, a gente não pode ter valores de x negativos.*

[Nesse momento, ele posiciona as duas mãos sobre o local que estamos discutindo.]
Daniel: *Humm! Ele não... Ele... tá! no caso, ele não encosta aqui [no eixo y], não pode encostar e tá do lado de cá! [no semieixo positivo de x] No caso, então, ele tá aqui* [A Figura 34 retrata o momento em que Daniel percebe esta proximidade e elabora algumas ideias sobre os valores da função para x bem próximo de zero, em que a função quase toca o eixo y], podendo vir aqui... [indica a proximidade com o eixo y.]

Figura 34 – Daniel procurando perceber a proximidade da função, para valores próximos de zero em x, resgatando suas falas e ideias no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013

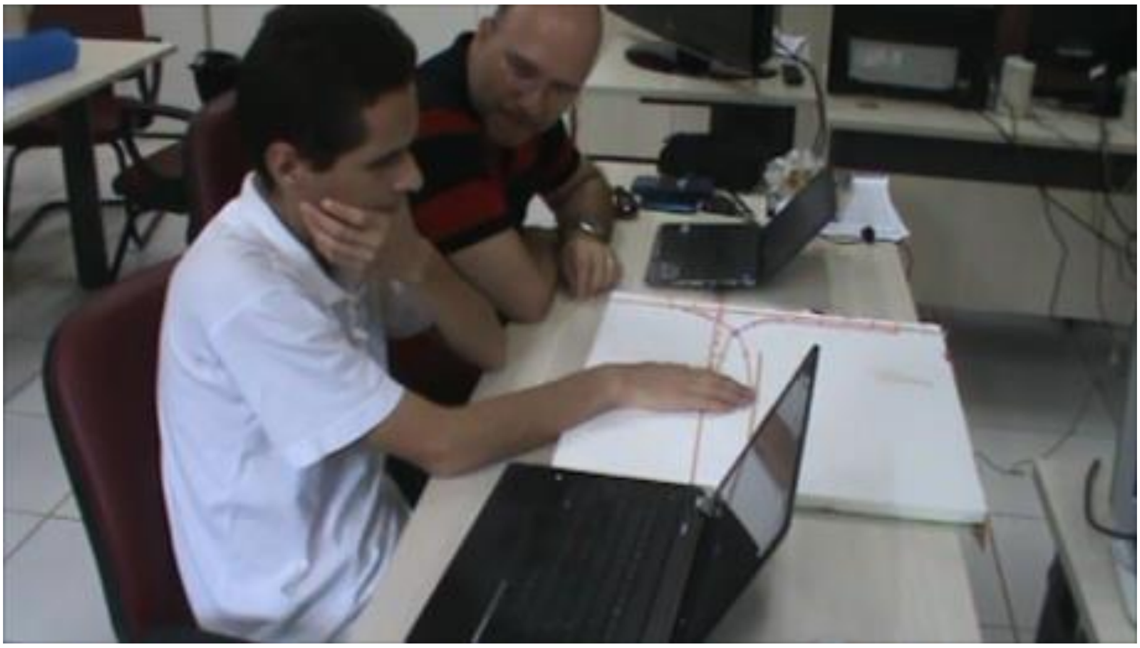
Fonte: Acervo do autor.

Daniel: *Ele* [o gráfico] *está vindo praqui...*
[Neste momento, Daniel está tateando a curva da função $f(x) = \ln(x)$, fazendo um movimento de ir e vir sobre a curva percorrendo-a desde o seu começo, próximo ao zero de x, até o valor de x=7, último representado em nosso gráfico. Por último, faz um movimento com a mão direita para a direita, indicando o "está vindo praqui". Para com a mão e prossegue em suas conclusões]
Daniel: *No caso ele* [o gráfico da função] *só vai crescer praqui...*
[Neste momento, Daniel parece entender quando diz "crescer praqui" que a função só pode evoluir para este lado, visto que não está definida para valores negativos]

Concordo com Daniel e passo a discutir agora a questão da reta tangente e a relação entre as duas curvas. O trecho a seguir retrata esse diálogo e a nossa tentativa de junção das ideias. Este trecho foi extraído de nosso diálogo, no encontro particular, na tarde do dia 8 de outubro de 2013.

Prof.: *Exato! Aí o que acontece, ele* [o gráfico da função] *vai dar um rasante aqui assim ohh...*
[Faço com a mão o movimento que a curva do logaritmo descreve no sentido crescente de x. Ele percebe o movimento que faço e posiciona a sua mão sobre o gráfico e me acompanha com a sua mão. Continuo explicando.]
Prof.: [...] *e aí a tendência da função e ir fazendo com que sua reta tangente tenda a ficar horizontal, entendeu?*
[Nesse momento, apanho um palito e percorro a curva com ele e o posiciono próximo a sua mão direita que está estacionada sobre o gráfico da função próximo ao valor de x=7. Ele tem a sua mão esquerda no queixo e está pensativo neste momento. Quando termino de falar, ele balança a cabeça concordando.]
Prof.: *O ângulo tende a ficar cada vez menor... da inclinação. Mas ela* [a reta tangente] *vai tender a ficar horizontal, entendeu?*
[Ele pega o palito e fica movimentando sobre a curva do logaritmo, representado.]
Prof.: *Onde é que eu vou ver a tendência dela em ficar horizontal?*
Daniel: *Ai, Jesus! Nesse caso só se for no...* [fica pensativo]
Prof.: *Não! É simples! Tá até pronto!*
[Ele desloca a sua mão para a outra curva.]
Daniel: *Aqui no quatro?*
[Daniel se refere ao valor de x=4. Apesar de apontar o gráfico corretamente, não entendi a relação que ele fez com o valor x=4. Mas percebi que estava tentando falar do gráfico correto. Incentivei a continuidade de sua construção de ideias.]
Prof.: *É no outro! Esse aí não é o gráfico das inclinações?*
[Ele está tateando a curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$]
Prof.: *A curva das inclinações. A de cima!*
[Refiro-me à função que está totalmente acima do eixo x. Ele tateia as duas.]
Daniel: *Ok! Aqui!*
[Coloca a mão sobre a curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$]
Prof.: *O que está acontecendo com ela à medida que você vai avançando no eixo x?*
[Ele passa a mão sobre a curva da função $f(x) = \ln(x)$, pega o palito novamente e posiciona sobre a curva da função $f(x) = \ln(x)$. Na Figura 35, ele acompanha a curva e percebe seu movimento de diminuição da inclinação]
Daniel: *Ela tá equilibrando...*
Prof.: *Isso! Essa aí é a função logaritmo natural, ln (x), certo? O que está acontecendo com a inclinação dela?*
Daniel: *Desaparecendo...*
Prof.: *Tá desaparecendo... O que é desaparecer? Tendendo pra onde?*
Daniel: *Zero!*
Prof.: *Tender pra zero! Isso!*
Prof.: *Bom, aí tudo bem! E a outra curva? Que é a primeira que a gente efetivamente fez foi qual? A curva das inclinações!*
[Ele, de sobressalto, pega o palito e volta a passar sobre a curva do logaritmo e passar o outro dedo sobre a curva de $\frac{1}{x}$]

Figura 35 – Daniel percebe a diminuição da inclinação da reta tangente à curva da função $\boldsymbol{f(x)} = \ln(x)$ no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013



Fonte: Acervo do autor.

Daniel: *Me empresta um outro aqui!*
[palito]
Daniel: *no caso aqui vai tender pra zero. No caso desse ponto aqui... seria... não! A inclinação dessa seria aqui...*
[Ele está com os palitos simulando posições e avaliando com as duas retas que tem em mãos.]
Prof.: *Uhumm... certo! Uma é essa ai, não é? Uma tangente. Não é isso?*
Daniel: *Este... essa é a curva onde vai escolher os pontos. Né?*
[Aponta para $\ln(x)$.]
Prof.: *Certo!*
Daniel: *Por exemplo, essa daqui... vai ser no caso...*
[Passa a mão sobre a curva do $\ln(x)$.]
Daniel: *Esse ponto aqui é o ponto 7?*
[Aponta o ponto onde x=7.]
Prof.: *É esse aí...*
Daniel: *No caso, a inclinação do... do... da curva no ponto 7, teve este valor aqui no caso!*
[Ele está com a reta tangenciando a curva do $\ln(x)$ no ponto em que x=7 e apontando com o indicador o valor, na curva de $\frac{1}{x}$ para o ponto onde x=7. De onde eu estava não dava pra ver o que ele indicava, pois sua mão cobria o local.]
Prof.: *Qual?*
Daniel: *Não pera aqui!*
[Ele estava certo nesta primeira ideia porém estava também vacilante.]
Prof.: *Vamos lá! Isso ai é importante, o que você está falando! Vamos lá!*
Prof.: *A inclinação...*
Daniel: *No caso da curva no ponto 7...*
Prof.: *Tá! Onde que ela tá?*
Daniel: *Seria aqui, né! No último!*
Prof.: *Esse aí é o ponto x=7. Não é isso? Certo! Onde que está a inclinação... qual que é a reta tangente neste ponto aí?*
[Faz com o palito sinalizando a reta corretamente na curva do $\ln(x)$.]
Daniel: *Seria algo assim mesmo!*

Prof.: *Certo! Perfeito! E a inclinação dessa reta, onde que ela está registrada?*
Daniel: *Cá embaixo!*
[Refere-se à curva de $f(x) = \frac{1}{x}$.]
Prof.: *Isso! Isso aí!*
Daniel: *Quase no zero... no 1,17...* [corrige] *0,17!*
Prof.: *A reta lá em cima tá tendendo a quê?*
Daniel: *Lá?*
Prof.: *Não! Essa reta que você está mexendo com ela...*
Daniel: *Pra infinito?*
Prof.: *Não! A inclinação dela tá tendendo a quê?*
Daniel: *Zero!*
Prof.: *A zero! E lá embaixo, tá indo pra onde?*
Daniel: *Pra zero também!*
Prof.: *Pra zero também! Entendeu?*
Prof.: *A de cima te dá a indicação do que vai acontecer lá embaixo. A inclinação da reta...*

b) Uma tentativa de elaboração de sua própria concepção.

Continuamos nossa conversa na tentativa de formular uma concepção para a relação entre as funções. Para um observador externo, numa primeira abordagem, parece simples entender essas ideias. As informações fragmentadas permeiam a fala de Daniel juntamente com as informações oriundas das suas experiências tácteis. Esse processo de composição que parece caótico e confuso mistura elementos de nossas conversas e de suas lembranças. Damásio (1994, p. 100-101 apud DANIELS, 2001, p. 41) descreve que:

> As imagens não são armazenadas como fac-símiles de coisas ou eventos ou palavras ou sentenças. O cérebro não arquiva fotografias de pessoas, objetos, paisagens; nem armazena filmes de cenas de nossas vidas [...] Em suma, parece não haver nenhuma gravura permanentemente mantida de nada, nem mesmo em miniatura, nem microficha, nenhuma cópia durável. [...] As imagens mentais são construções momentâneas, tentativas de replicação de padrões que foram experienciados, em que a probabilidade de replicação exata é baixa, mas a de replicação substancial pode ser mais alta ou mais baixa, dependendo das circunstâncias em que as imagens foram apreendidas e estão sendo relembradas.

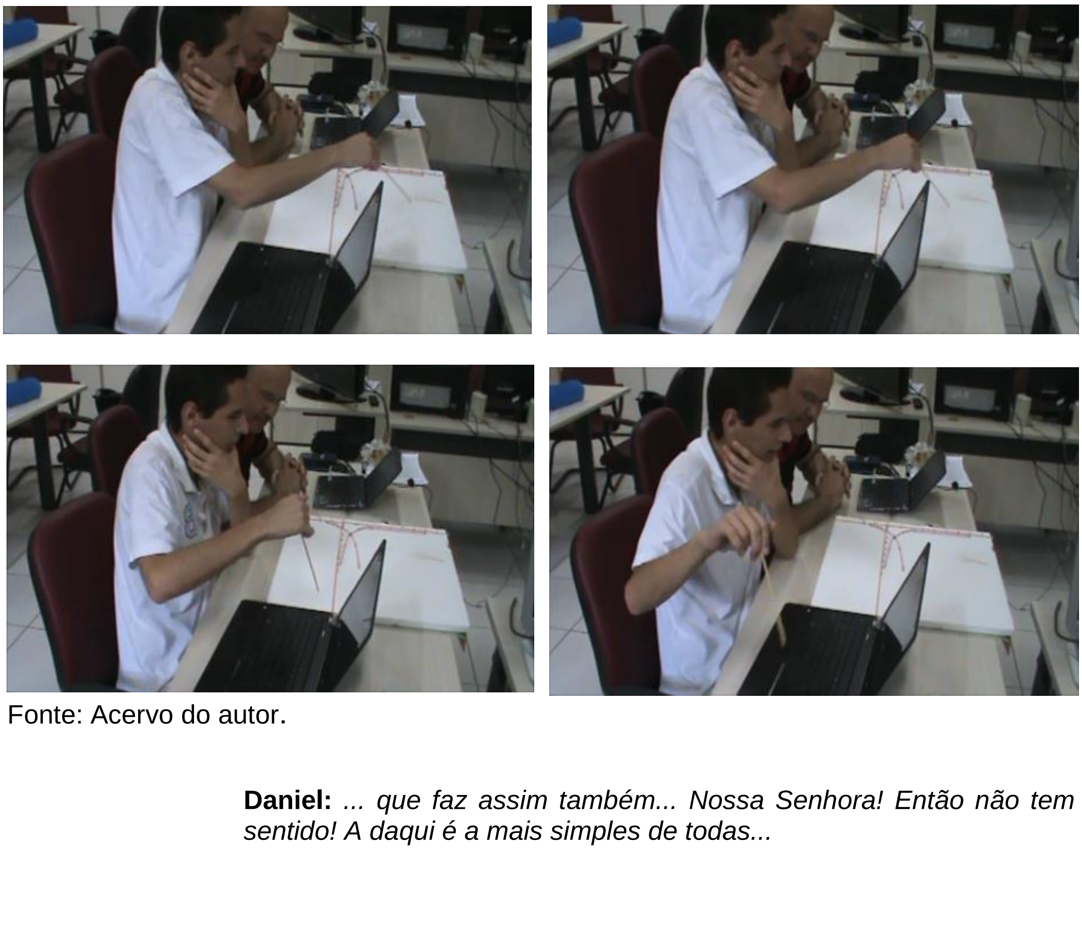
As imagens mentais de Daniel são formadas em certa medida, a partir de suas experiências tácteis. Percebemos que não é tão simples assim para ele relacionar as informações oriundas de nossos diálogos, com as experiências tácteis e ainda com o todo o conceitual do assunto em questão que, diga-se de passagem, causa grande confusão aos videntes.

