

**CONCEITOS ESTATÍSTICOS NO  
DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIAS  
INTERDISCIPLINARES DE ENSINO**

**GERALDINO MOURA DOS SANTOS**

**2008**

**GERALDINO MOURA DOS SANTOS**

**CONCEITOS ESTATÍSTICOS NO DESENVOLVIMENTO DE  
METODOLOGIAS INTERDISCIPLINARES DE ENSINO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de “Mestre”.

Orientador  
Marcelo Silva de Oliveira

LAVRAS  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2008

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca Central da UFLA**

Santos, Geraldino Moura dos.

Conceitos estatísticos no desenvolvimento de metodologias  
interdisciplinares de ensino / Geraldino Moura dos Santos. – Lavras :  
UFLA, 2008.

168 p. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2008.

Orientador: Marcelo Silva de Oliveira.

Bibliografia.

1. Probabilidade geométrica. 2. Probabilidade freqüentista. 3.  
Distribuição de Maxwell. 4. Quincux de Galton. 5. Distribuição normal.  
6. Distribuição binomial. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.507

**GERALDINO MOURA DOS SANTOS**

**CONCEITOS ESTATÍSTICOS NO DESENVOLVIMENTO DE  
METODOLOGIAS INTERDISCIPLINARES DE ENSINO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de “Mestre”.

APROVADA em 30 de abril de 2008

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria da Glória Bastos F. Mesquita                      UFLA

Prof. Dr. Joaquim Paulo da Silva    UFLA

Prof. Dr. Eric Batista Ferreira    UFLA

Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira  
UFLA  
(Orientador)

LAVRAS  
MINAS GERAIS – BRASIL

*Dedico esta conquista:*

A DEUS,

fonte de minha vida e luz do meu destino.

Ao meu pai, JOÃO SILVA DOS SANTOS (*in memoriam*), por ter sido  
um exemplo de vida.

A minha mãe, MARIA DA CONCEIÇÃO MOURA, por suas  
constantes orações, que me ajudaram a superar os  
momentos difíceis da vida.

A minha querida esposa, SIRENE PAULA DE  
ALMEIDA SANTOS, pelo constante  
apoio, carinho e dedicação.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me iluminado e me guiado por caminhos nem sempre fáceis.

Aos meus pais, João (*in memoriam*) e Maria que, com simplicidade, carinho e amor, conseguiram criar os filhos de forma digna e honesta.

A minha esposa, Sirene, que não mediu esforços para me acompanhar, incentivar e apoiar ao longo dessa jornada.

Aos demais familiares, que torceram, rezaram e compreenderam a minha ausência em muitos momentos.

Ao professor Marcelo Silva de Oliveira e à doutoranda Verônica Yumi Kataoka, pela orientação, dedicação, paciência e amizade.

Aos membros da banca, pelas sugestões e correções.

Aos amigos Dirceu/Beatriz, Benedito/Inês, Vanderlei/Lucimara, Deodoro/Carla, Luiz/Glória, Carlos/Flávia e Davi/Nildete, pelo incentivo, apoio e amizade.

À Escola Preparatória de Cadetes do Ar, pela liberação das atividades e, principalmente, aos professores de Física da EPCAR, pela compreensão e apoio nas atividades de ensino.

Aos professores Carlos Vinícius Costa da Cruz Machado e Paulo César de Resende Andrade, pelas valiosas contribuições durante a fase preparatória para o mestrado.

Aos meus ex-professores, Lucio Vittorio Iannarella e Sebastião Rodrigues de Oliveira, pela amizade, incentivo e apoio.

À professora Carla e aos professores Lúcio e Paulo César, pela carta de apresentação, sem a qual não teria obtido esta conquista.

À professora Maria do Carmo, pela orientação inicial no curso de mestrado e por ter me encaminhado à orientação do professor Marcelo para que eu pudesse realizar este trabalho.

Aos colegas do curso de pós-graduação, pela partilha de conhecimentos e amizade, em especial à Vania.

Aos professores do DEX/UFLA, em especial, Daniel e Marcelo Cirillo, pelos ensinamentos, apoio e amizade.

Aos funcionários do DEX/UFLA, pela disponibilidade e colaboração durante o curso.

A todos, aqui não mencionados, que contribuíram para a realização deste trabalho e que torceram pela minha conquista, um especial muito obrigado.

## SUMÁRIO

RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
CAPÍTULO 1.....	1
1 INTRODUÇÃO GERAL.....	2
2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	5
CAPÍTULO 2: PROBABILIDADE GEOMÉTRICA.....	7
1 RESUMO.....	8
2 ABSTRACT.....	9
3 INTRODUÇÃO.....	10
4 MÉTODOS PARA O ENSINO E CÁLCULO DE PROBABILIDADE.....	13
4.1 Ensino de probabilidade.....	13
4.2 Probabilidade geométrica.....	17
4.3 Probabilidade freqüentista.....	24
4.4 Elo entre as duas concepções de probabilidades (freqüentista e geométrica) .....	26
5 SEQÜÊNCIAS DIDÁTICAS.....	28
5.1 Divisão de um segmento em duas partes.....	29
5.2 Problema do macarrão.....	33
5.3 Lançamento de uma moeda entre duas retas paralelas.....	38
5.4 Jogo dos discos.....	43
5.5 Problema da agulha de Buffon.....	49
5.6 Lançamento de dardos.....	55
5.7 Comentários gerais sobre as atividades.....	60
6 CONCLUSÕES.....	63
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	65
CAPÍTULO 3: QUINCUX DE GALTON.....	69
1 RESUMO.....	70

2 ABSTRACT .....	71
3 INTRODUÇÃO .....	72
4 ASPECTOS TEÓRICOS .....	74
4.1 Descrição do Quincux de Galton e notas históricas .....	74
4.2 Distribuição das esferas em relação ao número de fileiras.....	78
4.3 Distribuição das esferas em relação ao total delas .....	84
5 APLICAÇÕES PRÁTICAS .....	94
5.1 Descrição dos Quincux construídos para este trabalho.....	94
5.2 Resultados obtidos por meio do Quincux com 22 fileiras de pregos.....	97
5.3 Relato de uma experiência: aplicação do Quincux no trabalho com crianças .....	101
5.4 Programas para simulações do Quincux .....	103
6 CONCLUSÕES .....	104
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	105
CAPÍTULO 4: DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES DE MAXWELL .....	107
1 RESUMO .....	108
2 ABSTRACT .....	109
3 INTRODUÇÃO .....	110
4 ASPECTOS TEÓRICOS .....	112
4.1 Considerações iniciais.....	112
4.2 Distribuição das moléculas no Espaço – 1ª etapa.....	114
4.3 Distribuição de energias moleculares – 2ª etapa .....	118
4.4 Distribuição conjunta das componentes da velocidade – 3ª etapa: parte I .....	121
4.5 Distribuição de velocidades de Maxwell – 3ª etapa: parte II.....	126
5 RESULTADOS METODOLÓGICOS .....	132
5.1 Função característica da distribuição de Maxwell.....	132
5.2 Velocidade média ou esperança de $V$ .....	136
5.3 Esperança de $V^2$ .....	137

5.4 Desvio padrão da velocidade .....	139
5.5 Velocidade mais provável ou moda da velocidade .....	139
5 APARELHO EXPERIMENTAL.....	141
6 APLICAÇÃO PRÁTICA.....	145
6 CONCLUSÕES .....	150
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	151
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	153
ANEXOS .....	154

## RESUMO

SANTOS, Geraldino Moura dos. **Conceitos estatísticos no desenvolvimento de metodologias interdisciplinares de ensino**. 2008, 168 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG\* .

Nos últimos anos, observou-se crescente interesse em melhorar as práticas no ensino de Estatística, em decorrência, principalmente, da demanda gerada pelo progresso científico e tecnológico das diversas áreas da ciência. Por meio de um amplo espaço de trabalho interdisciplinar e da experimentação, o aluno pode conseguir ampliar seu horizonte e desenvolver sua criatividade. Este trabalho foi realizado com o objetivo geral de apresentar alguns recursos didáticos para o ensino interdisciplinar de Estatística, tanto voltado para a Educação Básica como para o Ensino Superior, a partir de sugestões encontradas na literatura de Estatística, Física e Matemática. No capítulo 2 buscou-se dar suporte teórico e didático aos professores de Matemática e Estatística na solução de problemas envolvendo o conceito de probabilidade geométrica. No capítulo 3, discutiram-se alguns aspectos teóricos, visando auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos na manipulação do Quincux de Galton e, por conseguinte, estimular sua utilização no ensino interdisciplinar de Estatística. Com o capítulo 4, o intuito foi deduzir a lei de distribuição de velocidades de Maxwell, por meio de uma abordagem puramente estatística. As simulações lúdicas e computacionais deram credibilidade aos resultados teóricos obtidos para todos os problemas relacionados à probabilidade geométrica e também aos do Quincux de Galton. No entanto, a simulação computacional forneceu melhores resultados que a lúdica. Os resultados obtidos por meio da distribuição de velocidades de Maxwell foram condizentes com os da teoria cinética dos gases. O Quincux de Galton pode ser utilizado para explicar vários fenômenos, não só na Estatística como também em outros ramos da ciência. As atividades experimentais são excelentes ferramentas para o desenvolvimento da capacidade crítica dos alunos e para torná-los membros participativos do processo de ensino.

---

\* Comitê Orientador: Marcelo Silva de Oliveira – UFLA (Orientador), Verônica Yumi Kataoka (Co-orientadora) - UFLA

## ABSTRACT

SANTOS, Geraldino Moura dos. **Statistical concepts in the development of methodologies teaching interdisciplinary**. 2008. 168 p. Dissertation (Master Program in Statistics and Agricultural Experimentation) – Federal University of Lavras, Lavras, MG\*.