Ao contrário de um vidente cujo aparelho visual permite a experiência simultânea de todas as informações, a exploração pelo tato permite uma obtenção gradual destas informações. Interessante observar que, na minha opinião, não me parece desorganizada a forma que Daniel observa as coisas através do tato. Ele tenta se apropriar destas informações gradualmente. A primeira tentativa de elaboração das ideias e construção da relação entre as curvas das funções f(x)=ln(x) e f(x)=1/x por meio da curva de inclinações é retratada no diálogo descrito a seguir. Este diálogo ocorreu no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013, à tarde.

> [Nesse momento, ele dá um salto da cadeira, num ímpeto afirmativo.]
> **Daniel:** *Ahhh! Entendi! Pera aqui!*
> [Pega o palito na mão direita e começa.]
> **Daniel:** *A inclinação... não pera aqui! O valor... o número zero daqui...*
> [Indicando o valor de y referente ao ponto x=7 com o palito.]
> **Daniel:** [...] *tende... não, não... tá se parecendo... como se fosse.. não é ângulo, né... mas o valor...*
> [Nesse momento, Daniel parece recordar da discussão que tivemos na aula do dia 2 de outubro de 2013, quando falamos que a inclinação não é o ângulo.]
> **Prof.:** *Da tangente...*
> **Daniel:** *Da reta! E não da curva!*
> **Prof.:** *Tá! A tangente... a inclinação...* [Reforço e insisto nos nomes dos entes. Ele pega o palito e apoia novamente sobre a curva do ln(x)].
> **Prof.:** *... desta reta tangente, é aquele número lá de baixo!*
> **Daniel:** *hummm... tá!*
> [Ele movimenta o palito sobre o gráfico.]
> **Prof.:** *Entendeu?*
> [Ele monta uma sequência de retas sobre a curva do ln (x).]
> **Prof.:** *Você quer outras retas?*
> **Daniel:** *Deve estar mais ou menos parecido... mas uma aqui que teve 1 e zero* [refere-se ao ponto (1,0)].
> **Daniel:** *Aqui, né?* [aponta com o palito o ponto x=1, sobre o eixo x].
> **Prof.:** *Certo!*
> **Daniel:** *No caso, o ponto dele seria o de cá?*
> [Aponta o palito sobre a outra curva do 1/x, mas volta atrás.]
> **Daniel:** *Não! Pera aqui!* [Parece confuso. Volta ao ponto x=7].
> **Daniel:** *Aqui é ponto 0,17...*
> [Volta a curva de 1/x no ponto x=7 cuja imagem é 0,17].
> **Prof.:** *0,17...*
> **Daniel:** *E pra 7! Que é aqui!* [Localiza o dedo indicador sobre o ponto].
> **Daniel:** *No caso... ou seja, este valor está pra este valor, neste ponto...*
> [Volta ao ponto x=1 e estabelece a relação da inclinação da reta tangente neste ponto, com o valor representado na outra curva e o valor de 0,17 com o valor de x=7.]
> **Prof.:** *Isso!*
> **Daniel:** *Estes dois estão pra si, os dois!*
> [Nesse momento, ele está com o dedo indicador sobre o ponto x=1,76 aproximadamente, onde as duas curvas têm o mesmo valor de y e se interceptam.]
> **Prof.:** *Uhumm!*
> **Daniel:** *Este daqui do um... um pra x e zero pra y, seria mais ou menos este valor!*
> [Posicionando o dedo sobre a posição na curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$ exatamente no valor que relaciona a inclinação da reta tangente na curva da função $f(x) = \ln(x)$. Aceno positivamente com a cabeça, concordando com o que ele conclui.]
> **Prof.:** *Isso aí! Exatamente! Exatamente!*

[Ele retira as mãos do plano, coloca uma delas no queixo e a outra ainda com o palito na mão, pensativo por um instante.]
Prof.: *Compreendeu?*
Prof.: *O que está acontecendo? À medida que a curva de baixo evolui... ela vai tendendo a estabilizar a inclinação da reta tangente sobre ela, não é isso?*
Daniel: *Quanto mais perto do eixo x, menor vai ser a inclinação!*
Prof.: *Exatamente!*
Daniel: *Humm...*
Prof.: *Certo?*
Daniel: *Nossa! Por que que tem que ser tão difícil assim?*
[Risos]
Prof.: *Ai! Ai! Ai!*
Daniel: *No caso, por exemplo, é só a função logaritmo no caso que tem essas... retas ou todas também tem?*
Prof.: *Nãoo!!!! Todas as curvas! Nós fizemos com essa né? Aí nós vamos fazer com outras! Certo? Aí, por exemplo...*
Daniel: *Nossa Senhora! Este daqui* [o que acabamos de discutir] *é o mais simples de todos?*
Prof.: *Não! Na verdade, assim... cada um* [me refiro a essa relação que acabamos de estabelecer entre as curvas] *tem a sua...*
[Ele está eufórico.]
Daniel: *Não porque... eu fico imaginando, se aqui só numa curva assim...* [Simula no ar, com o palito que tem em sua mão, a curva do $\ln(x)$] *...tá nessa dificuldade, numa curva...*
[Utiliza novamente o palito que tem em sua mão direita e simula no ar o esboço de uma curva como a do seno (Figura 36).]

Figura 36 – Daniel simula o esboço da curva da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{sen}\,(\mathrm{x})$. O movimento feito por ele está representado da esquerda para a direita. Encontro particular do dia 8 de outubro de 2013



Fonte: Acervo do autor.

Daniel: *... que faz assim também... Nossa Senhora! Então não tem muito sentido! A daqui é a mais simples de todas...*

Prof.: *Não! olha só, o que acontece, cada uma curva que a gente tiver, a gente vai ter uma curva de inclinações que vai representá-la também...*
[Ele pega novamente o palito e simula sobre o isopor a curva do $\mathrm{Ln}\,(x)$.]
Daniel: *A daqui assim!*
Prof.: *Éeee...*
Daniel: *A que passa daqui pra cá!*
[Faz novamente o mesmo movimento.]
Prof.: *Essa daí é a curva normal. É a função logaritmo né? E a sua curva de inclinações é a outra!*
[Nesse momento, ele faz com o palito a simulação da outra curva agora, a $\frac{1}{x}$.]
Daniel: *Essa aqui agora!*
Prof.: *Isso! Exatamente!*
Daniel: *No caso, por exemplo... pode-se dizer que a segunda... Não é derivada... mas assim...*
Prof.: *É a derivada!*
Daniel: *É?!*
Prof.: *Exatamente isso...*
Daniel: *Não! Você fala derivada não no sentido da matemática mas no sentido...como se fosse o resultado, assim... a segunda parte dessa primeira!*
Prof.: *Humm... é! Pra poder não falar isso tudo que você falou e, isso tudo que você falou não representar objetivamente o que falamos aqui* [no plano ou no nosso assunto] *a gente diz que ela é a derivada. Entendeu? A derivada da função, o que ela é? É uma outra função!*
Daniel: [...] *que se originou na primeira!*
Prof.: *Que se originou na primeira! A partir de que? Das...*
Daniel: *inclinações...*
Prof.: [...] *inclinações das retas tangentes àquela curva original, entendeu?*
Daniel: *Humm. Entendi!*

c) A elaboração de sua própria concepção utilizando a função $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

Nesse momento, continuamos o nosso trabalho utilizando agora a função $f(x) = sen(x)$. Daniel tem em mãos o esboço da função em alto-relevo (Figura IV da atividade orientadora do experimento de ensino) e passa a explorá-lo. De início, atentamos para os aspectos da curva: os pontos culminantes, intersecção com o eixo, dentre outros. Desejava aqui observar como Daniel se comportaria agora com esta nova função e quais relações seria capaz de estabelecer com o que havíamos discutido até então. Conforme Davydov (1988 apud DANIELS, 2003, p. 74), para ser eficaz na formação de conceitos, “a instrução deve ser projetada para promover a tomada de consciência da forma e da estrutura conceituais e, assim, levar em conta o acesso individual a conceitos científicos adquiridos e o controle sobre eles”. Assim, procuramos oferecer as condições para que Daniel, com o meu auxílio, criasse suas próprias redes conceituais estabelecidas com conexões entre os diversos assuntos discutidos. Nesse momento inicial, Daniel procura conjugar as ideias discutidas em sala com as novas ideias acerca da posição da reta tangente. Lembra-se do fato de não poder atravessar a curva e externaliza o entendimento de tangente reelaborado por ele. No trecho 6.13, destacamos os momentos iniciais dessa nova conversa.

> **Trecho 6.13** Daniel estabelece relação entre as curvas das funções $f(x) = ln(x)$ e $f(x) = senx$ por meio da curva de inclinações: estabelecendo semelhanças e diferenças no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013, à tarde.
>
> **Prof.:** Então, por exemplo, quando eu pegar a função seno que é aquela outra da onda... Como é que é a curva do seno, você lembra? De cabeça? Como é que ela faz? [Neste momento, não relacionei a curva que ele havia esboçado pouco tempo atrás, no ar, com a curva do Seno. Esperei apenas verificar se ele era capaz de lembrar o traçado dela buscando em sua memória.]
> **Daniel:** Seno... [ficou em dúvida, tentando lembrar].
> **Prof.:** Ela é uma curva, né? Aqui ela olha! [Pego as curvas que ele tem em alto-relevo].
> **Prof.:** Aqui ela! [Entrego a ele. Ele passa a mão, reconhecendo a curva].
> **Prof.:** Essa é a função seno.
> **Daniel:** Nossa! Essa aqui deve ser uma das mais complicadas!
> **Prof.:** Hummm... vamos pensar? Olha só! Então vamos lá!
> [Num repente, ele pega rapidamente um palito e coloca sobre a curva.]
> **Daniel:** Olha, pra você ver a quantidade de retas que vai ter aqui pra fazer... [Pega o palito e percorre a curva do seno com o palito ansiosamente e rapidamente (Figura 37). Imagino que Daniel, neste momento, associou a quantidade de retas com uma maior variabilidade das inclinações ao longo da curva].

Figura 37 – Daniel simula o percurso da reta tangente à curva da função $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{sen}}$ (x) disponível em alto-relevo no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013 – tarde

Fonte: Acervo do autor.

> **Daniel:** [...] *a outra não! Daqui vai indo... e vai tender quase a zero!*
> [Volta-se para o isopor e faz com a mão o movimento sobre a curva do ln (x) rapidamente, num movimento abrupto e preciso, percorrendo a curva no sentido crescente do eixo x.]

Daniel: *A Daqui!* [referindo-se ainda à ln (x) que acabara de simular]
Prof.: *Humm...* [concordo com ele e nada pondero. Deixo que ele continue a sua elaboração.]
Daniel: *A daqui... a daqui não! A daqui vem pra cá...*
[Começa na origem e percorre a curva do seno num movimento crescente, com a reta, atinge o ponto máximo e colocando o palito na horizontal quando chega em $\frac{\pi}{2}$ e volta a decrescer do outro lado.]
Daniel: *Vem assim...* [percorrendo a curva entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ e fazendo com o palito o sentido decrescente da reta.]
Daniel: *Vem no negativo do lado de cá...*[refere-se à inclinação da reta, neste caso, negativa.]
Prof.: *Ahhhh....*[observo um ponto importante na sua elaboração mas ele não para. Ele está eufórico com as suas considerações]
Daniel: [...] *tem que vir aqui... de um lado já passo pro outro do lado de cá!*
[Refere-se às mudanças nas inclinações das retas.]
Daniel: *Porque assim, por exemplo, tá olhando os pontos aqui do lado de fora...*
[Refere-se à concavidade da curva de 0 a π , lado que ele chamou "de fora", e de π a 2π, que ele chamou de "dentro".]
Daniel: *...daqui, você tem que passar para o outro lado de cá, você não pode ter uma reta nessa concavidade aqui... tem que ser só na parte convexa!*
[Referindo-se à reta tangenciando a curva pelo lado de fora. Neste momento, entendo que ele pensa em lado de dentro e lado de fora da linha.]
Daniel: *Então já muda totalmente! Aquela de lá...* [referindo-se à curva do logaritmo natural].
Daniel: [...] *é a mais simples de todas!*
Prof.: *Aquela é uma curva boa pra gente mexer com ela primeiro, não é?*
[Refiro-me à curva do Logaritmo natural.]

Daniel continua o seu trabalho de explorar a curva do Seno. Agora tem em mãos o palito e passa a utilizá-lo sobre a curva novamente. Dentre os diversos assuntos discutidos, ressalto alguns momentos em que ele busca relação entre os objetos que estuda agora com outros que vimos anteriormente. Deseja saber se ele tinha, por exemplo, conhecimento sobre as posições ocupadas pela reta em determinados trechos da curva e sua relação com a inclinação. No trecho a seguir, Daniel externaliza sua compreensão sobre este assunto. Este trecho foi extraído de nossa conversa no encontro particular na tarde do dia 8 de outubro de 2013.

[Neste momento ele passeia com o palito sobre a curva do Seno]
Prof.: *O que você está fazendo com esse palito aí? O que você está imaginando?*
Daniel: *Estou só imaginando como que seria aquele negócio das inclinações... das retas...*
Prof.: *Isso! E o que você pensa disso ai? Fala pra mim!*
Daniel: *No caso ela começa... assim... bem inclinada...*
[Posiciona a reta tangente no início da curva numa posição ascendente]
Daniel: *Ai ela vai abaixando... vai diminuindo...*
[Ele realiza no ar, o movimento de subida e descida como se estivesse percorrendo a curva da função $f(x) = \mathrm{sen}\,(x)$, acompanhando o seu contorno. Realiza, finalmente, esse movimento decrescendo a inclinação da reta até que esta chegue em $\frac{\pi}{2}$.]

Prof.: *Ela já começa com uma inclinaçãozinha ai né? Porque ela vem pro lado de cá também!*
[Explicando que ela vem debaixo, do lado negativo da curva, posiciono a reta nesta posição para que ele tenha noção da curva como um todo.]
Prof.: *Assim! Tá! Ela tem que ir fazendo o quê? Tangenciando a curva! Ela não pode atravessar a curva! Certo? Ela está tangenciando aí, olha!*
[Ele faz o movimento correto agora com a reta tangenciando a curva.]
Prof.: *Aí, à medida que você for andando... a reta vai andando também! Esse é o aspecto dinâmico da reta... é o movimento dela! Tá vendo que é infinito porque cada pontinho que você imaginar, tem uma inclinação diferente que, quando você pega essa função e usa essa reta aí, ela vai fazendo o quê? Ela vai desenhando outra função.*
Daniel: *Hummm...*
Prof.: *Entendeu? São duas funções associadas... ela e a derivada dela!*
Daniel: *Por exemplo aqui, no caso...*
[Posiciona a reta entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ numa posição ascendente. Ai desloca um pouco e vai até o zero.]
Daniel: [...] *no caso aqui no 0, ela está mais ou menos assim! Ela tá aqui, né, totalmente assim...*
[Na vertical.]
Prof.: *Não! Ela está inclinada... Você está falando da reta?*
Daniel: *Ahã!*
Prof.: *Não. A reta não pode estar assim! Porque senão ela não vai ser tangente!* [Ele havia posicionado a reta em uma posição quase vertical nas proximidades de zero].
Daniel: *Então, tá mais ou menos assim! E vai percorrendo assim, tangente... até chegar aqui no 90º que seria* π ... 2π ... [ele vacila] *é* $\frac{\pi}{2}$*!*
Prof.: *Tá! Qual que seria a inclinação dessa reta, por exemplo, quando ela chegar em* $\frac{\pi}{2}$*?* [Posiciona a reta nesta posição].
Daniel: *Aqui no caso seria...nenhuma né? Seria 0, não é? Porque, no caso, ela estaria quase paralela...*
Prof.: *Exato! "Quase" paralela?*
Daniel: *Completamente.*
Prof.: *Completamente paralela...*
Daniel: *Aí, no caso, aqui ela começaria a decrescer aqui! Decair!*
Prof.: *Exatamente! Ela vai ficar negativa! Não vai?*
Daniel: *Até chegar aqui no... no..*2π*? Não! No* π *só!*
Prof.: *O que você acha da inclinação de* π *em relação à inclinação de 0?* [Silêncio].

Nesse momento, desejava saber se Daniel era capaz, de fato, de reconhecer as semelhanças e diferenças entre as inclinações em pontos onde a reta apresentava inclinações com valores simétricos. A Figura 38 apresenta o momento em que ele utiliza a ferramenta material para pensar uma possível resposta.

Daniel: Pera aqui! [Volta o palito até $\frac{\pi}{2}$]
Daniel: *Aqui ou .... não! você fala aqui...* [no zero (Figura 38a)]
Daniel: ... e aqui. [no π (Figura 38b)]

Figura 38 – Daniel posiciona a reta tangente à curva da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{sen}\,(\mathrm{x})$ nos pontos de abscissas 0 (a) e $\boldsymbol{\pi}$(b) no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013 – tarde

Figura 38a

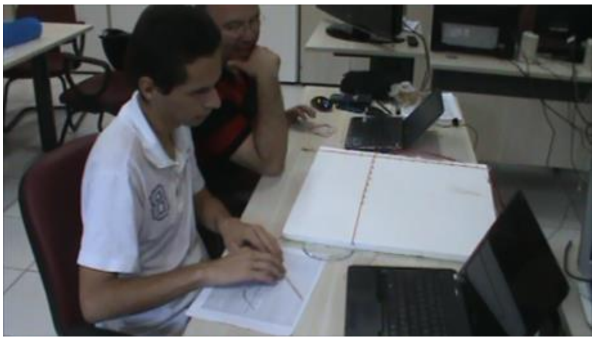


Figura 38b

Fonte: Acervo do autor.

> **Daniel:** São... inversas!
> **Prof.:** *Inversas em que sentido?*
> **Daniel:** *Uma é crescente...*
> **Prof.:** *Se uma vale, por exemplo, 10. Quanto vai valer a outra?* [Silêncio. Pensativo.]
> **Daniel:** *No caso, deveria ser -10!*
> **Prof.:** *Por que que "deveria" ser -10?*
> **Daniel:** *Porque aqui, por exemplo, a daqui está no eixo, porém tá crescendo...* [Volta o palito ao ponto x=0].
> **Prof.:** *Na verdade, ela não está no eixo, ela está na curva!* [Corrijo].
> **Daniel:** *Sim! O zero tá no eixo e a reta tá crescente!*
> **Prof.:** *Certo!*
> [Volta o palito até o ponto x= π].
> **Daniel:** *E o 180 aqui, o π, ele também tá no eixo, só que a reta está decrescendo....*
> **Prof.:** *Isso! Muito bem, cara! Muito bem!*
> **Daniel:** *Aí tinha que tá inverso....negativo!*
> **Prof.:** *Então, se uma é 10, a outra é -10, não é?* [insisto na conclusão dele].
> **Daniel:** *Tinha que ser! Não é?*
> **Prof.:** *Tinha que ser!*

Continuando nossa conversa, evoluímos para a ideia de inclinação. Daniel, porém, trouxe uma nova relação. Algo que não me recordava de ter falado em sala, mas que ele já havia visto em uma disciplina no primeiro semestre de 2013: o coeficiente angular da reta tangente e a sua relação com a curva de inclinações. Como ele trouxera esse elemento, deseja saber agora em que medida Daniel entendera estas ideias e qual(is) relação(ões) poderia estabelecer entre eles. O trecho a seguir, extraído de nossa conversa na tarde do dia 8 de outubro de 2013, retrata nossa discussão.

> [Neste momento, ele tem um palito em sua mão e passeia com ele sobre a curva vindo de π para $\frac{3\pi}{2}$]

Daniel: *Tá certo! Mas... ok! Joia! Então ela vai percorrendo até chegar aqui, de novo, no 270...*
[Faz com o movimento a reta até o ponto 270.]
Prof.: *Tá! Esse 270, qual que vai ser a inclinação dela?*
Daniel: *Também seria 0 de novo!*
Prof.: *Zero de novo!*
Daniel: *E no caso seria o mesmo proporcional do lado de cá!*
[Faz com a mão indicando o $\frac{\pi}{2}$.]
Prof.: *Então, o que você percebe nisso daí?*
Daniel: *Porém! Tem uma coisa aqui!*
Prof.: *Humm...*
Daniel: *Ela... não pode-se dizer que ela é negativa ou positiva! Porque... primeiro que a reta não tem valor... a própria reta em si!*
Prof.: *Não entendi!*
Daniel: *A reta não tem um termo que digamos, é positivo ou negativo...*
Prof.: *Uai, tem a inclinação! A inclinação dela pode ser positiva ou negativa...*
Daniel: *Então aqui pode ser mais zero e aqui menos zero?*
[Faz com a mão o movimento com a reta na posição horizontal e coloca sobre o valor $\frac{\pi}{2}$ e em seguida, sobre o valor $\frac{3\pi}{2}$.]
Prof.: *Não! Ai é zero! Mesmo!*
Prof.: *Ela só vai ser crescente e decrescente. Por exemplo, quando é que ela é crescente? Você lembra das retas crescentes?*
[Ele posiciona a reta sobre a curva no primeiro quadrante, indicando corretamente a posição de uma reta crescente.]
Prof.: *Isso!*
Daniel: *No* caso... o que é o coeficiente angular? Na verdade? É o valor...
Prof.: *O coeficiente angular é justamente essa parte da reta que dá a inclinação dela! Que é o "a" em* $y = a(x) + b$.
Daniel: *Por exemplo... esse 90 aqui é o coeficiente angular dessa reta?* [Coloca a reta sobre $\frac{\pi}{2}$]
Prof.: *Não! 90 é um ângulo!* [Daniel corriqueiramente confunde ângulo com o valor real $\frac{\pi}{2}$]
Prof.: *Qual é o coeficiente angular? É a tangente desse ângulo!*
Daniel: *No caso seria esse ponto que encontra!*
[Ele faz com as duas mãos sobre o ponto onde $x = \frac{\pi}{2}$, um dedo indicador, descendo ao eixo x e o outro dedo indicador até o eixo y.]
Prof.: *Não! O coeficiente angular é da reta! Ele é da reta!*
Daniel: *Mas ele então... ele não é um número não!*
Prof.: *Ele é um número que está associado a esta inclinação da reta!*
Daniel: *Ah! Tá! No caso, o zero! O zero aqui!*
[Ainda com a mão, agora com a reta, novamente, na horizontal sobre $\frac{\pi}{2}$.]
Prof.: *Por que a inclinação aí é zero? Porque a reta é paralela ao eixo x. Certo?*
Prof.: *Aí, qual que é o coeficiente angular dessa reta? Zero!*
[De sopetão ele passa rapidamente para o plano de isopor.]
Daniel: *Ah! Igual por exemplo, igual aqui...*
[Ele volta ao plano de isopor e resgata a ideia da curva do logaritmo e bate com o dedo indicador sobre a posição onde estava o primeiro ponto que utilizamos na curva, x=0,2.]
Daniel: [...] *aquele ponto que estava aqui... o coeficiente angular dele seria o 7?*
Prof.: *Exatamente! A inclinação dela! 7! Certo?*
Daniel: *Tá!*
[Volta para a folha de papel novamente.]

Daniel foi preciso ao estabelecer a relação entre o coeficiente angular da reta tangente à curva e a inclinação que vínhamos discutindo até então. Nesse momento, ele também estabeleceu para si a relação entre um ente que estudávamos no Cálculo e outro que ele estudara em fundamentos de Matemática. No GeoGebra, em sua janela de álgebra, foi possível aos videntes observar a equação da reta tangente à curva e a variação de seu coeficiente angular ao longo da curva. Mas Daniel não vira isso no dia em que eu explicara a relação da tangente e o cálculo de sua inclinação. Talvez, em algum momento, uma de suas colegas colaboradoras houvesse tratado disso com ele ou ele mesmo se apercebera disso em alguma discussão em sala de aula. Fato é que eu não havia tratado disso com ele. Estabelecer essa relação foi, para ele, uma inovação substancial.

No momento seguinte, passamos a construir a meia volta (de zero a pi) da função $f(x) = sen(x)$, da mesma forma que fizemos com a função $f(x) = \ln(x)$. Tinha por objetivo observar como Daniel perceberia a relação da inclinação da reta tangente à curva desta nova função com a sua função derivada $f'(x) = cos(x)$. Após a confecção do trecho da função passamos a discutir estas relações. Primeiramente pela percepção da inclinação da reta e seu cálculo. O trecho a seguir, extraído de nossa conversa na tarde do dia 8 de outubro de 2013, ressalta esse diálogo em que Daniel consegue perceber como determinar a curva de inclinações da reta tangente à curva da função $f(x) = sen(x)$.

> **Daniel:** *Aqui, no caso, essa seria uma função, não é? Como que eu faço com essa daqui pra achar a outra, a derivada dela?*
> **Prof.:** *Humm?* [Fiquei surpreso com a pergunta].
> **Daniel:** *Como que eu faço pra achar a derivada dela?*
> **Prof.:** *Uai, como é que fizemos com a outra? O que a gente fez?*
> **Daniel:** *Ah, tá! Entendi! Tem que pegar a reta...*
> [Procura algo sobre a mesa. Penso que seja um palito.]
> **Daniel:** *... a inclinação.*
> **Prof.:** *Exatamente.*
> [Tateia o plano em busca de algo. Acha um palito. Pega-o e se desloca com ele para a curva. Passa a mão esquerda sobre a curva, enquanto tem na direita o palito que simula a reta tangente.]
> **Daniel:** *Ela...* [murmura algo que não entendo, mas a tarefa é a de localizar a reta tangente].
> **Daniel:** *No caso, este ponto* [onde ele apoiou a reta] *é 1? Não. É um meio.*
> **Prof.:** *É! Aí, no caso, você está pensando... neste ponto aqui?* [Aponto com o dedo o tal ponto].
> **Daniel:** *Uhumm.*
> **Prof.:** *Beleza! Olha a inclinação dele! Ai pego a inclinação da outra! Aí eu tenho que ir calculando as inclinações... os triangulinhos, não é?* [Ele faz com a mão (Figura 39) o mesmo movimento que fizera em sala de aula quando tratamos, na aula do dia 2 de outubro, do cálculo da inclinação

usando o método da tangente. Usa as mãos tendo a reta como hipotenusa, o indicador direito como cateto oposto e o polegar como cateto adjacente]

Figura 39 – Daniel posiciona a mão formando um triângulo para o cálculo da inclinação da reta tangente à curva da função $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{sen}}\,(x)$ no encontro particular do dia 8 de outubro de 2013 – tarde

Fonte: Acervo do autor.