In the last years, the can be observed the interests crescent in improving the practices in Statistics teaching, current mainly, of the demand of the scientific and technological progress of the several areas of the science. Through a wide space of work interdisciplinary and of the experimentation the student will get to enlarge your horizon and to develop your creativity. The general objective of this work was to present some didactic resources for the teaching interdisciplinary of Statistics, so much gone back to the Basic Education as for the higher education, starting from suggestions found in literature of Statistics, Physics and Mathematics. The purpose of the Chapter 2 went to give theoretical and didactic support to the teachers of Mathematics and Statistics in the solution of problems involving the concept of Geometric Probability. In the chapter 3, the intention was to deduce the law of distribution of speeds of Maxwell, through an approach purely statistics. In the chapter 4, some theoretical aspects were discussed, seeking auxiliary the understanding of the concepts involved in the manipulation of Quincunx, and, consequently, to stimulate your use in the teaching interdisciplinary of Statistics. The ludic and computational simulation, gave credibility to the theoretical results obtained for all the problems related to the Geometric Probability and also to the of Galton's Quincunx, however, computational simulation supplied better results than the ludic simulation. The results obtained through the distribution of speeds of Maxwell they were suitable with the one of the kinetic theory of the gases. Galton's Quincunx can be used to explain several phenomena not only in the Statistics as well as in other branches of the science. The experimental activities are excellent tools for the development of the students' critical capacity and to turn them active members of the teaching process.

---

\* Guidance Committee: Marcelo Silva de Oliveira – UFLA (Advisor), Verônica Yumi Kataoka (Co- advisor) - UFLA

## **CAPÍTULO 1**

## 1 INTRODUÇÃO GERAL

Nos últimos anos, pôde-se observar o crescente interesse em melhorar as práticas no ensino de Estatística, em decorrência, principalmente, da demanda gerada pelo progresso científico e tecnológico das diversas áreas da ciência. Isso mostra que a alfabetização estatística das pessoas se torna cada vez mais necessária para desenvolver a capacidade crítica de leitura da realidade em que ela vive. Essa alfabetização pode ser alcançada por meio do ensino interdisciplinar de Estatística, que é de extrema importância no contexto atual.

Em consonância com essas idéias, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) preconizam que o aluno deve ser capaz de “selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema”, além de “relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente” (BRASIL, 1998). Isso mostra, de forma indireta, a importância de trabalhar com Estatística e Probabilidade, desde o Ensino Fundamental.

Essas idéias são reforçadas nas propostas curriculares de alguns estados, como, por exemplo, no Currículo Básico Comum (CBC) de Matemática de Minas Gerais, editado em 2006.

Mas, umas das maiores dificuldades que se têm observado ao se trabalhar com esses temas na Educação Básica é a de que os professores de Matemática tiveram pouco ou nenhum contato com eles durante a sua formação profissional. Até mesmo no Ensino Superior, muitas vezes, a Estatística e a Probabilidade são ensinadas de forma que o aluno não consegue associar a teoria e a prática. Isso dificulta o aprendizado, fazendo com que os alunos se tornem totalmente desinteressados pelo assunto que está sendo abordado.

Assim, é importante que o professor esteja sempre voltado a desenvolver atividades que facilitem o processo de ensino. Essas atividades devem ter um caráter interdisciplinar, devido ao fato de a Estatística estar presente em vários campos da ciência e de o tratamento conjunto com outras áreas ser benéfico para ambas as partes. Porém, essa abordagem interdisciplinar deve ser regulada de forma a considerar seus níveis, os quais dependem do nível cognitivo do aluno. Por exemplo, no Ensino Fundamental, o formalismo matemático exagerado no tratamento da Estatística deve ser substituído pelo desenvolvimento do raciocínio.

O ensino da Estatística pode, então, ser melhorado por meio de um amplo espaço de trabalho interdisciplinar e da experimentação, com os quais o aluno conseguirá ampliar seu horizonte e desenvolver a criatividade. Assim, é importante que haja um processo de formação continuada dos professores que “deve, mais do que nunca, além de preocupar-se com o desenvolvimento pessoal e a construção de competências, promover a integração entre situações de vivências práticas, valorizar as novas concepções de formação, com vista a oportunizar a construção de pensamento reflexivo” (Burlandy, 2004). Segundo a mesma autora, todo processo de formação educacional deve partir de um trabalho coletivo dos professores, a fim de integrar disciplinas e saberes que possibilitem a formação de um aluno crítico e com capacidade de refletir sobre o seu desenvolvimento profissional e pessoal.

O problema de pesquisa que motivou esta dissertação consiste em como desenvolver recursos didáticos para o ensino interdisciplinar de Estatística, que possam proporcionar aos alunos uma aquisição de conhecimento menos compartimentalizado, por meio de experiências que lhe permitam fazer observações e tirar conclusões, desenvolvendo, assim, seu pensamento científico, fundamental para a sua formação.

Diante do exposto, o objetivo geral deste trabalho é apresentar alguns recursos didáticos para o ensino interdisciplinar de Estatística e de Probabilidade, tanto voltado para a Educação Básica como para o Ensino Superior, a partir de sugestões encontradas na literatura de Estatística, Física e Matemática.

No capítulo 2, buscou-se dar suporte teórico e didático aos professores de Matemática e Estatística na solução de problemas envolvendo o conceito de probabilidade geométrica. O objetivo do capítulo 3 é discutir alguns aspectos teóricos, com o intuito de auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos na manipulação do Quincux de Galton e, por conseguinte, estimular a sua utilização no ensino interdisciplinar da Estatística. Tendo com foco principal o ensino interdisciplinar de Estatística, procurou-se, ao longo do capítulo 4, deduzir a lei de distribuição de velocidades de Maxwell, por meio de uma abordagem puramente estatística.

## 2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília, 1998.

BURLANDY, E. O. Formação de educadores: saberes e competências pertinentes à construção do eixo reflexivo e interdisciplinar. **Acta Científica**. Ciências Humanas, São Paulo, v.2, n.7, p.41-47, ago./dez. 2004.



## **CAPÍTULO 2**

### **PROBABILIDADE GEOMÉTRICA**

## 1 RESUMO

SANTOS, Geraldino Moura dos. Probabilidade geométrica. In: \_\_\_\_\_. **Conceitos estatísticos no desenvolvimento de metodologias interdisciplinares de ensino**. 2008, Cap. 2, p. 07-68. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG\* .

A probabilidade geométrica lida com espaços amostrais não-enumeráveis finitos ou infinitos, descritos por figuras geométricas. Muitos problemas relacionados a este conceito exigem clara descrição do espaço amostral para evitar ambigüidades nas respostas. Objetivou-se, com a realização deste trabalho, dar suporte teórico e didático a professores de Matemática e Estatística na solução de problemas envolvendo o conceito de probabilidade geométrica. Para tal, foram propostas seqüências didáticas, como divisão de um segmento em duas partes, problema do macarrão, lançamento de uma moeda entre duas retas paralelas, jogo dos discos, agulha de Buffon e lançamento de dardos. Para cada uma delas foram propostos a solução teórica e os roteiros para a simulação lúdica e computacional. Os resultados obtidos pela aplicação da probabilidade geométrica foram validados pelo conceito de probabilidade freqüentista na simulação computacional. Em tais simulações, observou-se estabilização da freqüência relativa em torno do valor teórico da probabilidade geométrica, para um número elevado de repetições do experimento. Verificou-se que as atividades podem ser aplicadas em diferentes níveis de ensino e com diferentes graus de aprofundamento.

---

\* Comitê Orientador: Marcelo Silva de Oliveira – UFLA (Orientador), Verônica Yumi Kataoka (Co-orientadora) - UFLA

## 2 ABSTRACT

SANTOS, Geraldino Moura dos. Geometric probability. In: \_\_\_\_\_. **Statistical concepts in the development of methodologies teaching interdisciplinary**. 2008, Chap. 2, p. 07-68. Dissertation (Master Program in Statistics and Agricultural Experimentation) – Federal University of Lavras, Lavras, MG\*.

Geometric probability work with finite or infinite no-enumerable sample spaces, described by geometric illustrations. Many problems, related to this concept, demand an clear description of sample space to avoid ambiguities in the answers. It was aimed at with that chapter to give didactic support to the teachers of Mathematics and Statistics in the solution of problems involving the concept of geometric probability. For that, didactic sequences were proposed as: division of a segment in two parts; problem of the macaroni; tossing of a coin among two parallel straight line; play of the disks; Buffon's needle problem and throwing of darts, being presented, for each a, the theoretical solution and the routes for the ludic and computational simulation. The results obtained by the application of the geometric probability they were validated by the concept of frequency probability in the computational simulation. In such simulations, a stabilization of the relative frequency was observed around of the theoretical value of the geometric probability, for a high number of repetitions of the experiment. It was verified that the activities can be applied in different teaching levels and with different deepen degrees.

---

\* Guidance Committee: Marcelo Silva de Oliveira –UFLA (Advisor), Verônica Yumi Kataoka (Co- advisor) - UFLA

### 3 INTRODUÇÃO

Considere a seguinte seqüência de questionamentos:

- Uma pessoa procura, com os olhos vedados, atingir um alvo circular com 40 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se, num determinado arremesso, ela acerta o alvo, qual a probabilidade de que tenha atingido o disco central?
- Dividindo-se, aleatoriamente, um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?
- Qual é a probabilidade de um avião cair?
- Qual a probabilidade de que um carro seja roubado?

O conceito clássico de probabilidade é insuficiente para responder a esses e a muitos outros questionamentos semelhantes, tendo em vista que tal conceito exige que o espaço amostral seja enumerável e todos os casos possíveis são equiprováveis, ou seja, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Assim, torna-se necessário o uso de outros conceitos de probabilidade, tais como o de probabilidade geométrica e freqüentista.

Os dois primeiros podem ser respondidos por meio do conceito de probabilidade geométrica. Tal probabilidade lida com espaços amostrais descritos por figuras geométricas. Esses espaços são não-enumeráveis, podendo ser finitos, como no caso da região delimitada por um círculo, ou infinitos, como o da região delimitada por duas retas.