Prof.: *É! Aí poderia ser um triângulo! Na verdade, assim, a gente vai ter um monte de erros ai, não é?*
Daniel: *Só um instante aqui! Por exemplo, no caso, esse aqui é meio. Vai ser meio ao quadrado, o processo da hipotenusa mesmo!*
Prof.: *É esse cateto!*
Daniel: *Esse* [faz menção ao cateto adjacente] *vale não sei quanto, mas vamos supor que vale 4! 0,5 ao quadrado mais...*
[Ele trata aqui do processo de cálculo. Não está interessado no resultado, mas sim no processo.]
Prof.: *Não! Precisa disso não! Nós vamos calcular a tangente. A tangente!*
Daniel: *Ah, tá! No caso, é o cateto oposto pelo outro!*
[Daniel recorda-se do processo que é necessário ao cálculo da inclinação.]
Prof.: *Certo!*
Daniel: *A fórmula do cateto oposto pelo adjacente!*
Prof.: *Exatamente.*
Daniel: *É esse sobre esse aqui* [Aponta com o dedo, indicando qual é o cateto oposto e qual é o cateto adjacente].
Daniel: Seria 0,4 por 0,5!
[No contexto do exercício, isso constitui um exemplo. Sem qualquer medida].
Prof.: *Exatamente. Com os erros todos que a gente cometeu aqui, não é? Mas o que vale é o quê? Você entender o que é! Certo?*
Daniel: *No caso, por exemplo, o resultado aqui que eu iria encontrar vai ser, por exemplo, se fosse aqui... não sei quanto...faz ai pra gente!* [Faz menção de realizar a conta na calculadora]
Prof.: *Vamos fazer!* [Pego a calculadora]
Daniel: *0,4 sobre 0,5.*
Prof.: *Então é 0,4 dividido por 0,5.*
Prof.: *0,8!*
Daniel: *No caso, esse 0,8 aqui...*
Prof.: *Humm. Onde você iria marcar ele?*

[Silêncio. Ele volta a mão para a reta e o ponto novamente]
Daniel: *Pera aqui! Esse...* [Passa a refletir]
Daniel: *Lá no x... não! Pera aqui!*
[Ele posiciona sua mão esquerda sobre o eixo y, procurando o valor 1 e fica com o dedo passeando por esta redondeza.]
Daniel: *Não! Não pode...*
Prof.: *Qual que é a relação que a gente fez pro gráfico anterior? Lembra? Nós usávamos o quê? Uma coordenada era o x e a coordenada y era o quê?*
Daniel: *O resultado!*
Prof.: *De quê?*
[Silêncio.]
Daniel: *Dessa operação!*
[Faz menção ao que acabamos de fazer.]
Prof.: *Dessa operação! Exatamente!*
Daniel: *No caso...*
Prof.: *Então qual seria o ponto que a gente ia marcar lá?*
[Volta a colocar o dedo no mesmo locar, próximo ao ponto 1 de y, mas ainda não está seguro.]
Daniel: *Neste ponto...não!*
Prof.: *Eu vou usar o que deste ponto?*
Daniel: *O 0,4* (zero vírgula 4) [valor de x]
Prof.: *E qual a coordenada y que nós vamos marcar?*
Daniel: *0,8 (zero vírgula oito)*
[Coloca o dedo sobre o local]
Prof.: *Isso! Muito bem! Ai em cima. Exatamente. Exatamente.*
[Faz com a mão direita um movimento descendente deste ponto para baixo]
Daniel: *No caso ela vai vindo pra cá!* [Ele faz uma projeção da evolução da curva de inclinações que, neste caso, seria a curva da função $f'(x) = \cos(x)$, realizando um movimento descendente com o indicador direito].
Prof.: *Isso, Daniel! Isso ai cara! Vai cair, não vai? Você já começou a perceber isso!*
Daniel: *Por exemplo, esse valor aqui...*
[Muda a reta de lugar e faz um novo triângulo.]
Daniel: *Ai já puxaria pra cá!*
[Ele ajeita a reta para que ela passe pelo novo ponto que ele escolheu, Ajusta a reta para que ela intercepte o eixo x. Dessa forma, ela vai interceptar o eixo no semieixo negativo de x. Ajeita a reta para que fique tangente ao novo ponto.]
Daniel: *Aí, ela ficaria assim?*
Prof.: *Isso! Exatamente!*
Daniel: *Uma coisa!*
Prof.: *Hã!*
[A reta intersectou o eixo x do lado negativo.]
Daniel: E esses valores negativos?
Prof.: *Não tem problema! Você vai calcular. Porque aqui ele não está passando em algum lugar?* [Refiro-me ao ponto de interseção da reta com o eixo x, em seu semieixo negativo].
Daniel: *Uhumm.*
[Sponto o local da intersecção com o eixo x.]
Prof.: *Você vem aqui e busca esse valor... ah qual é esse valor? Ah... menos um! E esse aqui...*
[Aponto o local que é o valor de x, pé da perpendicular, onde a reta tangencia a curva.]
Prof.: *é 1(um)! Então qual é esse cateto?*
Daniel: *2 (dois).*
Prof.: *2 (dois)!*
Daniel: *Ah, tá!*
Prof.: *Aí a altura dele é a altura do ponto lá! Então é a altura do ponto, dividido pelo cateto aqui!*

Daniel: *Humm, tá!*
Prof.: *Certo? Ai é essa nova inclinação. Ai a outra lá...*
[Interrompe-me.]
Daniel: *Por exemplo, se fosse... sei lá... 0,75 ai abaixaria pra pegar esse valor aqui. Aí jogava ele pra pegar o eixo dos x...*
Prof.: *Exatamente! Você vai pegar a coordenada x com a coordenada y sendo a inclinação que a gente calculou.*
Daniel: *Hummm...*
Prof.: *Entendeu? Ai você vai obter a outra curva.*
Daniel: *Os pontos que eu marquei aqui nessa primeira curva seriam os valores do x propriamente. E os resultados dele na relação...*
[Entendi como sendo o cálculo da inclinação, em função da discussão.]
Daniel: [...] *vai ser os valores no ponto... no eixo y.*
Prof.: *Isso! Exatamente isso aí! Foi na veia agora! Certíssimo!*

6.6 A visão de Daniel acerca das retas tangentes a uma curva – a materialização do signo

Devido a fatores como o recesso de outubro e outros eventos no Instituto Federal, voltamos a nos encontrar apenas no dia 23 de outubro de 2013. Dada a distância entre o encontro do dia 8 de outubro e esse, procurei retornar a alguns conceitos discutidos nos encontros anteriores e observar o que havia ficado dessas discussões na fala de Daniel. De início, percebi alguma confusão em determinados conceitos. Voltamos a construir o gráfico da função $f(x) = sen(x)$, dessa vez no Multiplano. Estávamos discutindo a relação da curva de inclinações novamente quando Daniel me interrompe e me surpreende com a sua elaboração da ideia de tangente à curva por um ponto utilizando peças do Multiplano. O trecho a seguir, extraído de nossas conversas, na tarde do dia 8 de outubro de 2013, retrata a materialização de um signo como meio auxiliar para solucionar o problema da tangente para ele.

Daniel: *Sandro, você passou esse negócio no GeoGebra pro pessoal? A função mexendo, assim? A reta?*
Prof.: *Ainda não.*
Daniel: *Meu Deus do céu! Tá doido!*
Prof.: *Mas você já fez isso aqui!*
Daniel: *Tá, mas...*
Prof.: *Concorda?*
Daniel: *Eu fico imaginando...*
[Ele está com uma haste do multiplano (Figura 40) e passa a simular no ar o percurso da reta pela curva da função seno, como se estivesse pensando em algo.]
Daniel: [...] *pera aqui!*
[Fico observando o que ele está fazendo. De repente, ele passa a tatear a mesa em busca de algo (Figura 41). Noto que são peças do Multiplano que tem a sua frente.]

Daniel: *Eu fico brincando com esse negócio aqui mas é agora que ele vai ter utilidade!*

Figura 40 – Daniel brincando com a haste do Multiplano e simulando a reta tangente à curva da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{sen}$ (x) no encontro particular do dia 23 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Prof.: *Vamos ver... vamos ver que utilidade você vai dar a isso aí!*
Daniel: *Vamos fingir que tem...* [Pega as peças em L do Multiplano e passa a conectá-las (Figura 42). Abre as peças como se conformassem um leque]

Figura 41 – Daniel procura as peças do Multiplano e passa a utilizá-las de maneira completamente diferente de sua destinação usual no encontro particular do dia 23 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Figura 42 – Daniel construindo com peças do Multiplano um leque e simulando um feixe de retas tangentes à curva da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{sen}$(x) no encontro particular do dia 23 de outubro de 2013

Fonte: Acervo do autor.

Prof.: *Haaaa!* [Surpreso com a criatividade dele, pois percebi de imediato qual ideia ele queria demonstrar].
Daniel: *Assim...* [abre o feixe pra um lado] *... ou assim!* [abre o feixe para o lado oposto].
Prof: *E o que é isso aí?*
Daniel: *Por exemplo, um ponto, segundo, terceiro e quarto* [Vai indicando para cada reta, um ponto associado a ela].
Prof.: *Uhumm! E lá em cima, o que é?* [Refiro-me ao pé do L que representa a reta tangente].
Daniel: *No caso, essa que seria a inclinação das retas da futura curva!*
Prof.: *Exatamente! Você acabou de pensar, dar ainda uma utilidade para este monte de coisa* [me relaciono a determinadas peças do Multiplnao que, até então, não havíamos encontrado utilidade] *que a gente não achava utilidade nenhuma mas agora... você achou uma utilidade!*
Prof.: *Olha lá: esse ponto.* [Indico apontando com o dedo.] *Qual a inclinação da reta tangente a ele? Essa!*
Daniel: *Uma coisa que acho que vai facilitar para você levar para o pessoal? Leque! Leque de papel, você conhece?* [Faz o movimento com a mão como se estivesse abanando um leque.] *Porque esse aqui é o princípio do leque, não é?*
Prof.: *Sim!*
Daniel: *O que eu estava misturando é essa grande quantidade de reta que no final das contas, não tem nenhuma! Só tem a curva!*
Prof.: *Exatamente! É como se você tivesse...*
[Ele me interrompe e continua.]
Daniel: *Ao mesmo tempo em que tem tudo, não tem nada!*
Prof.: *Agora você filosofou!*
Daniel: *Porque, olha bem! Tem reta, reta, reta e reta! Mas, no final, você só tem a curva!*
Prof.: *Isso, Daniel!*

Tendo por base essa última discussão, podemos perceber a elaboração de Daniel, a partir das peças do Multiplano, de um feixe de retas tangentes à curva, simulando o conceito dinâmico da derivada de uma função. Tal como ele falou, “a inclinação das retas da futura curva”, parece que ele conseguiu associar a ideia que permeia a relação entre as duas curvas das funções: a primitiva e a sua derivada.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.
>
> Paulo Freire

Há algum tempo trilhando o caminho da educação, bem recentemente deparei-me com a questão da inclusão de alunos com necessidades especiais em salas de aula de Matemática. Tendo por base as minhas experiências enquanto docente, nesse curto percurso profissional, tentei, ao longo desta breve pesquisa, retratar algumas das muitas dificuldades que tanto alunos como professores encontram ao procurar um caminho de aprendizagem para alunos com necessidades especiais. Percebi importantes trabalhos sendo desenvolvidos no Brasil e que tratam de assuntos de Matemática para a Educação Básica. Ao olhar para o Ensino Superior, em particular para as disciplinas como Cálculo, Análise, Álgebra Linear, entre outras elencadas dentro do grande grupo das ciências exatas e da terra, percebo um vazio à espera de pesquisas que preencham lacunas. Pesquisas que discutam as importantes questões da inclusão de pessoas com necessidades especiais. Meu desejo é incentivar a reflexão e a promoção de mudanças nas salas de aula destes destas disciplinas. Nesse sentido, esta dissertação pretende ser uma pequena contribuição na busca por desbravar alguns caminhos, tão necessários à inclusão de pessoas, independente de suas necessidades especiais ou não, para que tenham acesso, oportunidade e, de fato, mesmos direitos ao buscar a construção de seu conhecimento. É comum a ideia de que o cego não pode exercer certas profissões como a de matemático, engenheiro, físico, programador, analista de sistemas ou qualquer outra que exija conhecimento matemático avançado, uma vez que não pode "ver" formas geométricas, gráficos, tabelas, diagramas ou mesmo ter noção de tantos entes abstratos sem que eles estejam descritos em Braille. Tal ideia do senso comum é sim, para mim, a cegueira verdadeira que assola tantas pessoas que desconhecem a capacidade e potencialidade que um cego possui ao lhe ser dada a oportunidade, não por caridade, mas por direito. Nesse sentido, "ver" é algo além do aparelho visual.

Ao ler essas linhas, o leitor pode ter a impressão de que tudo foi muito bem organizado e que as descrições apresentadas foram escritas tranquilamente. Não foram. Todo um complexo contexto teceu esse emaranhado de versões e revisões da escrita. Não temos como deixar de olhar com intencionalidade. Atribuímos importância ao significado, como destacam Bogdan e Biklen (1994). É interessante observar como nossos olhares mudam diante da urgência que temos em promover mudanças na educação matemática, especialmente no Ensino Superior. Resgatando a fala de Marcone (2010, p. 40), descrita no capítulo 3, acerca da impossibilidade do ensino de determinados conteúdos de matemática a alunos cegos: "[...] Aí eu pergunto: não são possíveis de se ensinar para pessoas cegas por quê? Porque a gente não sabe ensinar". Percebi também no decorrer da pesquisa, principalmente quando da opção de Daniel em mudar do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação para o curso de Licenciatura em Matemática, uma maneira de se sentir mais confortável, visto a velada dificuldade discutida pelos professores em "incluí-lo". Não sei exatamente se ele "percebeu" essas discussões de alguma forma. Certo é que, a partir de sua entrada no curso de Sistemas de Informação, muitas reuniões e discussões foram levadas a cabo pela Direção de Ensino juntamente com a equipe docente que atua no Ensino Superior e da qual eu faço parte. E, como relatei no capítulo 1, as dificuldades aventadas por alguns professores eram intransponíveis. No centro de toda a discussão, sempre que o assunto era o Daniel, a sua "incapacidade" em visualizar era o motivo maior da grande dificuldade que ele teria em cursar Sistemas de Informação. Freire destaca que que não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino, pois

> o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou uma forma de ser ou de atuar que se acrescente à de ensinar. Faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente, o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador (2007, p. 29).

Ao assumir essa postura, modificamos a nossa própria prática e assumimos a responsabilidade de começar a inclusão a partir de nós mesmos. Em se tratando da inclusão, considero que ainda estamos engatinhando neste processo. As estatísticas apresentadas na pesquisa demostram um avanço em termos de acesso mas não informam acerca da permanência. Em nossas conversas, Daniel relatou que, se não fosse o apoio percebido de seus colegas e o incentivo dos professores, dificilmente ele se manteria no curso, dada a dificuldade de acesso a materiais escritos e recursos pedagógicos disponíveis para ele. Reitero aqui o esforço da equipe docente e discente do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG em São João Evangelista no sentido de proporcionar todos os meios possíveis de acesso a materiais manipuláveis e recursos pedagógicos ao Daniel. Por outro lado, o esforço de Daniel em caminhar no sentido da construção de seu conhecimento também é notável. Nesse sentido, resgatando a fala de Sassaki (1997) do capítulo 3, compreendendo nitidamente o que significa a adaptação da sociedade em seus sistemas sociais e a assunção de seus papéis na sociedade pelas pessoas com necessidades especiais.