Muitos problemas relacionados ao conceito de probabilidade geométrica exigem uma clara descrição do espaço amostral, para evitar ambigüidades nas

respostas, como, por exemplo, o problema denominado “paradoxo de Bertrand”. Outros, porém, possuem soluções diretas, como no caso da divisão de um segmento em duas partes. Em todos esses problemas, os resultados teóricos podem ser validados por meio de simulação lúdica<sup>1</sup> ou computacional, permitindo ao professor maior interação com seus alunos.

Essas simulações utilizam o conceito frequentista de probabilidade, no qual o valor da probabilidade é estimado pela regularização da frequência relativa, o que ocorre para um grande número de repetições do experimento. Assim, a probabilidade de eventos, como aqueles citados nos questionamentos 3 e 4, pode ser estimada observando-se com que frequência que tais eventos ocorrem.

De modo geral, o ensino de Probabilidade é importante para o desenvolvimento da capacidade crítica do aluno e serve como pré-requisito para estudos posteriores de Estatística. O seu desenvolvimento, porém, encontra dificuldades por parte de alguns professores de Matemática da Educação Básica que, muitas vezes, não tiveram uma preparação para lidar com tal tema e, além disso, não têm suporte dos livros didáticos. No Ensino Superior, esse tema é abordado, porém, essa abordagem é feita de forma bastante teórica nas aulas de Estatística.

Por meio da realização de atividades experimentais, os professores podem minimizar suas próprias dificuldades e atrair um pouco mais a atenção dos alunos, tornando-os membros ativos do processo de ensino. Mesmo para os professores de Estatística do Ensino Superior, que não têm dificuldade em relação a esse tema, essas atividades poderão auxiliá-los no sentido de servir como um reforço prático às suas aulas. Isso, porém, depende do processo de condução das atividades.

---

<sup>1</sup> Neste trabalho, o termo simulação lúdica foi utilizado para indicar o uso de material concreto operado pelo aluno.

Tendo em vista o que foi abordado anteriormente, o principal objetivo deste capítulo é dar suporte teórico e didático aos professores de Matemática e Estatística na solução de problemas envolvendo o conceito de probabilidade geométrica. Para tal, primeiramente, foram apresentadas: uma abordagem geral sobre o ensino de Probabilidade e o conceito de probabilidade geométrica, bem como o conceito de probabilidade freqüentista. Em seguida, foram propostas algumas seqüências didáticas e foram discutidas as soluções, teórica e prática, desses problemas. A solução prática, baseada no conceito freqüentista de probabilidade, foi dividida em dois processos de simulação: a lúdica e a computacional. No caso da última, foram desenvolvidas e executadas rotinas no *software* estatístico R.

## **4 MÉTODOS PARA O ENSINO E CÁLCULO DE PROBABILIDADE**

### **4.1 Ensino de probabilidade**

A probabilidade teve seu início associado aos jogos de azar e desenvolveu-se a partir dos trabalhos de Jerónimo Cardano (1501-1576), que foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado equilibrado e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades (Lopes & Meirelles, 2005). Porém, muitos autores atribuem a origem dessa teoria às correspondências entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665) que realizaram, conjuntamente, estudos sobre o tema.

Nos últimos vinte anos, a Probabilidade, juntamente com a Combinatória e a Estatística, tem sido inserida nos currículos de Matemática da Educação Básica em muitos países (Nicholson & Darnton, 2003; Batanero et al., 2004). Já no Brasil, esses temas estão recomendados no bloco de conteúdo denominado “Tratamento da Informação”, dos Parâmetros Curriculares Nacionais, “por possibilitar o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio para resolver determinadas situações-problema” (Brasil, 1998:134).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a principal finalidade do ensino de Probabilidade é levar o aluno a compreender que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória e que possíveis resultados desses acontecimentos podem ser identificados (Brasil, 1998:52). Para Coutinho (2006) e Batanero & Godino (2002), a construção dos conceitos probabilísticos deve ser feita a partir da compreensão de suas três noções básicas: percepção do acaso, idéia de experiência aleatória e noção de probabilidade. Assim, é importante que o professor proponha atividades em que o aluno realize experimentos e observe os eventos, de forma a promover a

manifestação intuitiva do acaso e da incerteza, buscando, assim, a compreensão de muitos fenômenos que ocorrem na natureza (Lopes, 2004; Kataoka et al., 2007).

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, Batanero & Godino (2002) traçam algumas orientações sobre como ajudar os alunos no desenvolvimento do raciocínio probabilístico:

- proporcionar ampla variedade de experiências que permitam observar os fenômenos aleatórios e diferenciá-los dos determinísticos;
- estimular a expressão de predições sobre o comportamento desses fenômenos e os resultados, assim como sua probabilidade;
- organizar a coleta de dados de experimentação, de modo que os alunos tenham possibilidade de contrastar suas predições com os resultados produzidos e revisar suas crenças;
- ressaltar o caráter imprevisível de cada resultado isolado, assim como a variabilidade das pequenas amostras, mediante a comparação de resultados de cada aluno ou por partes;
- ajudar a apreciar o fenômeno da convergência, mediante acumulação de resultados de toda a turma e comparar a confiabilidade de pequenas e grandes amostras.

Em consonância com estas idéias, Lopes (1998) afirma que é necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os alunos realizem atividades experimentais, observando e construindo os eventos possíveis.

Essas atividades poderão dar um suporte didático não só aos alunos, mas também aos professores, já que muitos deles sentem-se inseguros ao lidar com o ensino de Probabilidade. Para Serradó et al. (2006) e Dias (2004, apud Gonçalves & Muniz, 2006), existem duas dificuldades pedagógicas para que os professores de Matemática da Educação Básica ensinem Probabilidade: a primeira refere-se à novidade que a inserção desses tópicos no currículo representa, fazendo com que o professor tenha de quebrar hábitos e, assim, buscar novas informações e atividades para desenvolver na sala de aula. A segunda situação, relatada também por Batanero et al. (2004) e Pecky & Gould (2005), é a de que os educadores provenientes das licenciaturas em Matemática, às vezes, têm alguma formação básica em Probabilidade e Estatística, mas, geralmente, não têm formação nas questões relacionadas ao ensino destes conteúdos.

Dessa forma, segundo Kataoka et al. (2007) e Lopes (2004), esses professores apresentam os conteúdos de Probabilidade e Estatística com a exatidão, o determinismo e o cálculo que a tradição Matemática impõe, opondo-se, dessa forma, à exploração de situações que envolvam aproximação, aleatoriedade e estimação. Os mesmos autores relatam que essa falta de experiência no “modo probabilístico de pensar” parece implicar não só em uma abordagem errada dos métodos probabilísticos, como também em um desinteresse por parte dos professores pelo assunto.

Outro fator agravante no ensino de Probabilidade é que os livros de Matemática da Educação Básica, às vezes, apresentam uma visão muito estreita sobre esse tema (apenas a aproximação clássica, na qual a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis) e, em outras situações, aplicações restritas aos jogos de azar (Batanero et al., 2004). Esses autores também relatam que, em alguns desses livros, as definições dos conceitos são dadas de forma errada.

Seguindo o mesmo raciocínio, Coutinho (2004) afirma que os livros de Matemática destinados da 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental não sugerem o trabalho com enfoque experimental, o que pode contribuir para o desenvolvimento do ponto de vista freqüentista do conceito de probabilidade. Também não se encontram referências ao conceito de probabilidade geométrica. Vale destacar que o contexto geométrico foi objeto de questão do ENEM-2002.

Com base nessa questão, Coutinho & Gonçalves (2003), citados por Gonçalves (2004), relatam que um professor, ao ser indagado sobre como explicaria aos seus alunos a resolução de tal questão afirma que “este conteúdo não faz parte do Ensino Fundamental, mas sim do Ensino Médio, logo, não teria argumentos suficientes para explicar para minhas turmas”. Segundo os mesmos autores, “o referido problema tem como técnica uma simples comparação de áreas, conteúdo disponível para os alunos do quarto Ciclo do Ensino Fundamental, ciclo no qual trabalhava o referido professor.”

Os fatos apresentados anteriormente mostram a importância de um processo de formação continuada dos professores de Matemática da Educação Básica, o que, segundo Costa (2005), propicia o desenvolvimento profissional do professor por meio de trocas de experiências com seus pares, criando condições mais efetivas para mudanças das práticas pedagógicas.

Com respeito a esse processo e à proposição e execução de atividades didáticas com os estudantes da Educação Básica, encontram-se vários exemplos de trabalhos que já vêm sendo realizados. Dentre estes, citam-se Cordani (2006), Gattuso & Pannone (2002), Innabi (2002), Peck & Gould (2005), Coutinho (2006), Lopes (2006), Morin (2006), Watson (2006) e Kataoka et al. (2007).

Para Lopes (1998), os cursos de formação continuada de professores auxiliam na efetivação do ensino da Probabilidade e da Estatística, na qual o professor possa assumir-se como professor reflexivo no processo de ensino-aprendizagem, ou seja, auxiliando na elaboração de sínteses e na organização

dos trabalhos, propiciando-lhes um espaço coletivo de análise das práticas pedagógicas.

No Brasil, esforços têm sido feitos no intuito de melhorar o conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática que ensinam Probabilidade. Isso ocorre por meio de artigos em revistas, como *Professor de Matemática e Educação Matemática em Revista*; oficinas e trabalhos em congressos, como o Encontro Nacional de Educação Matemática, além dos encontros regionais; da consolidação de um grupo de pesquisa em Estatística e Probabilidade – GT12 (Sociedade Brasileira de Educação Matemática)<sup>2</sup>; Grupo de Formação de Professores – GT8 (Associação Nacional de Professores e Pesquisadores da Área de Educação)<sup>3</sup>; da elaboração de dissertações de mestrado e teses de doutorado nos programas de pós-graduação em Educação Matemática e da oferta de oficinas pedagógicas por diversos pesquisadores.

Portanto, o ensino de Probabilidade necessita de um trabalho mais amplo, junto aos professores de Matemática da Educação Básica, para ser explorado além de seu enfoque puramente clássico.

#### **4.2 Probabilidade geométrica**

Os dois primeiros questionamentos apresentados na abertura deste capítulo mostram situações em que o conceito de probabilidade geométrica se faz necessário. Segundo Tunala (1995), alguns problemas de probabilidade são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em questão, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação – ou ao seu limite, caso exista – entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume.

---

<sup>2</sup> <http://www.sbem.com.br/index.php>.

<sup>3</sup> <http://www.anped.org.br>.

De acordo com Guimarães (1997), citado por Gonçalves (2004), a probabilidade geométrica pode ser caracterizada da seguinte forma:

*Não é possível, por exemplo, calcular a probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de uma região (por exemplo, de um círculo) que se localize numa determinada sub-região incluída nesse círculo (por exemplo, um triângulo). Para o fazer, é necessário estender o conceito de probabilidade ao acaso de experiências aleatórias, nas quais os resultados possíveis constituam conjuntos contínuos.*

Implícita nessas idéias está a importância da descrição do espaço amostral, já que é com base nele que a probabilidade geométrica pode ser calculada. Segundo Meyer (1983), a fim de descrever um espaço amostral associado a um experimento, deve-se ter uma idéia bastante clara daquilo que está sendo mensurado ou observado. Por isso, deve-se falar de “um” espaço amostral associado a um experimento e não de “o” espaço amostral.

Isso fica bastante evidente no problema denominado “paradoxo de Bertrand” que, segundo Magalhães (2006), apesar de ser conhecido como um paradoxo, tratam-se apenas de diferentes escolhas do espaço de probabilidades e cada interpretação conduz a uma resposta diferente, o que é natural no caso da probabilidade geométrica. Uma das maneiras de representar esse problema é dada pelo enunciado a seguir.

No círculo unitário de centro  $O$ , representado na Figura 2.1, o triângulo equilátero inscrito tem lado igual a  $\sqrt{3}$ . Qual é a probabilidade de uma corda  $(AB)$  desse círculo, escolhida ao acaso, ter comprimento maior que o lado desse triângulo?

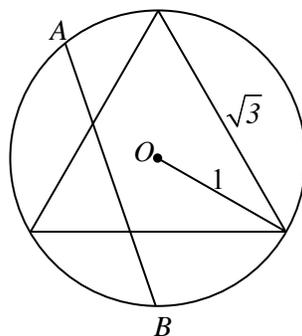


FIGURA 2.1 Paradoxo de Bertrand.

Com base nas idéias de Magalhães (2006) e Wagner (1997), as possíveis interpretações para a solução desse problema são apresentadas a seguir.

### 1ª interpretação

Escolhe-se, aleatoriamente, um ponto P dentro do círculo e liga-se esse ponto ao centro por meio de um segmento de reta. A corda é traçada nesse ponto perpendicularmente ao segmento, conforme Figura 2.2.

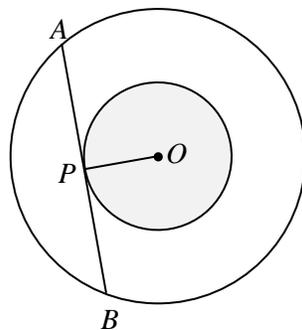


FIGURA 2.2 Paradoxo de Bertrand – 1ª interpretação

Para essa interpretação, se o segmento  $OP$ , o raio do círculo interno, for igual a  $\frac{1}{2}$ , o segmento  $AB$  valerá  $\sqrt{3}$ . Assim, o espaço amostral é definido pelos pontos pertencentes ao círculo unitário e a região que produzirá as cordas desejadas é aquela definida pelo círculo de mesmo centro e raio  $\frac{1}{2}$ . Logo, a probabilidade de interesse será:

$$P = \frac{\text{área do círculo interno de raio } \frac{1}{2}}{\text{área do círculo externo}} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi(1)^2} = \frac{1}{4}.$$

### 2ª interpretação

Fixa-se uma das extremidades da corda e escolhe-se, ao acaso, o outro extremo na circunferência. Para que a corda seja maior que o lado do triângulo equilátero, seu comprimento  $x$  deve ser tal que  $\sqrt{3} < x < 2$ . Então, o outro extremo da corda deverá ser escolhido no menor arco com extremidades entre  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$  (Figura 2.3).

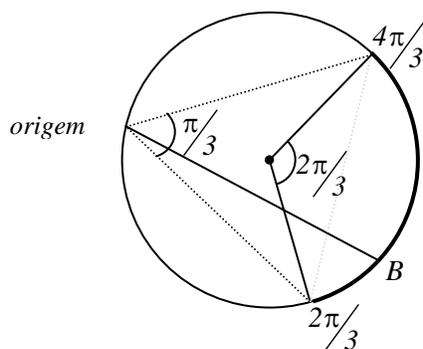


FIGURA 2.3 Paradoxo de Bertrand – 2ª interpretação.

Neste caso, o espaço amostral consiste de todos os pontos da circunferência e o evento de interesse é constituído pelos pontos do referido arco. Assim, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{comprimento do menor arco entre } \frac{2\pi}{3} \text{ e } \frac{4\pi}{3}}{\text{comprimento da circunferência}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2\pi} = \frac{1}{3}.$$

### 3ª interpretação

Escolhe-se um ponto ao acaso, em um dos raios do círculo e por esse ponto traça-se uma corda, perpendicularmente a esse raio. Esse procedimento aleatório é equivalente a sortear um ponto no intervalo  $[0, 1]$ , já que o raio utilizado é irrelevante ao processo. Para que a corda tenha comprimento maior que  $\sqrt{3}$ , é necessário que ela esteja situada no intervalo  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , conforme

Figura 2.4.

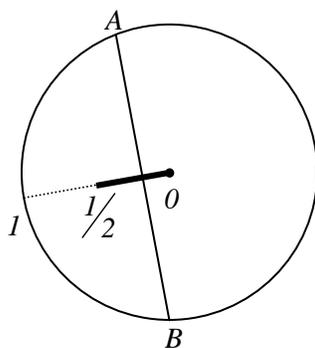


FIGURA 2.4 Paradoxo de Bertrand – 3ª interpretação

O espaço amostral, nessa situação, é o conjunto de todos os pontos pertencentes ao intervalo  $[0, 1]$  e o evento de interesse é constituído pelos pontos no intervalo  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Portanto, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{comprimento do intervalo } \left[0, \frac{1}{2}\right]}{\text{comprimento do intervalo } [0, 1]} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{1}{2}.$$

Para decidir qual das três respostas é a correta, é necessário reformular a pergunta de modo a torná-la mais precisa, ou seja, definir detalhes de como a corda ( $AB$ ) será traçada, pois há três modos geométricos diferentes de construir essa corda. O detalhamento do modo de traçado da corda deve ser feito para evitar ambigüidades. Porém, em muitos problemas de probabilidade, essa definição precisa, talvez, seja a parte mais difícil.

Por outro lado, existem problemas relacionados à probabilidade geométrica, cujas soluções são bastante simples. Isso pode ser encontrado nos casos (Tunala, 1995 e Wagner, 1997) tratados a seguir.

### Escolher um ponto de um determinado segmento de reta

Se  $X$  e  $Y$  são pontos de um segmento de reta  $AB$  (Figura 2.5), admite-se que a probabilidade de um ponto desse segmento pertencer ao segmento  $XY$  (contido em  $AB$ ) é proporcional ao comprimento de  $XY$  e não depende da posição dos pontos  $X$  e  $Y$  sobre  $AB$ .



FIGURA 2.5 Pontos de um segmento de reta.

Portanto, selecionando um ponto de  $AB$ , a probabilidade de que ele pertença a  $XY$  será:

$$P = \frac{\text{comprimento de } XY}{\text{comprimento de } AB}. \quad (2.1)$$

**Escolher um ponto de uma determinada figura plana**

Analogamente, suponha que uma figura plana  $B$  (Figura 2.6) seja parte de outra figura plana  $A$  e que se tenha escolhido ao acaso um ponto de  $A$ .

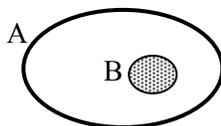


FIGURA 2.6 Pontos de um plano.

A probabilidade de um ponto de  $A$  pertencer a  $B$  é proporcional à área de  $B$  e não depende do lugar que  $B$  ocupa em  $A$ . Então, a probabilidade de que o ponto selecionado esteja em  $B$  será:

$$P = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}. \quad (2.2)$$

**Escolher um ponto de um determinado sólido**

De modo semelhante, a probabilidade de um ponto, escolhido aleatoriamente dentro de um sólido  $G$ , pertencer a uma parte  $g$  desse sólido (Figura 2.7) será:

$$P = \frac{\text{volume de } g}{\text{volume de } G}. \quad (2.3)$$

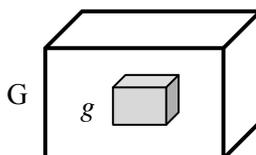


FIGURA 2.7 Ponto escolhido num sólido.

Nota-se, então, que a probabilidade geométrica pode ser aplicada a todos os problemas envolvendo figuras geométricas. Tal conceito pode ser usado também em atividades práticas, como, por exemplo, para estimar o comprimento total dos canais de uma rede de drenagem a partir do número médio de intersecções dessa com uma rede de retângulos, numa bacia hidrográfica (Batista, 1987).

Alguns problemas relacionados à probabilidade geométrica exigem conhecimentos matemáticos um pouco mais avançados. Outros, devido à sua simplicidade, podem ser trabalhados até mesmo na Educação Básica, cabendo ao professor escolher os problemas de acordo com o nível de seus alunos.