Outro ponto fundamental considerado por mim é a maneira como Daniel se relaciona com a tecnologia. O recurso tecnológico mais utilizado por ele em suas tarefas cotidianas é, de fato, o computador. Daniel tem imensa facilidade em utilizar o computador e as tecnologias a ele associadas. Utiliza com habilidade as teclas de atalho, planilhas eletrônicas, editores de texto e, principalmente, a internet. Essa habilidade me encanta profundamente. Perceber como ele se apropria dessas tecnologias e torna o seu cotidiano mais expressivo, mas rico em termos de pesquisa e comunicação, faz-me vislumbrar um horizonte amplo para os estudantes cegos. Daniel costuma acompanhar algumas aulas utilizando o seu *notebook*. Nele, digita observações quando tem a intenção de guardar informações em textos corridos do Word. Sempre estimulei-o que fizesse assim, pois acredito que escrever no Word é um trabalho bem menos penoso que escrever em Braille. Sem contar que é bem mais fácil, na minha opinião, encontrar textos guardados no *notebook* que em cadernos escritos em Braille. Essa opinião, apesar de minha, é compartilhada também por Daniel.

Neste trabalho, procurei analisar quais as possíveis contribuições que a utilização de materiais manipuláveis combinados com a utilização do computador pode possibilitar à apropriação do conceito de função derivada para um aluno cego. Nesse sentido, procurei olhar os processos de apropriação. As evidências obtidas através de palavras e gestos delineiam um caminho. Notadamente podemos ressaltar que, tal como descrito por Bogdan e Biklen (1994), os processos foram muito mais significativos que resultados ou produtos. Pude notar como ele passou a representar os gráficos e utilizar-se de certos termos e rótulos e como algumas dessas noções passaram a fazer parte do seu senso comum. Ressalto ainda a importância da construção. Existem alguns materiais disponíveis no mercado, contudo guardam algumas limitações como qualquer material. Quando partimos para a representação de, por exemplo, pontos decimais no plano cartesiano, tais materiais deixam de ser úteis. Contudo, com o auxílio de outros materiais de baixo custo, é fácil substituí-los. Pondero que as limitações são geralmente nossas e, por isso, compartilhar nossas dificuldades com o cego algumas vezes nos leva à surpresa das soluções que eles nos apresentam. Resgatando a fala de Fino (2001), do capítulo 4, considerando uma ZDP, ele ressalta que a função do professor implica em assistir o aluno, proporcionando-lhe apoio e recursos, de modo que ele seja capaz de aplicar um nível de conhecimento mais elevado do que lhe seria possível sem ajuda. Ressalta ainda que não é a instrução, mas a assistência que permite ao aprendiz atuar no limite do seu potencial. Embora esse trabalho tenha sido desenvolvido no âmbito acadêmico e aborde temas do Ensino Superior, de sua prática docente, estou convencido da importância da reflexão que ele proporcionou de minha própria prática docente. Hoje, tenho a plena convicção de que a prática docente é muito mais que transferir conhecimento, mas, acima de tudo, criar as condições necessárias para que cada um, dentro de suas particularidades e necessidades, possa participar do processo de construção do seu próprio conhecimento. Nas palavras de Freire (2007), devemos, enquanto seres históricos, inseridos num permanente movimento de procura, fazer e refazer constantemente o nosso saber. Ao fazer e refazer o nosso próprio saber, contribuímos para o fazer e refazer dos saberes dos nossos semelhantes. Portanto, estou convicto de que a ação, o primeiro passo, deve ser, antes, o nosso.

REFERÊNCIAS

ANACLETO, G.M.C. **Uma Investigação Sobre a Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. 2007.195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP, São Paulo, 2007.

ARAÚJO, J.L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática**: As discussões dos alunos. 2002. 180 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, São Paulo, 2002.

BALDINO, R.R. **Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro?.** Temas & Debates, Blumenau, ano VIII, n. 8: O Ensino de Cálculo, p. 5-21, SBEM, 1995.

BAMPI, L.N.S; GUILHEM, D.; ALVES,E.D. Modelo Social: uma nova abordagem para o tema deficiência. **Revista Latino-Americana de Enfermagem**, Ribeirão Preto, v. 18, n. 4, jul./ago. 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rlae/v18n4/pt_22.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2014.

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática**: Concepções e Experiências de Futuros Professores. 2001. 253 f.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e ciências exatas,UNESP, Rio Claro,2001.

BARBOSA, S.M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, São Paulo, 2009.

BARUFI, M.C.B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 195 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1999.

BATISTA, C.G. Formação de conceitos em crianças cegas: questões teóricas e implicações educacionais. **Revista: Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Universidade de Brasília, v. 21, n. 1, p. 7-15, jan./abr. 2005.

BECKER, Howard S. Sobre Metodologia. In: BECKER, Howard S. **Métodos de pesquisa em ciências sociais**. Tradução de Marco Estevão e Renato Aguiar. São Paulo: Editora Hucitec, 1993. p. 17-45.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez; S. B. Santos; T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994. (Coleção Ciências da Educação, 12).

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M.C. O computador é a solução: mas qual é o problema? In: SEVERINO, A.J.; FAZENDA, I.C.A. (Orgs.). **Formação Docente**: Rupturas e possibilidades. São Paulo: Papirus Editora, 2002. p.141-162.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORGES, J.A.S. **Do Braille ao DOSVOX –** diferenças na vida dos cegos brasileiros. 2009. 327 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Programa de Engenharia da Computação, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 2009.

BOYER, Carl B. **The Concepts of the Calculus**, A critical and historical Discussion of the Derivatives and the Integral. New York: Dover Publications Inc., 1959.

BOYER, Carl B. **A History of Mathematics**. New York: Wiley international edition, 1968.

BRASIL. Congresso. Senado**. Constituição Federal** (1988). Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/ConstituicaoCompilado.htm>. Acesso em: 22 jan. 2014.

_______. **Lei nº 7.853 de 24 de Outubro de 1989**. Dispõe sobre o apoio às pessoas portadoras de deficiência, sua integração social, sobre a Coordenadoria Nacional para Integração da Pessoa Portadora de Deficiência – Corde, institui a tutela jurisdicional de interesses coletivos ou difusos dessas pessoas, disciplina a atuação do Ministério Público, define crimes, e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l7853.htm>. Acesso em: 22 jan. 2014.

_______. **Lei nº. 10.098 de 19 de Dezembro de 2000**. Estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção da acessibilidade das pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade reduzida, e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l10098.htm>. Acesso em: 22 jan. 2014.

_______. **Lei nº 10.172 de 9 de Janeiro de 2001**. Aprova o Plano Nacional de Educação e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/leis_2001/l10172.htm>. Acesso em: 22 jan. 2014.

_______. **Lei nº 9.394 de 20 de Dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 22 jan. 2014

BORBA, M.C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: 27ª Reunião Anual da ANPED, 2004, Caxambu. **Anais**... Caxambu: 2004. p. 1-18. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 6 jan. 2014.

CALORE, Aira Casagrande de Oliveira. **As "ticas" de "matema" de cegos sob o vies institucional**: da integração à inclusão. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2008.

CARVALHO, R.E. **Escola Inclusiva**: a reorganização do trabalho pedagógico. Porto Alegre: Mediação, 2008.

CAVASOTTO, M. **Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo**: O que os erros dos alunos podem informar. 2010. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, PUCRS, Porto Alegre, 2010.

CAVASOTTO, M.; PORTANOVA, R. **Reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral**. In: III Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação, 2008, Porto Alegre. Ciência e conhecimento na cultura da paz. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2008. P.1-6.

COLE, M; SCRIBER, S. **Vygostky:** A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes,1984.

CONGRESSO INTERNACIONAL "SOCIEDADE INCLUSIVA". **Declaração Internacional de Montreal sobre Inclusão**. Montreal, Canadá, 5 de Junho de 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/dec_inclu.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2014.

CONGRESSO EUROPEU SOBRE DEFICIÊNCIA. **Declaração de Madri**. Madri, 2002. Disponível em: <http://www.ampid.org.br/ampid/Docs_PD/Convencoes_ONU_PD.php#declamadri>. Acesso em: 22 jan. 2014.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. 16. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2008.

DANIELS, Harry. **Vygotsky e a Pedagogia**. São Paulo: Loyola,2003.

DPI. Declaração de Sapporo. In: **6ª Assembleia Mundial da Disabled Peoples International. Sapporo**. Japão, 2002. Disponível em: <www.ampid.org.br/ampid/Docs_PD/Convencoes_ONU_PD.php#declasapporo> Acesso em: 22 jan. 2014.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 25-41.

FERNANDES, S.H.A.A. **Uma Análise Vygostkiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual**. 2004. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – FAE, PUC-SP, SP, 2004.

_______. **Das experiências sensoriais aos conhecimentos matemáticos**: uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com visão subnormal numa escola inclusiva. 2008.274f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, PUC-SP, São Paulo, 2008.

FERNANDES, S.H.A.A.; HEALY, L. **Sistemas mediadores na construção de significados por aprendizes sem acuidade visual**. In: 27º Reunião Anual da ANPEd, 2004, Caxambu, Anais da 27º Reunião Anual da ANPEd,2004,v.1,p.1-16.

Disponível em: <http://27reuniao.anped.org.br/gt15/t1512.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2014.

FINO, C.N. Vigotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas. **Revista Portuguesa de Educação**, Madeira, v. 14, n. 2, p. 273-291. Mar.2001. Disponível em: <http://www3.uma.pt/carlosfino/publicacoes/11.pdf>. Acesso em: 1 ago. 2014

FLORES, C. R. Pesquisa em visualização na Educação Matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 31-45, set. 2012.

FONTANIVE, M.F. **A mão e o número**: sobre a possibilidade do exercício da intuição nas interfaces tridimensionais. 2005. 134 f. (Mestrado em História, Teoria e Crítica da Arte) – Programa de Pós-Graduação em artes visuais. Instituto de Artes, Porto Alegre, UFRGS, 2005.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 36. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2007.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. 277 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

GRAVINA, M. A., SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Informática na Educação: Teoria e Prática**, Porto Alegre, UFRGS, n. 1, v. 1, 1999.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. Relações entre Atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. **Educar em revista**, Curitiba , n.1, 2011 .p.227-243. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602011000400015&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 12 jan. 2014.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. São Paulo: Objetiva,2013.

LEITÃO, José Carlos; FERNANDES, Cleonice Terezinha. Inclusão escolar de sujeitos com deficiência visual na rede regular de ensino brasileira: revisão sistemática. **Linha Crítica**, Brasília, DF, v. 17, n. 33, p. 273-289, maio/ago. 2011.

LEROI.A.G. **O gesto e a palavra**: técnica e linguagem. Lisboa: Editora: Edições 70, 1990

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LURIA. A.R. **A construção da mente**. São Paulo: Ícone, 1992

MACHADO, R.M. **A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. 2008. 287 f. (Doutorado em Educação) – Unicamp, São Paulo, 2008.

MACHADO PIMENTA, C. M. F. **Inclusão de Estudantes com necessidades especiais no ensino**: experiências docentes no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista-MG. Dissertação (Mestrado em Educação Agrícola) – Programa de Pós Gradução em Educaçao Agrícola, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2012.

MALTA, I. Linguagem, leitura e Matemática. In: CURY, H.N. **Disciplinas Matemática em Cursos Superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPURS, 2004. p. 41-62.

MARCELLY, L. **As histórias em quadrinhos adaptadas como recurso para ensinar Matemática para alunos cegos e videntes**. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2010.

MARTÍN, Manuel Bueno; RAMIREZ, Francisco Ruiz. Visão Subnormal. In: MARTÍN, Manuel Bueno; BUENO, Salvador Toro (Orgs.). **Deficiência Visual**: Aspectos Psicoevolutivos e Educativos. São Paulo: Santos, 2003. p. 27-40.

MATOS, A; PONTE,J.P. O Estudo de Relações Funcionais e o Desenvolvimento do Conceito de Variável em Alunos do 8º ano. **RELIME**, Distrito Federal, México, v. 11, n. 2, p. 195-231, out. 2008. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/08-Matos-Ponte%20(RELIME).pdf>. Acesso em: 16 jan. 2014.

MAZZOTTA, M.J.S. **Educação especial**: história e políticas públicas. São Paulo: Cortez,1996.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente**: Imagem Conceitual e Definição Conceitual. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação,PUC-SP, São Paulo, 2003.

MORAES, F.C.C. **Educação física escolar e o aluno com deficiência**: um estudo da prática pedagógica de professores. 2010. 210 f. (Doutorado em Educação) – UFMS, Mato Grosso do Sul, 2010.

MOVIMENTO DE VIDA INDEPENDENTE E DOS DIREITOS DAS PESSOAS PORTADORAS DE DEFICIÊNCIA. Declaração de Washington, 1999. In: **Encontro Perspectivas Globais em Vida Independente para o Próximo Milênio**, Washington, DC, USA, 1999. Disponível em: <http://www.ampid.org.br/ampid/Docs_PD/Convencoes_ONU_PD.php#declawashington>. Acesso em: 6 jan. 2014.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. 9. ed. Campinas: Papirus, 2009.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte – MG: SBEM, 2007.

NUERNBERG, A.H. Contribuições de Vigostski para a educação de pessoas com deficiência visual. **Psicologia em Estudo**, Maringá, v. 13, n. 2, p. 307-316, abr./jun. 2008.

OCHAITA, Esperanza; ESPINOZA, Maria A. Desarrollo y Educación de los ninõs ciegos y deficientes visuales: áreas prioritárias de intervención. **Psikhe**, Madrid, v. 4, n. 2, p. 153-165, out. 1995. Disponível em: <http://www.psykhe.cl/index.php/psykhe/article/viewFile/80/80>. Acesso em: 4 out. 2014.

OCHAITA, Esperanza; ROSA, Alberto. Percepção, ação e conhecimento nas crianças cegas. In: COLL, César; PALACIOS, Jesús; MARCHESI, Álvaro (Orgs.). **Desenvolvimento psicológico e educação**: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. p.183-197. v. 3.

OEA. **Convenção da Guatemala**. Guatemala, 28 de maio de 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/guatemala.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2014.

OLIVEIRA, M.K. **Vygotsky**: Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 2006.

ONU. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**. Paris, França, 10 dez. 1948. Disponível em: <http://www.un.org/es/documents/udhr/>. Acesso em: 22 jan. 2014.

_______.**Declaração dos Direitos das Pessoas Deficientes**. Nova York, EUA, 9 dez. 1975. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/dec_def.pdf/>. Acesso em: 22 jan. 2014.

_______. **Declaração de Salamanca. Princípios, Política e Prática em Educação Especial**. Salamanca, Espanha, 10 jun. 1994. Disponível em: <http://www.ampid.org.br/ampid/Docs_PD/Convencoes_ONU_PD.php#declasalamanca>. Acesso em: 22 jan. 2014.

PEREIRA, M.D. Aprendizagem em Matemática: Concepção, proposta e experiência em um curso de Pedagogia. In: XVI ENDIPE, 2012, FE. UNICAMP, Campinas, SP. **Anais eletrônicos**.... 2012. Disponível em: <http://www.infoteca.inf.br/endipe/smarty/templates/arquivos_template/upload_arquivos/acervo/docs/1818c.pdf>. Acesso em: 26 jul. 2014.

PEREIRA, Maíra Kelly da Silva. **Ensino de Geometria para alunos com deficiência visual**: Análise de uma proposta de ensino envolvendo o uso de materiais manipulativos e expressão oral e escrita. 2012. 186 f. Dissertação

(Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, UFOP, Minas Gerais, 2012.

PIAGET, J. **O Nascimento da inteligência na criança**. Tradução de Maria Luísa Lima. 9º edição Francesa. Portugal: Editora Don Quixote, 1986.

PICONEZ, Stela Conceição Bertholo; NAKASHIMA, Rosária Helena Ruiz; SOUZA, Régis Luiz Lima de. Consumo das tecnologias pelos estudantes do Ensino Fundamental: potencialidade das técnicas qualitativas de pesquisa. In: **Olhar de professor**. Ponta Grossa, 2010. p. 279-295. Disponível em: <www.uepg.br/olhardeprofessor>. Acesso em: 10 jan. 2014.

PINHEIRO, Eliana Moreira; KAKEHASHI, Tereza Yoshiko; ANGELO, Margareth. O uso de filmagem em pesquisas qualitativas. **Revista Latino-Americana de Enfermagem**, Ribeirão Preto, v. 13, n. 5, oct. 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-11692005000500016&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 10 jan. 2014.

PRESTES,Z. R. **Quando não é quase a mesma coisa** – Análise de traduções de Lev Semionovitch Vigotski no Brasil – repercussões no campo educacional. 2010. 295 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, UnB, Brasília, 2010.

PRIMEIRA Conferência da Rede Ibero-Americana de Organizações não Governamentais de Pessoas com Deficiência e suas Famílias. **Declaração de Caracas**. Caracas, 2002. Disponível em: <www.ampid.org.br/ampid/Docs_PD/Convencoes_ONU_PD.php#declacaracas>. Acesso em: 22 jan. 2014.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2001.

REZENDE, W.M. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 2003.

ROCHA, M.D. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina de cálculo diferencial e integral I**: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre visualização e experimentação. 2010. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, UFOP, Minas Gerais, 2010.

RODRIGUES, D. A. Inclusão na Universidade: Limites e possibilidades da construção de uma universidade inclusiva. **Revista de Educação Especial da UFSM**, Santa Maria, n. 23,p.1-5,2004. Disponível em: <http://cascavel.cpd.ufsm.br/revistas/ojs-2.2.2/index.php/educacaoespecial/article/view/4951/2980>. Acesso em: 5 maio 2013.

RODRIGUES, F.S. **O Uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) por Alunos Cegos em Escola Pública Municipal de Fortaleza**. 2010. 204 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação,UFC, Fortaleza, 2010.

SANTOS, A. R.; BIANCHINI, W. **Aprendendo Cálculo com Maple**: cálculo de uma variável. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

SANTOS, Mônica Pereira dos. O papel do ensino superior na proposta de uma educação inclusiva. **Revista Movimento** – Revista da Faculdade de Educação da UFF, n. 7, p. 78-91, maio 2003. Disponível em: <www.lapeade.com.br/publicacoes/artigos/Paper%20UFF.pdf>. Acesso em: 2 jun. 2013.

SARDELICH, Maria Emília. Leitura de imagens, cultura visual e prática educativa. **Cadernos de Pesquisas**, São Paulo, v. 36, n. 128,p.451-472,ago, 2006.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. **Research Design in Mathematics and Science Education**. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307. Disponível em: <http://pat-thompson.net/PDFversions/2000TchExp.pdf>. Acesso em: 2 Abr. 2014

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. I.

SILVA, A. E. R. **Modelagem matemática e alunos em estado de dependência na disciplina Cálculo I**. 2010a. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, IEMCI, UFPA, Belém (PA). 2010a.

SILVA, A. M. **Educação especial e inclusão escolar**: história e fundamentos. Curitiba: Ibpex, 2010b.

TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht:Kluwer, 1991.

TORRES, Elisabeth Fátima. **As perspectivas de acesso ao Ensino Superior de Jovens e Adultos da Educação Especial**. 2002. 197f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

VAN DER VEER, R.; VALSINER, J. **Vygotsky –** Uma síntese. Tradução de C.C. Bartalotti. 4. ed. São Paulo: Loyola, 1996.

VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1999. 380 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

VIGOTSKY, L.S. El niño cego. In: **Fundamentos de Defectologia**. Ministerio de Educación de Cuba; Cuba: Editora Pueblo e Educación, 1989. p. 74-87 (Obras completas – Tomo V). Disponível em: <http://deficienciavisual3.com.sapo.pt/txt-El_nino_ciego-Vigotski.htm>. Acesso em: 3 jun. 2013.

VYGOSTSKY, L. S. Los problemas fundamentales de la defectologia contemporânea. En: VYGOTSKY, L. S. **Obras Escogidas V**: Fundamentos de defectologia. Madrid: Visor, 1997. p. 11-40.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. Tradução de Jefferson Luiz Camargo. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998

WROBEL, J. S.; CARNEIRO, T. C. J.; ZEFERINO, M. V. C. Ensino de cálculo diferencial e integral na última década do Enem: uma análise usando o Alceste. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais**... Brasília: SBEM, 2013.

ZULATTO, R.B.A. **Professores de Matemática que Utilizam Softwares de Geometria Dinâmica**: Suas Características e Perspectivas. 2002. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.

ANEXOS

ANEXO A – Atividades utilizadas no experimento de ensino

O gráfico de uma função f, já o sabemos, é definido como sendo, no plano cartesiano, o conjunto de todos os pontos que têm coordenadas (x,f(x)). Assim, se a função f é definida pela fórmula (regra) $f(x)=x^2$,

Tabela 1 – Alguns pontos da função definida pela fórmula $f(x)=x^2$

Ponto	(x,x^2)	(x,y)
A	$(0,0^2)$	(0,0)
B	$(\frac{1}{2},(\frac{1}{2})^2)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
C	$(1,1^2)$	(1,1)
D	$(2,2^2)$	(2,4)
E	$(-1,(-1)^2)$	(-1,1)
F	$(-2,(-2)^2)$	(-2,4)

então os pontos pertencem ao gráfico da função.

1) Utilizando a mesma escala da Figura II:

a) Localize os pontos listados na Tabela 1.

b) Compute e localize mais alguns pontos para o gráfico da função definida pela fórmula $f(x)= x^2$.

c) Desenhe uma curva suave (sem ângulos) que ligue os pontos que você localizou.

d) Compare com a figura II.

A figura II é exatamente o gráfico da função f definida por $f(x)= x^2$.

2) Na Figura IV, desenhe as retas tangentes à curva em cada um dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, indicados e, depois de fazer medições convenientes, compute a inclinação de cada reta.

3) A inclinação de cada tangente é: (para o cálculo da inclinação da reta tangente em cada ponto dado, você deve utilizar dois pontos distintos da própria malha pelos quais a tangente traçada passa e, utilizando uma calculadora, determinar a sua inclinação. Em seguida, colocar os valores nos locais abaixo).

3.1. P_1=____

3.2. P_2=____

3.3. P_3=____

3.4. P_4=____

Confira o resultado obtido com o do seu colega de dupla. Como as medidas de inclinação dependem do desenho de cada um, as medidas poderão ser aproximadas.

4) Considere alguns pontos na curva de seno da figura IV para assegurar-se de que ela é de fato um gráfico da função seno. Use máquina de calcular, mas note que os ângulos devem ser medidos em radianos. Certifique-se de que sua calculadora está com as medidas de ângulos no *modo rad*. Preencha os pontos que você utilizou na Tabela 2.

Tabela 2 – Alguns pontos da função definida pela fórmula f(x)=senx

Ponto	(x,senx)
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	

Para valores negativos de x, necessitamos da relação sen(-x) = -senx. Para valores de x acima do domínio indicado na tabela ($0 \leq x \leq \pi/2$), necessitamos de outras relações, como, por exemplo, sen(π-x) = senx para arcos do 2º quadrante, sen(x-π) =

-senx para arcos do 3º quadrante e sen(2π-x) = -senx para arcos do 4º quadrante. Assim, por exemplo, sen2=(3,14-2) = sen(1,14).

5) Baseando-se em valores tabulados, verifique que a figura V é o gráfico da função cosseno. Para os valores negativos use cos(-x) = cosx e para os valores maiores que o domínio na tabela ($0 \leq x \leq \pi/2$) utilize cosx = -cos(π-x) ou cosx = cos(2π-x). Utillize a Tabela 3 para preencher com os valores de ângulos que você escolheu para desenhar o gráfico da função cosx.

Tabela 3 – Alguns pontos da função definida pela fórmula f(x) = cosx

Ponto	(x,cosx)
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	

6) Baseando-se em valores tabulados, verifique que a figura VI é o gráfico da função logaritmo natural. Desde que a função lnx é definida somente quando x é positivo, não há pontos do gráfico sobre o eixo y ou à sua esquerda. Utilize a Tabela 4 para preencher com os valores escolhidos por você para esboçar o gráfico.

Tabela 4 – Alguns pontos da função definida pela fórmula f(x) = lnx

Ponto	(x,lnx)
A	
B	
C	
D	
E	

F	
G	
H	
I	
J	

7) Baseando-se em valores tabulados, verifique que a figura VII é o gráfico da função exponencial e^x. Utilize a Tabela 5 para preencher com os valores escolhidos por você para esboçar o gráfico.

Tabela 5 – alguns pontos da função definida pela fórmula $f(x)= e^x$

Ponto	(x, e^x)
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	

8) Baseando-se em valores tabulados, verifique que a figura III é o gráfico da função exponencial x^3. Utilize a Tabela 6 para preencher com os valores escolhidos por você para esboçar o gráfico. Para valores negativos, note que $(-x)^3=-(x)^3$.

Tabela 6 – Alguns pontos da função definida pela fórmula $f(x)= x^3$.

Ponto	(x, x^3)
A	
B	

C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	

9) Baseando-se em valores tabulados, verifique que a figura VII é o gráfico da função recíproca $\frac{1}{x}$. Utilize a Tabela 7 para preencher com os valores escolhidos por você para esboçar o gráfico. Para valores negativos, note que $\frac{1}{-x}$=- $\frac{1}{x}$. Note que, desde que $\frac{1}{0}$ não é um número real, 0 não pertence ao domínio da função.

Tabela 7 – Alguns pontos da função definida pela fórmula f(x)= $\frac{1}{x}$

Ponto	(x, $\frac{1}{x}$)
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	

10) Devemos fazer a distinção entre o número 2 e a função constante 2, isto é, a função f definida pela fórmula f(x)=2. Aqui temos f(0)=2, f(1)=2, f(-2)=2. Note que o gráfico da função constante é uma reta horizontal. A função f(x)=x é chamada função identidade. Assim, g(1)=1, g(0)=0, g(-3)=-3. O gráfico da função é uma reta que passa pela origem e tem 45º (ou π/4) como ângulo de inclinação.

11) Para as atividades seguintes (de a até g), leve em consideração o gráfico da função seno, figura IV.

a) Escreva as coordenadas do ponto p_1 como um par ordenado de números reais.

b) Desenhe a reta tangente ao gráfico no ponto p_1 e encontre a sua inclinação.

c) Escreva um par ordenado de números reais tal que a primeira coordenada seja a abscissa do ponto p_1 e a segunda coordenada seja a inclinação da reta tangente à curva no ponto p_1.

d) Escreva um par ordenado de números reais tal que a primeira coordenada seja a abscissa do ponto p_1 e a segunda coordenada seja a inclinação da reta tangente à curva no ponto p_2.

e) Siga estas instruções e complete a tabela para os pontos descritos.

Ponto	(x_P,inclinação de P)
P_1	
P_2	
P_3	
P_4	
P_5	
P_6	
P_7	
P_8	
P_9	

f) Num sistema de coordenadas, preparado com a mesma escala da figura IV, coloque os pontos (pares ordenados de números reais) obtidos no quadro do item e. Ligue os pontos por uma curva suave e uniforme. Essa curva encontrada é a curva das inclinações da função seno.

g) Compare esta curva com as figuras de I a VII. O que podemos observar? Escreva abaixo.

____

____

Em geral, a curva de inclinações de uma função é o gráfico de outra função chamada "função derivada" da primeira função. Designamos a derivada de uma função pelo símbolo $D_x f$.

Indicaremos que $D_x \text{sen}x = \cos x$. O estudante deve compreender que fizemos apenas a apresentação de um argumento ingênuo e intuitivo de que a curva de inclinação da função seno é o gráfico da função cosseno. Ela não é uma prova desse resultado, mas apenas uma constatação. Essa é apenas uma apresentação geométrica do conceito de derivada.