### 4.3 Probabilidade freqüentista

Para estimar a probabilidade de certos eventos, como aqueles citados nos questionamentos 3 e 4, do início deste capítulo, é necessário observar com que freqüência esses fatos ocorrem. Após um grande número de observações, dividindo-se o número de vezes que determinado fato ocorreu pelo número de observações feitas, obtém-se uma estimativa da probabilidade desse evento. A principal característica desse enfoque é que o valor matemático da probabilidade emerge do processo de experimentação, caracterizando a denominada probabilidade freqüentista.

A visão freqüentista de Probabilidade foi iniciada por Jacques Bernoulli (1654-1705) em sua obra “*Ars Conjectandi*” (1713), na qual aproxima a probabilidade de um evento pela sua freqüência observada quando a experiência é repetida um grande número de vezes. Em uma passagem de sua obra, Bernoulli afirma que:

*(...) Os dados que não nos são oferecidos “a priori” o são ao menos “a posteriori”, isto é, será possível extraí-los observando os resultados de numerosos exemplos*

*semelhantes; porque devemos presumir que, em seguida, cada fato pode acontecer ou não acontecer no mesmo número de casos nos quais foi constatado anteriormente, em um estado de coisas semelhantes (...)* (Bernoulli, 1713, apud Coutinho, 1994, p.16.).

Desse modo, Bernoulli propõe um teorema (Lei dos Grandes Números ou Teorema de Bernoulli), no qual a probabilidade de um evento ocorrer tende a um valor constante quando o número de ensaios desse evento tende ao infinito. Uma justificativa desse processo é encontrada na seqüência de sua obra:

*(...) seja então o número de casos férteis em relação ao número de casos estéreis, precisamente ou aproximadamente na razão  $r/s$ , e que seja, em consequência, em relação ao número total na razão  $r/(r+s)$  ou  $r/t$ , admitindo os limites  $(r+1)/t$  e  $(r-1)/t$ . É necessário mostrar que se pode conceber experiências em tal número que as tornem mais verossímeis quantas vezes se quiser que o número de observações caia no interior destes limites mais freqüentemente que fora dele, isto é, que o número de observações férteis seja, em comparação ao número de todas as observações, uma razão nem maior que  $(r+1)/t$  nem menor que  $(r-1)/t$*  (Bernoulli, 1713, apud Coutinho, 1994, p.17).

Esse teorema, numa de suas formas mais conhecidas, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$P_{n \rightarrow \infty} \left( \left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \rightarrow 1,$$

em que  $P$  tende para a certeza, quando o número de observações  $n$  cresce indefinidamente, sendo  $k$  o número de sucessos observados,  $p$  a proporção desconhecida e  $\varepsilon > 0$  um número tão pequeno quanto se queira. Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = p.$$

Para se ter uma idéia mais concreta dessa interpretação, considere que um experimento aleatório seja repetido muitas vezes sob condições similares. Segundo Mood et al. (1974), enquanto esses experimentos vão sendo repetidos ocorre uma incontável variação, que é casual e aleatória, de forma que as observações são individualmente imprevisíveis. Mas, à medida que o número de repetições aumenta, a frequência relativa se estabiliza em torno de um valor que é, aproximadamente, a probabilidade do evento. Assim, a noção de probabilidade aparece como o limite de uma seqüência de eventos observáveis experimentalmente (Silva, 2002, p. 46). Um exemplo clássico é o da tacinha que pode cair sobre a cabeça ou sobre a ponta, no qual a probabilidade de cada evento é difícil de ser avaliada por considerações a priori.

Ainda de acordo com essas idéias, Meyer (1983) afirma que, quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de forma acidental, mas, para um grande número dessas repetições, uma configuração definida ou regularidade surgirá, tornando-se possível a construção de um modelo matemático preciso com o qual se analisará o experimento.

Nota-se, então, que o conceito freqüentista de probabilidade é baseado no processo de repetição do experimento.

#### **4.4 Elo entre as duas concepções de probabilidades (freqüentista e geométrica)**

Por meio do conceito freqüentista de probabilidade, os problemas relacionados à probabilidade geométrica podem ser comprovados de forma

prática, e a precisão dessas soluções depende do número de repetições e do processo de condução do experimento.

Essas soluções práticas podem ocorrer por meio de dois processos de simulação: lúdico e computacional. Cada um desses processos tem a sua importância no desenvolvimento intelectual do aluno. Eles são recomendados para todos os níveis de ensino e um é o complemento do outro.

Na simulação computacional, o número de repetições pode ser extremamente elevado, favorecendo a estabilização da frequência relativa em torno do valor da probabilidade geométrica. Porém, devido às limitações de recursos em muitas escolas, nem sempre é possível executar o processo de simulação em sala de aula. Nesse caso, o resultado final pode ser apresentado aos alunos por meio de transparências ou em papel impresso.

Por outro lado, a simulação lúdica pode ser executada em qualquer escola devido à sua simplicidade e ao baixo custo. Por meio dela, os alunos tornam-se membros ativos do processo de ensino, auxiliando o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, permitindo também a manipulação de resultados concretos, o que influencia de forma positiva a aprendizagem do aluno. Além disso, possibilita o trabalho em grupos, que é importante para a integração de seus componentes.

Uma desvantagem da simulação lúdica é que, devido à limitação da experiência humana no tempo, no espaço e no conjunto de possibilidades (Fischbein, 1987, apud Kataoka et al., 2007), o número de repetições não é suficiente para avaliar com precisão o valor da probabilidade.

## 5 SEQÜÊNCIAS DIDÁTICAS

Nesta seção são apresentadas as seqüências didáticas para a solução de alguns problemas relacionados à probabilidade geométrica. Para todas foi utilizado o seguinte procedimento metodológico:

- apresentação da solução teórica baseada no conceito de probabilidade geométrica, representada pela letra  $P$ ;
- descrição do roteiro da atividade prática, tanto para a simulação lúdica quanto para a computacional, com base no conceito freqüentista de probabilidade, isto é,

$$P_f = \frac{k}{n}, \quad (2.4)$$

em que,  $P_f$  é a estimativa da probabilidade,  $k$  o número de sucessos e  $n$  o número total de repetições do experimento aleatório;

- execução da simulação computacional com os resultados sendo apresentado graficamente;
- outras orientações sobre o desenvolvimento da atividade e discussão dos resultados obtidos na simulação computacional.

Em cada uma das simulações lúdicas, exceto na subseção 5.5, o resultado nomeado como “individual” refere-se a cada aluno ou grupo, e o “coletivo” ao conjunto total de alunos ou de grupos.

Nas simulações computacionais, o termo  $n_{max}$  foi utilizado para expressar o número máximo de repetições do experimento.

Nos gráficos de todas as simulações computacionais a escala utilizada foi de 0,003, para mais ou para menos, em relação ao valor teórico da probabilidade.

No gráfico obtido em cada uma das simulações computacionais, exceto na subseção 5.5, a linha pontilhada refere-se à probabilidade geométrica e a linha contínua, à probabilidade freqüentista. Já na subseção 5.5, a linha pontilhada refere-se ao valor verdadeiro de  $\pi$  e a contínua, à sua estimativa.

No gráfico de cada uma das subseções, o evento favorável é representado por uma bola cheia e o desfavorável, por uma bola vazia.

Na subseção 5.7 apresentam-se os comentários gerais sobre todas as atividades.

As simulações computacionais foram realizadas no software R versão 2.6.2 (R, Development Core Team, 2008).

## 5.1 Divisão de um segmento em duas partes

### Apresentação do problema

Considere um segmento  $\overline{OA}$  de comprimento  $\ell$ . Se esse segmento for dividido, por um ponto  $B$ , em duas partes ( $\overline{OB}$  e  $\overline{BA}$ ), qual a probabilidade de que a de menor comprimento seja superior a  $\ell/3$ ?

### Solução - probabilidade geométrica (Tunala, 1995)

Conforme já foi abordado, a probabilidade de um ponto situar-se num segmento é proporcional ao comprimento deste e não depende da posição que o segmento ocupa. Assim, para resolver o problema, consideram-se os pontos  $X, Y \in \overline{OA}$ , de forma que os comprimentos dos três segmentos  $\overline{OX}$ ,  $\overline{XY}$  e  $\overline{YA}$  sejam iguais a  $\ell/3$ . O comprimento do menor dos segmentos  $\overline{OB}$  e  $\overline{BA}$  será superior a  $\ell/3$ , somente se o ponto  $B$ , que divide o segmento em duas partes, pertencer ao segmento  $\overline{XY}$  (Figura 2.8).

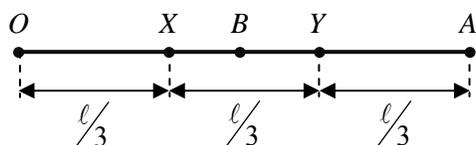


FIGURA 2.8 Divisão aleatória de um segmento  $\overline{OA}$  em duas partes ( $\overline{OB}$  e  $\overline{BA}$ ).

Portanto, de forma semelhante à expressão 2.1, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{comprimento de } \overline{XY}}{\text{comprimento de } \overline{OA}} = \frac{\left(\frac{\ell}{3}\right)}{\ell} = \frac{1}{3}. \quad (2.5)$$

### Descrição da atividade - probabilidade freqüentista

#### I) Simulação lúdica

Para a simulação lúdica da divisão de um segmento em duas partes, sugere-se a atividade descrita pelos passos a seguir.

- Passo 1: Distribuir, para cada aluno,  $n$  espaguetes de macarrão e pedir que eles os dividam aleatoriamente em duas partes.
- Passo 2: Contar o número  $k$  de vezes que cada aluno obtiver uma das partes com comprimento superior a um terço do comprimento total.
- Passo 3: Calcular a freqüência relativa (expressão 2.4), individual e coletiva, e confrontá-las com o resultado da probabilidade geométrica (expressão 2.5).
- Passo 4: Discutir as possíveis diferenças entre os resultados encontrados.

**II) Simulação computacional**

Para a simulação computacional da divisão de um segmento em duas partes, o professor pode utilizar a rotina A1 (Anexo A) ou construir a sua própria, seguindo as orientações dadas pelo fluxograma da Figura 2.9.

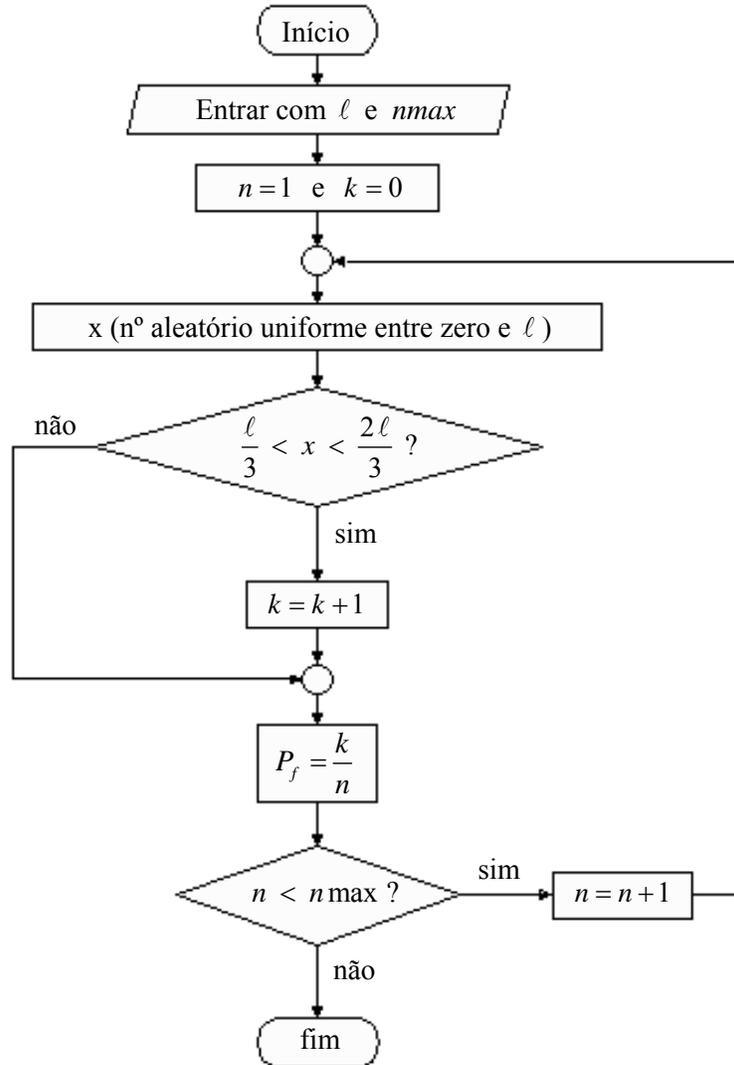


FIGURA 2.9 Fluxograma da simulação computacional da divisão de um segmento em duas partes.

**Comentários**

A turma pode ser dividida em dois grupos. Um deles fará esta experiência e o outro, a experiência do problema do macarrão que será apresentado na subseção 5.2.

O professor pode utilizar esta atividade para formalizar os conceitos de probabilidade geométrica e freqüentista, já que ela é bastante simples e não exige um conhecimento avançado de cálculo.

Na Figura 2.10 está representado o desenho da última repetição (parte superior) e o gráfico da probabilidade em função do número de repetições (parte inferior) para a simulação da divisão de um segmento em duas partes, com  $\ell = 20$  e  $n_{max} = 200.000$ . Acima de 50.000 repetições houve pequenas oscilações da probabilidade freqüentista em torno da probabilidade geométrica e a máxima diferença absoluta entre elas foi de, aproximadamente, 0,16%. Nota-se que, na última repetição, ocorreu um evento favorável.

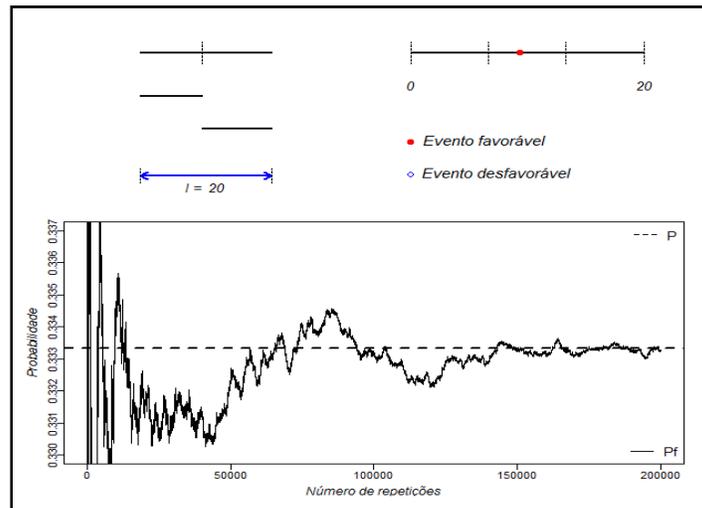


FIGURA 2.10 Representação da divisão de um segmento em duas partes e gráfico da probabilidade em função do número de repetições.

## 5.2 Problema do macarrão

### Apresentação do problema

Dividindo-se aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

### Solução - probabilidade geométrica (Wagner, 1997)

Toma-se um segmento de reta  $\overline{AB}$  de comprimento  $\ell$ . Esse segmento é dividido em três partes: uma,  $\overline{AP}$ , de comprimento  $x$ ; uma  $\overline{PQ}$ , de comprimento  $y$  e a terceira  $\overline{QB}$ , naturalmente com comprimento  $\ell - x - y$  (Figura 2.11).

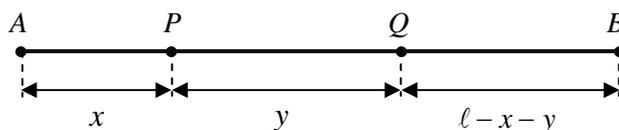


FIGURA 2.11 Divisão aleatória de um segmento  $\overline{AB}$  em três partes ( $\overline{AP}$ ,  $\overline{PQ}$  e  $\overline{QB}$ ).

Cada forma de dividir o segmento  $\overline{AB}$  fica, então, associada ao par ordenado  $(x, y)$  em que  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $x + y < \ell$ , o que corresponde a um ponto no interior do triângulo representado pela região  $G$  do plano cartesiano (Figura 2.12).

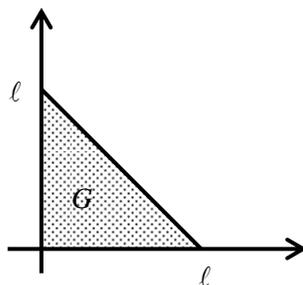


FIGURA 2.12 Apresentação gráfica da divisão aleatória de um segmento em três partes.

Entretanto, não são todas as divisões que formam triângulos. Um triângulo existe se, e somente se, cada lado for menor que a soma dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que o seu semiperímetro que, nesse caso, é igual a  $\frac{\ell}{2}$  (Figura 2.13).

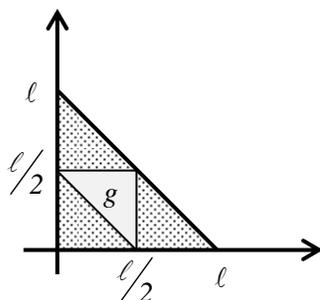


FIGURA 2.13 Problema do macarrão – Região favorável ( $g$ ).

Tem-se, portanto,  $x < \frac{\ell}{2}$ ,  $y < \frac{\ell}{2}$  e  $\ell - x - y < \frac{\ell}{2}$ . Essa última condição é naturalmente equivalente a  $x + y > \frac{\ell}{2}$  e, reunidas as três, tem-se que a região

favorável ( $g$ ) é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo maior, correspondendo a  $\frac{1}{4}$  da área total. Assim, de forma semelhante à expressão 2.2, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{área do triângulo menor}}{\text{área do triângulo maior}} = \frac{\left(\frac{1}{4}s\right)}{s} = \frac{1}{4}. \quad (2.6)$$

### **Descrição da atividade - probabilidade freqüentista**

#### **I) Simulação lúdica**

A simulação lúdica do problema do macarrão pode ser feita de acordo com os passos a seguir.

Passo 1: Distribuir, para cada aluno,  $n$  espaguete de macarrão e pedir que eles os dividam aleatoriamente em três partes, sem uma explicação antecipada sobre a finalidade da divisão.

Passo 2: Formar um triângulo com as três partes de cada espaguete.

Passo 3: Contar o número  $k$  de vezes que cada aluno formar um triângulo com os três pedaços.

Passo 4: Calcular a freqüência relativa (expressão 2.4), individual e coletiva e confrontá-las com o resultado da probabilidade geométrica (expressão 2.6).

Passo 5: Discutir as possíveis diferenças entre os resultados.

#### **II) Simulação computacional**

Para a simulação computacional do problema do macarrão, o professor pode utilizar a rotina A2 (Anexo A) ou construir sua própria, seguindo as orientações dadas pelo fluxograma da Figura 2.14.