12) A partir da figura V, escreva um par ordenado de números reais tal que a primeira coordenada seja a abscissa do ponto p_1 e a segunda coordenada seja a inclinação da reta tangente à curva no ponto p_1. Siga essas instruções e complete a tabela para os pontos descritos.

Ponto	(x_P,inclinação de P)
P_1	
P_2	
P_3	
P_4	
P_5	
P_6	
P_7	
P_8	
P_9	

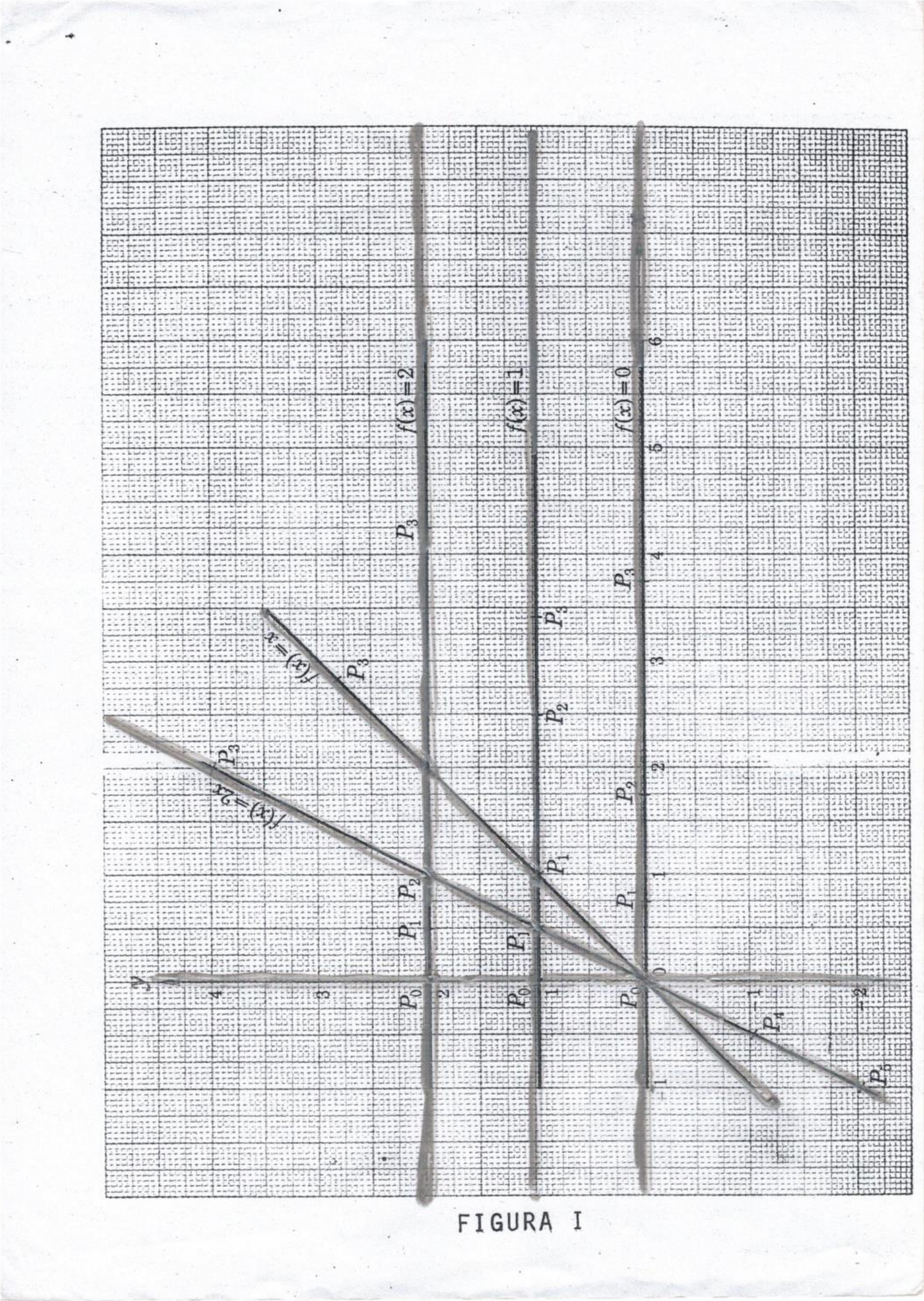
Num segundo sistema de coordenadas, preparado com a mesma escala da figura V, coloque os pontos (pares ordenados de números reais) obtidos no quadro do item anterior e, então, ligue-os por uma curva suave e uniforme. Finalmente, compare essa curva de inclinação com as curvas das figuras de I a VII. O que você notou? Escreva abaixo.

____

____

A curva de inclinações está relacionada com a curva da figura IV. Na verdade, é a reflexão da curva do seno em relação ao eixo dos x e é, portanto, o gráfico do negativo dessa função. Simbolicamente, escrevemos isso como $D_x\cos x = -\operatorname{sen}x$.

ANEXO B – Figura I – Realçado com cola alto-relevo



ANEXO C – Figura II – Realçado com cola alto-relevo

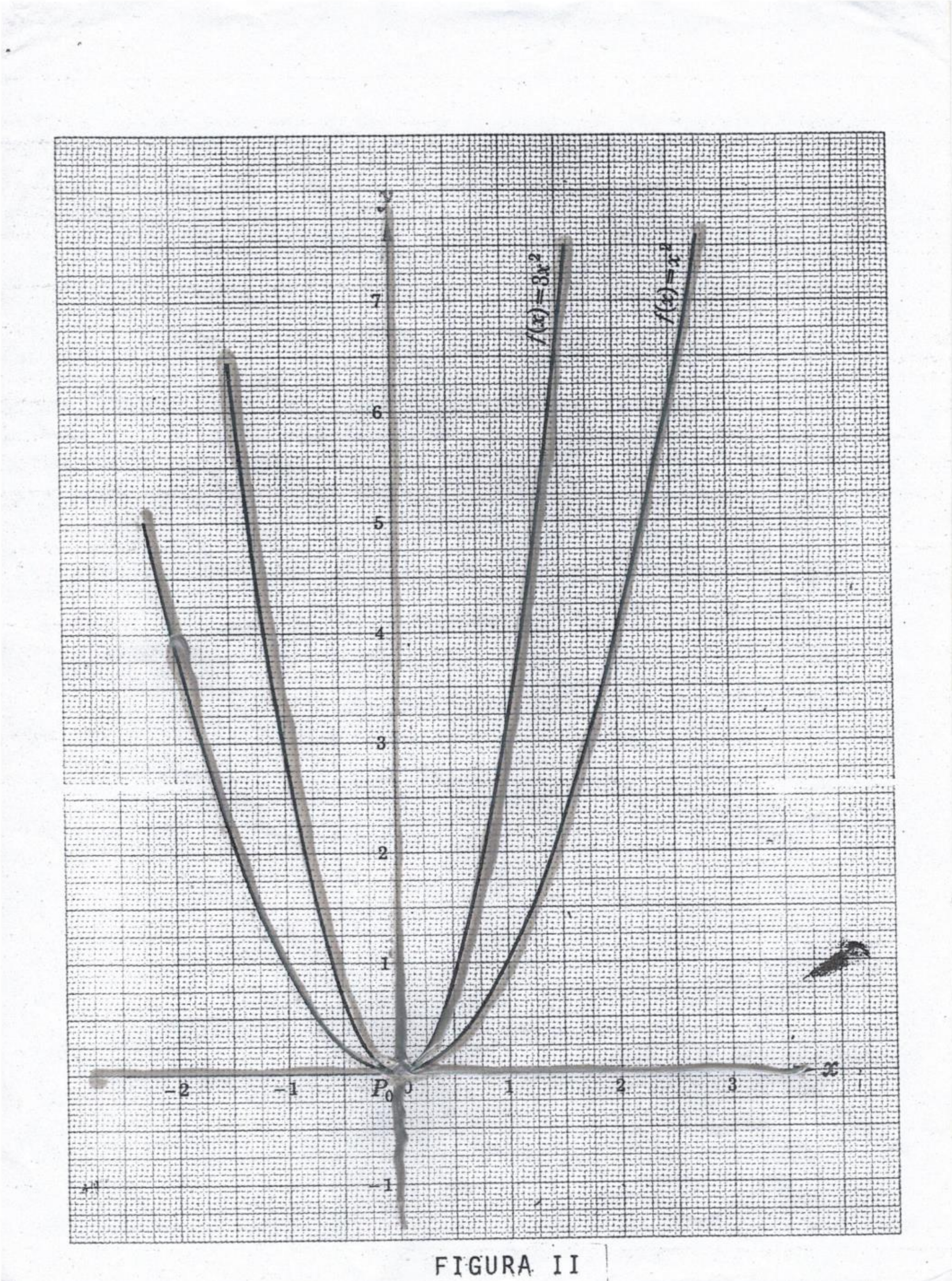
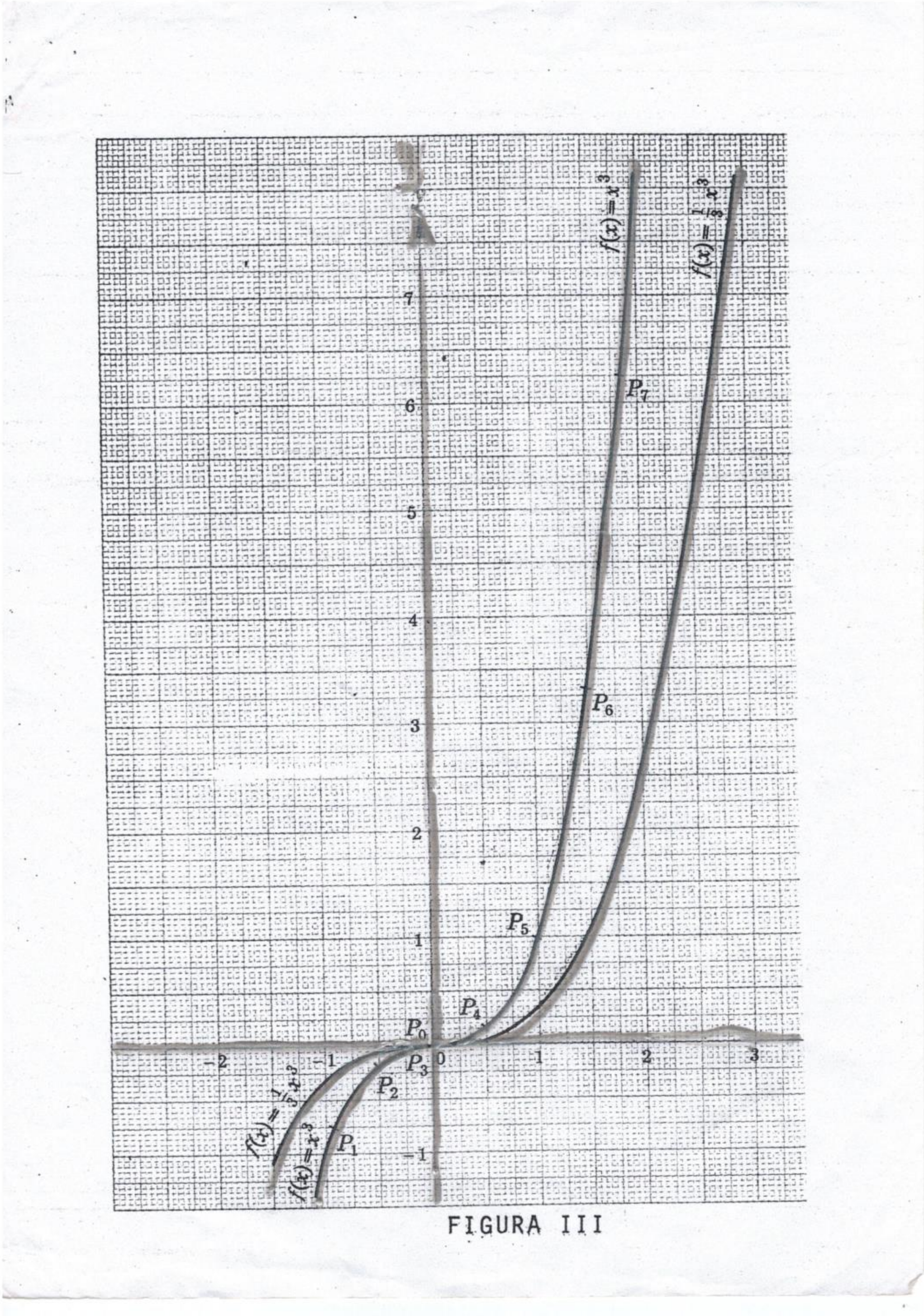
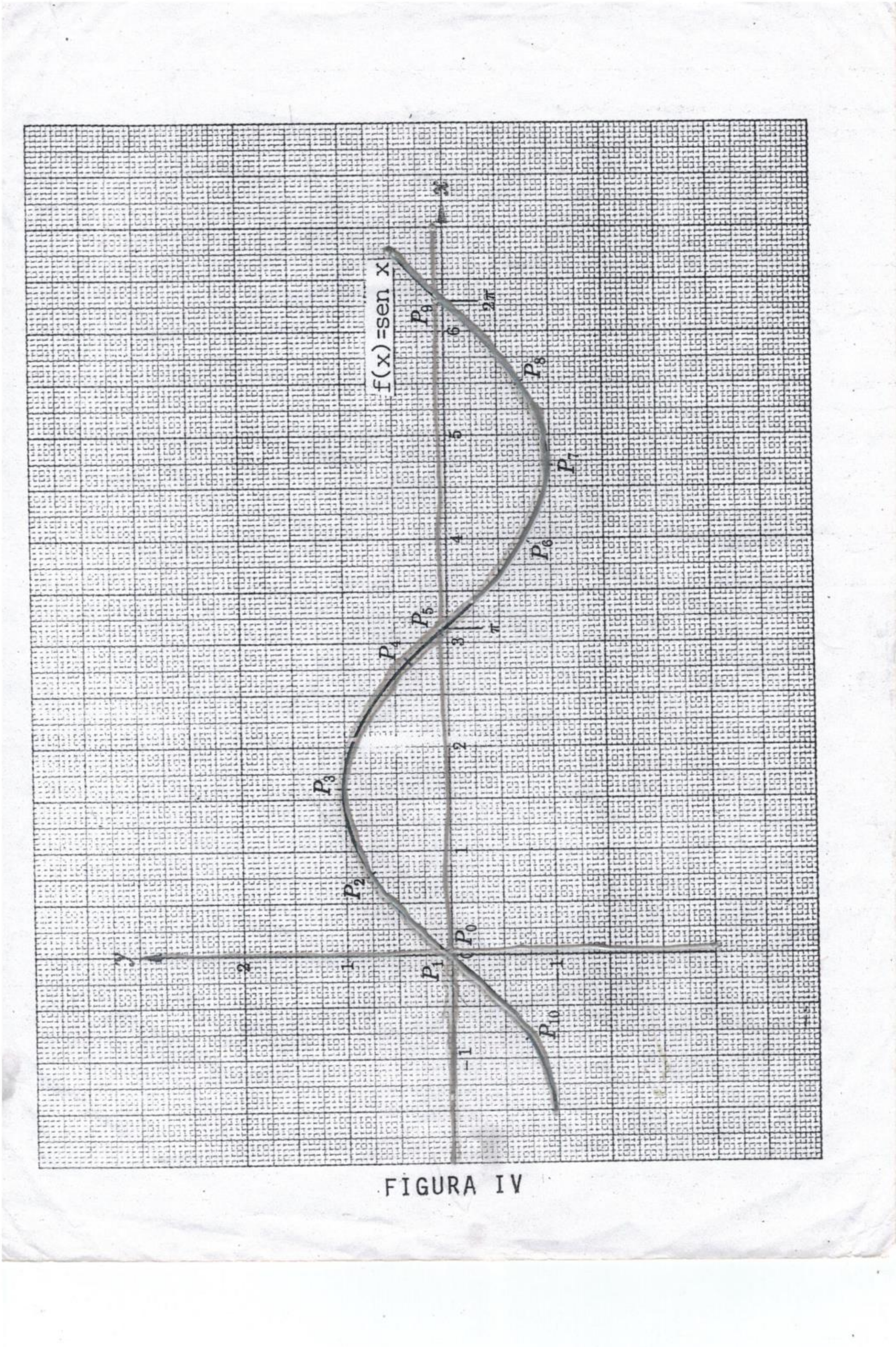


FIGURA II

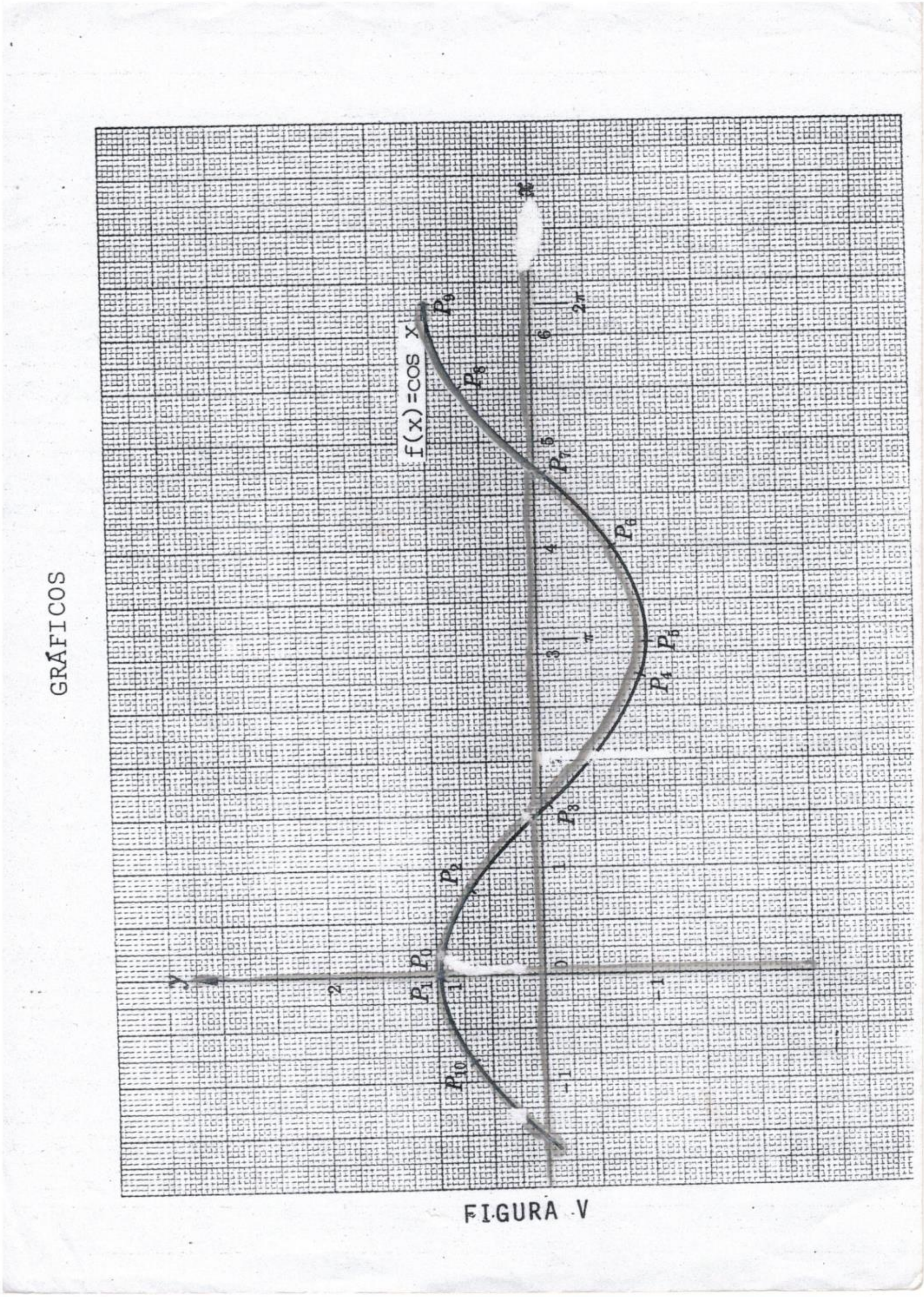
ANEXO D – Figura III – Realçado com cola alto-relevo



ANEXO E – Figura IV – Realçado com cola alto-relevo



ANEXO F – Figura V – Realçado com cola alto-relevo



ANEXO G – Figura VI – Realçado com cola alto-relevo

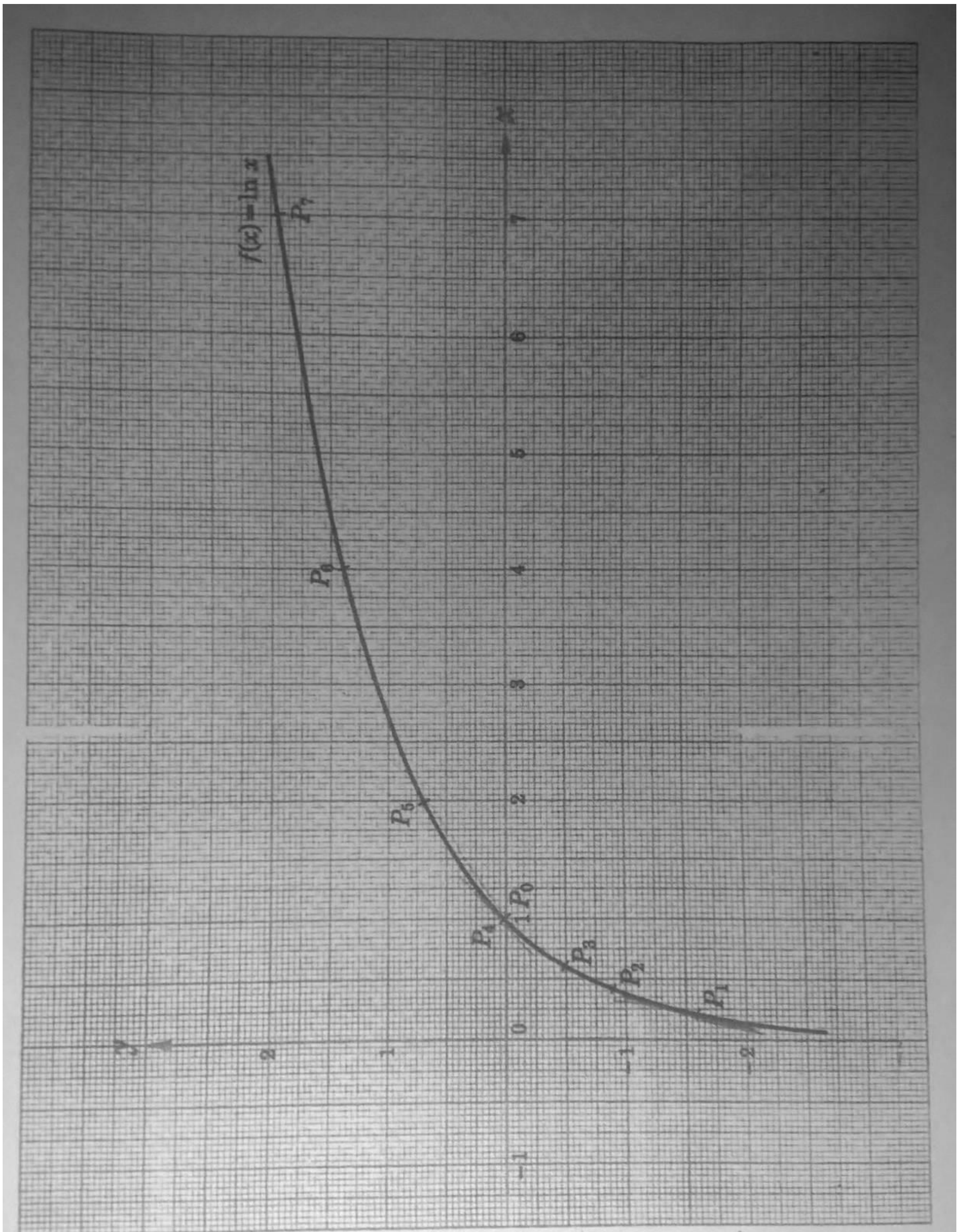


FIGURA VI

ANEXO H – Figura VII – Realçado com cola alto-relevo

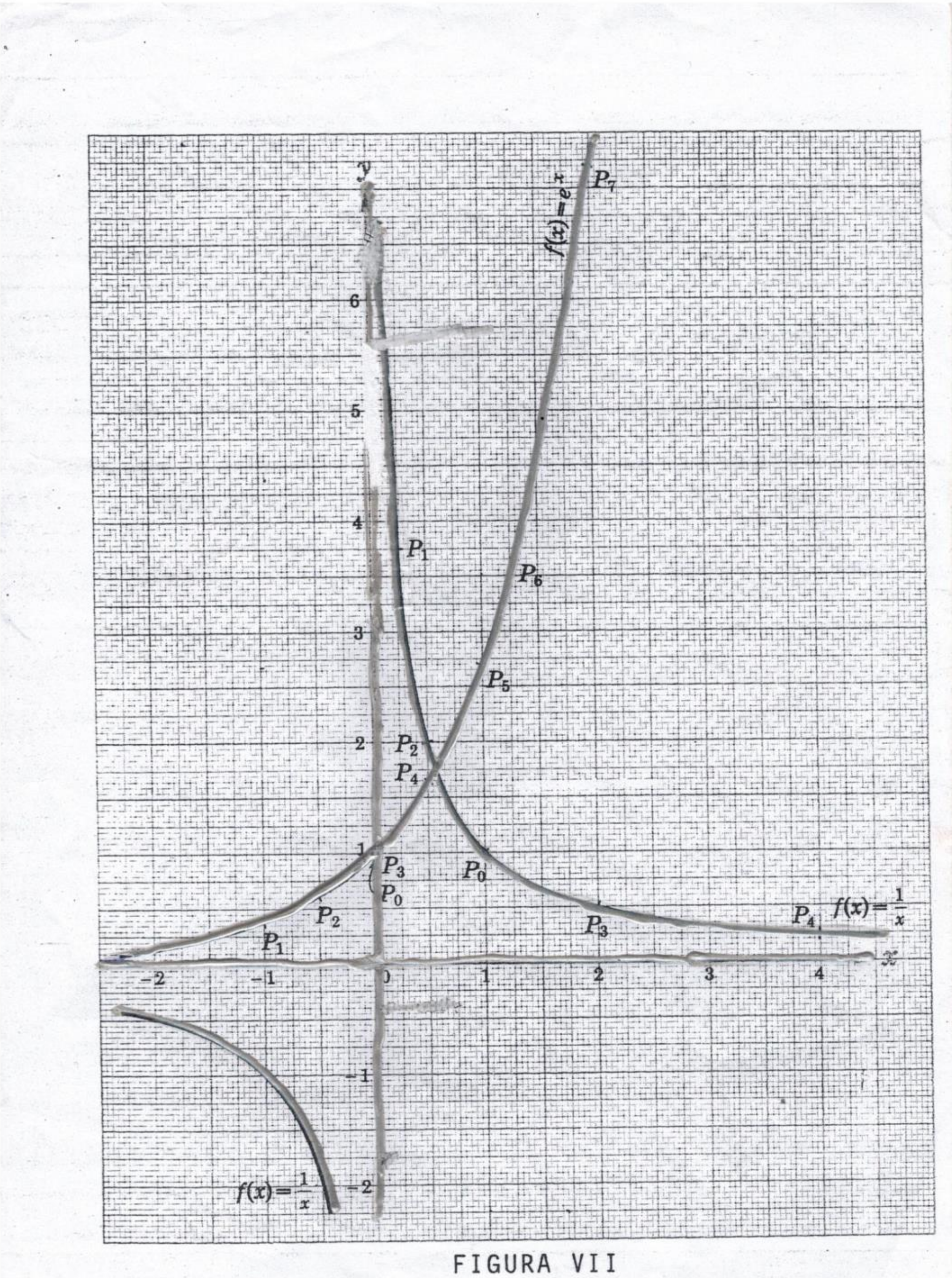


FIGURA VII