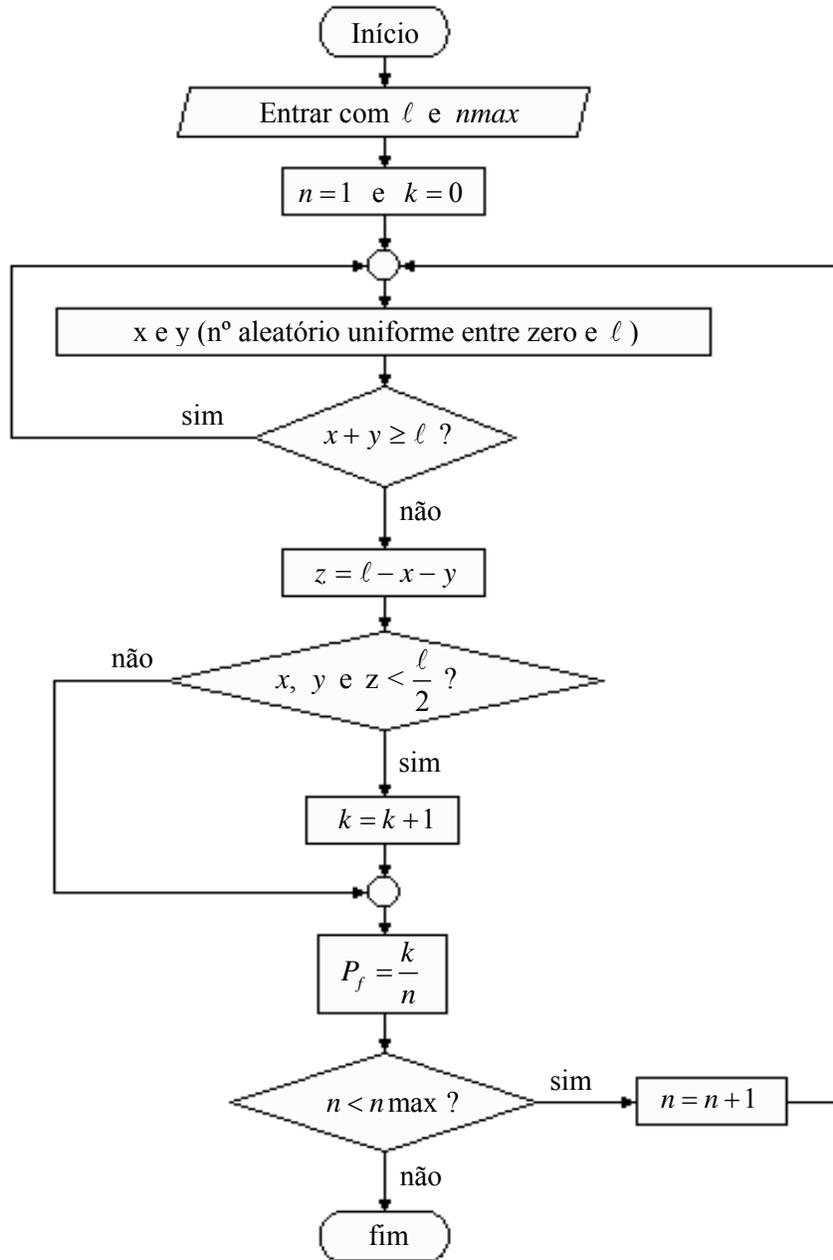


FIGURA 2.14 Fluxograma da simulação computacional do problema do macarrão.

### Comentários

O resultado da simulação lúdica, para esta atividade, provavelmente, causará um “espanto” geral entre os participantes, pois o valor obtido pode ser bem distante do valor verdadeiro. O motivo desse distanciamento está na própria execução do experimento que, na maioria das vezes, não é realizada de forma aleatória, como exige o enunciado do problema. Haverá uma tendência de que a maioria dos participantes divida seus espaguetes em pedaços de comprimentos próximos, o que afetará o resultado final.

Porém, para a simulação computacional, a divisão do segmento em três partes ocorre sem a tendência de igualdade das mesmas.

Na Figura 2.15 encontra-se um desenho da última repetição (parte superior) e o gráfico da probabilidade em função do número de repetições (parte inferior) para a simulação do problema do macarrão, com  $\ell = 30$  e  $n_{max} = 200.000$ . Acima de 25.000 repetições houve pequenas oscilações da probabilidade freqüentista em torno da probabilidade geométrica e a máxima diferença absoluta entre elas foi de, aproximadamente, 0,15%. Nota-se que, na última divisão, as três partes não formaram um triângulo, isto é, o par ordenado  $(x, y)$  caiu fora da região favorável.

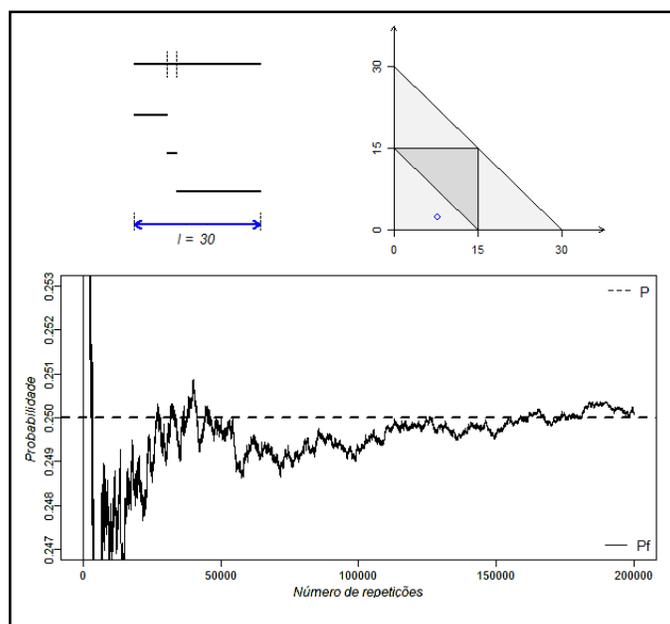


FIGURA 2.15 Representação do problema do macarrão e gráfico da probabilidade em função do número de repetições.

### 5.3 Lançamento de uma moeda entre duas retas paralelas

#### Apresentação do problema

Considere uma família de retas paralelas em  $\mathbb{R}^2$ , em que a distância entre quaisquer duas retas adjacentes vale  $d = 2a$ . Qual é a probabilidade de que uma moeda de raio  $r < a$ , lançada ao acaso sobre o plano, não intercepte nenhuma das retas?

**Solução - probabilidade geométrica (Tunala, 1995)**

Seja  $h$  a distância entre o centro da moeda e um eixo equidistante das duas retas mais próximas (Figura 2.16).

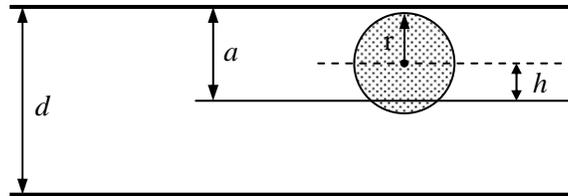


FIGURA 2.16 Lançamento da moeda entre duas retas.

Pode-se verificar que a moeda não intercepta quaisquer retas desde que  $h < (a-r)$ . Assim, o lugar geométrico do centro da moeda deverá ser a região retangular infinita hachurada ( $g$ ) da Figura 2.17.

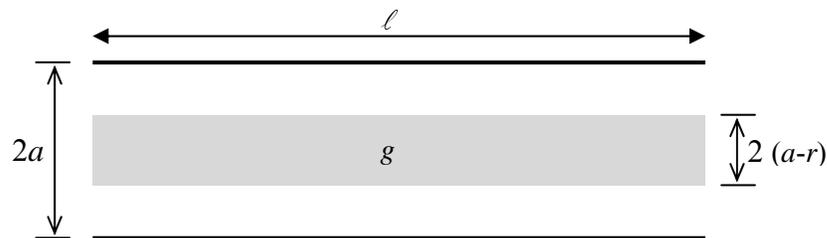


FIGURA 2.17 Lançamento da moeda - região favorável ( $g$ ).

Portanto, sendo  $G$  a região total delimitada pelas duas retas, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{área de } g}{\text{área de } G} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{2(a-r)\ell}{2a\ell} = 1 - \frac{r}{a}. \quad (2.7)$$

Tomando-se como exemplo  $a = 5$  cm e uma moeda de 5 centavos, de raio  $r = 1$  cm, essa probabilidade será de 80%, como pode ser facilmente verificado.

### **Descrição da atividade - probabilidade freqüentista**

#### **I) Simulação lúdica**

A simulação lúdica para o lançamento da moeda entre duas retas paralelas pode ser feita de acordo com os passos a seguir.

Passo 1: Distribuir, para cada dupla, um pequeno tabuleiro de madeira com um feixe de retas paralelas e uma moeda de diâmetro menor que a distância entre as retas.

Passo 2: Cada dupla deverá lançar a moeda  $n$  vezes sobre o tabuleiro e contar o número  $k$  de vezes que ela intercepta uma das retas.

Passo 3: Calcular as freqüências relativa (expressão 2.4), individual e coletiva, e confrontá-las com o resultado da probabilidade geométrica (expressão 2.7).

Passo 4: Discutir as possíveis diferenças entre os resultados.

#### **II) Simulação computacional**

Para a simulação computacional do lançamento da moeda entre duas retas paralelas, o professor pode executar a rotina A3 (Anexo A) ou construir sua própria, seguindo as orientações dadas pelo fluxograma da Figura 2.18.

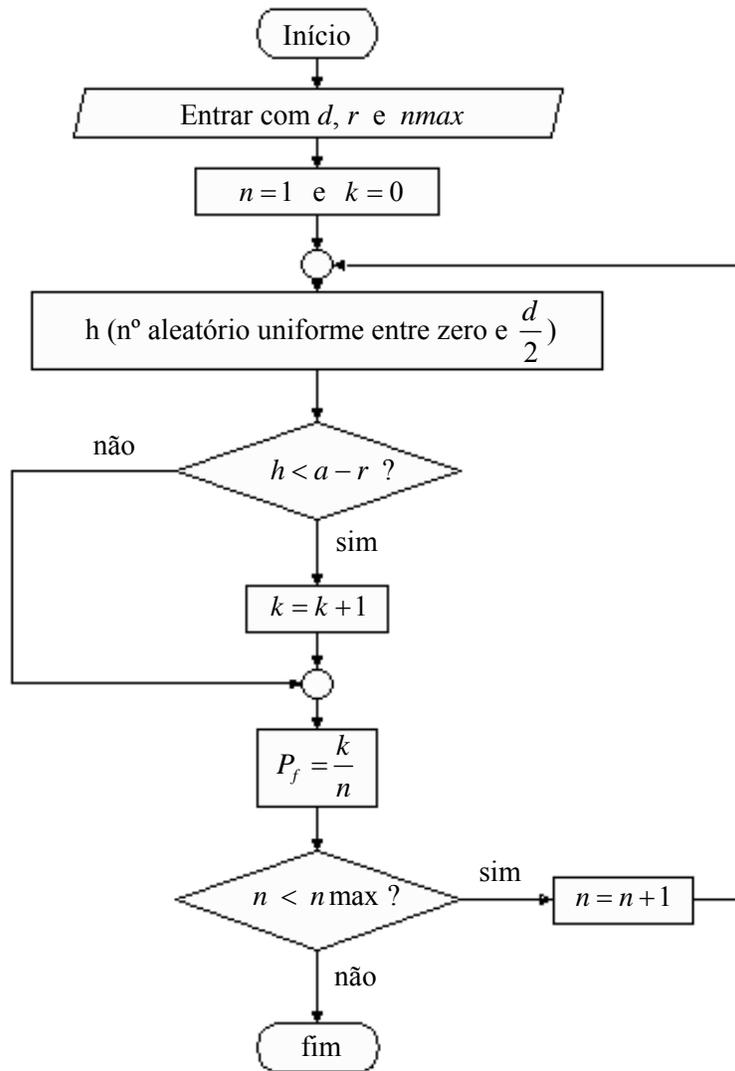


FIGURA 2.18 Fluxograma da simulação computacional do lançamento de uma moeda entre duas retas paralelas.

### Comentários

Para a simulação lúdica, o professor pode utilizar também o chão da sala de aula, caso esse seja constituído por ladrilhos formando retas paralelas. Nessas

condições, a moeda pode ser substituída por discos de papelão com diâmetros menores que a distância entre as retas.

Na Figura 2.19 estão representados o desenho do último lançamento da moeda (parte superior) e o gráfico da probabilidade em função do número de lançamentos (parte inferior). Nessa atividade, considerou-se  $d = 10$ ,  $r = 3$  e  $n_{max} = 200.000$ . Acima de 55.000 lançamentos, houve pequenas oscilações da probabilidade freqüentista em torno da probabilidade geométrica (que neste caso vale 0,4) e a máxima diferença absoluta entre elas foi de, aproximadamente, 0,11%. Nota-se que no último lançamento, a moeda interceptou uma das retas, isto é, o centro da moeda caiu fora da região de sucesso (evento desfavorável).

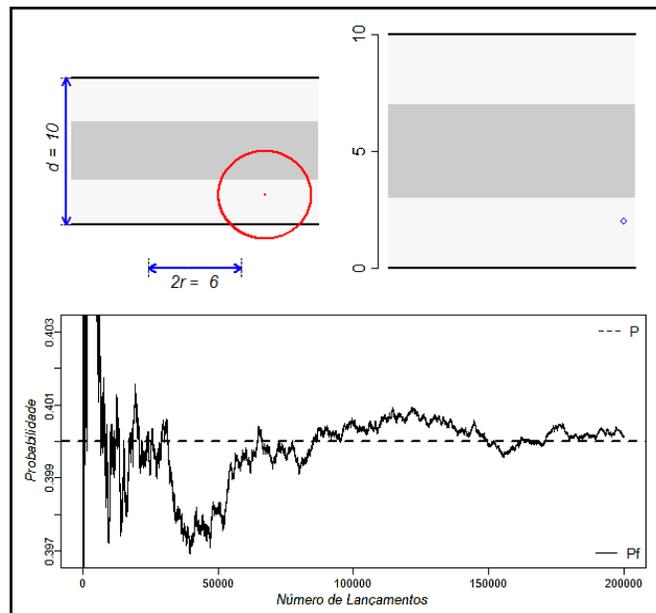


FIGURA 2.19 Desenho representativo do último lançamento da moeda e gráfico da probabilidade em função do número de lançamentos.

### 5.4 Jogo dos discos

#### Apresentação do problema

Em um plano pavimentado com quadrados de lado  $\ell$  é lançado, aleatoriamente, um disco de diâmetro  $d$ . Qual é a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de nenhum dos quadrados?

Na Figura 2.20 está representado um arranjo com três lançamentos, tendo em apenas um deles sido obtido sucesso.

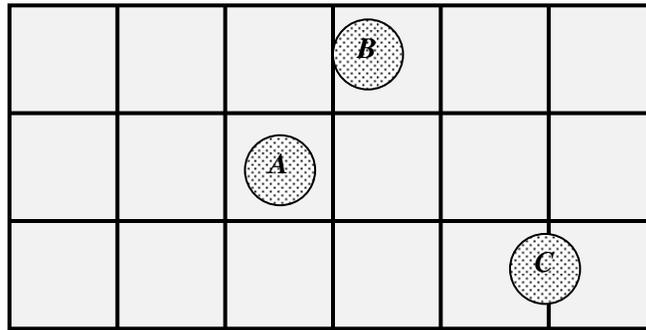


FIGURA 2.20 Evento favorável (A) e eventos desfavoráveis (B e C) no jogo dos discos.

#### Solução - probabilidade geométrica (Paterlini, 2002)

Para que um evento favorável possa ocorrer,  $d$  deve ser menor do que  $\ell$ . Construindo um quadrado de lado  $\ell - d$  simetricamente disposto dentro do quadrado de lado  $\ell$  (Figura 2.21), observa-se que o evento será favorável se o centro do disco cair no interior do quadrado de lado  $\ell - d$ . Sob condições ideais, pode-se supor que lançar o disco aleatoriamente no piso é o mesmo que lançar seu centro aleatoriamente. Assim a probabilidade do evento ser favorável é a

mesma probabilidade de um ponto, lançado aleatoriamente dentro do quadrado de lado  $\ell$ , cair dentro do quadrado de lado  $\ell - d$ .

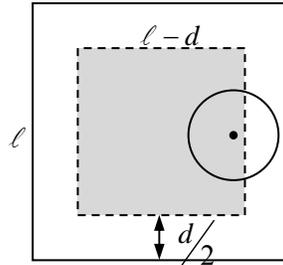


FIGURA 2.21 Região favorável ao jogo do disco.

Portanto, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{área do quadrado menor}}{\text{área do quadrado maior}} = \frac{(\ell - d)^2}{\ell^2} = \frac{\ell^2 - 2\ell d + d^2}{\ell^2}$$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{1}{\ell^2}\right)d^2 - \left(\frac{2}{\ell}\right)d + 1. \quad (2.8)$$

Essa expressão é uma função do segundo grau e, assim, a curva formada será um arco de parábola, em que os valores de  $P$  decrescem com o aumento do diâmetro do disco, que só pode assumir valores entre zero e  $\ell$ . Na Figura 2.22 está representada a curva obtida para  $\ell = 30$  e  $P = p$ .

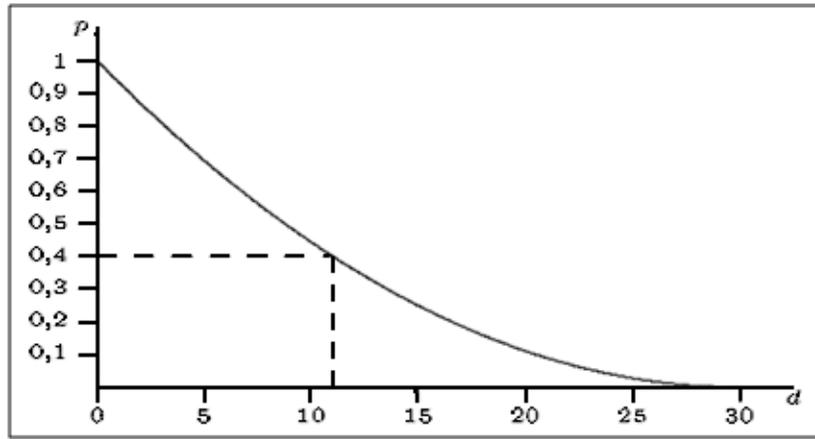


FIGURA 2.22 Gráfico da probabilidade geométrica ( $p$ ), em função do diâmetro do disco ( $d$ ).  
 Fonte: Paterlini (2002).

Esse gráfico permite determinar tanto o valor de  $p$  para um diâmetro conhecido, como o valor de  $d$  para uma probabilidade conhecida.

Por outro lado, a expressão matemática para determinação do valor de  $d$  pode ser encontrada a partir da expressão 2.8 que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{\ell^2}\right)d^2 - \left(\frac{2}{\ell}\right)d + (1-P) = 0.$$

Resolvendo essa expressão para  $d$ , encontra-se,

$$d = \frac{\frac{2}{\ell} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\ell}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\ell^2}\right)(1-P)}}{2\left(\frac{1}{\ell^2}\right)} = \ell(1 \pm \sqrt{P}).$$

Entretanto, os valores de  $d$  devem ser tais que  $0 \leq d \leq \ell$ , assim:

$$d = \ell(1 - \sqrt{P}).$$

### **Descrição da atividade - probabilidade freqüentista**

#### **I) Simulação lúdica**

O roteiro para a simulação lúdica do jogo dos discos é dado pelos passos abaixo.

Passo 1: Distribuir, para cada dupla, um pequeno tabuleiro de xadrez, com quadrados de lado conhecidos,  $\ell$ .

Passo 2: Lançar uma moeda  $n$  vezes sobre o tabuleiro e contar o número  $k$  de vezes que ela não intercepta nem tangencia os lados de nenhum dos quadrados. O diâmetro da moeda deverá ser menor que  $\ell$  para que ocorra algum sucesso.

Passo 3: Calcular a freqüência relativa (expressão 2.4), individual e coletiva, e confrontá-las com o resultado da probabilidade geométrica (expressão 2.8).

Passo 4: Discutir as possíveis diferenças entre os resultados.

#### **II) Simulação computacional**

Para a simulação computacional do jogo dos discos, o professor pode utilizar a rotina A4 (Anexo A) ou construir sua própria, seguindo as orientações dadas pelo fluxograma da Figura 2.23.

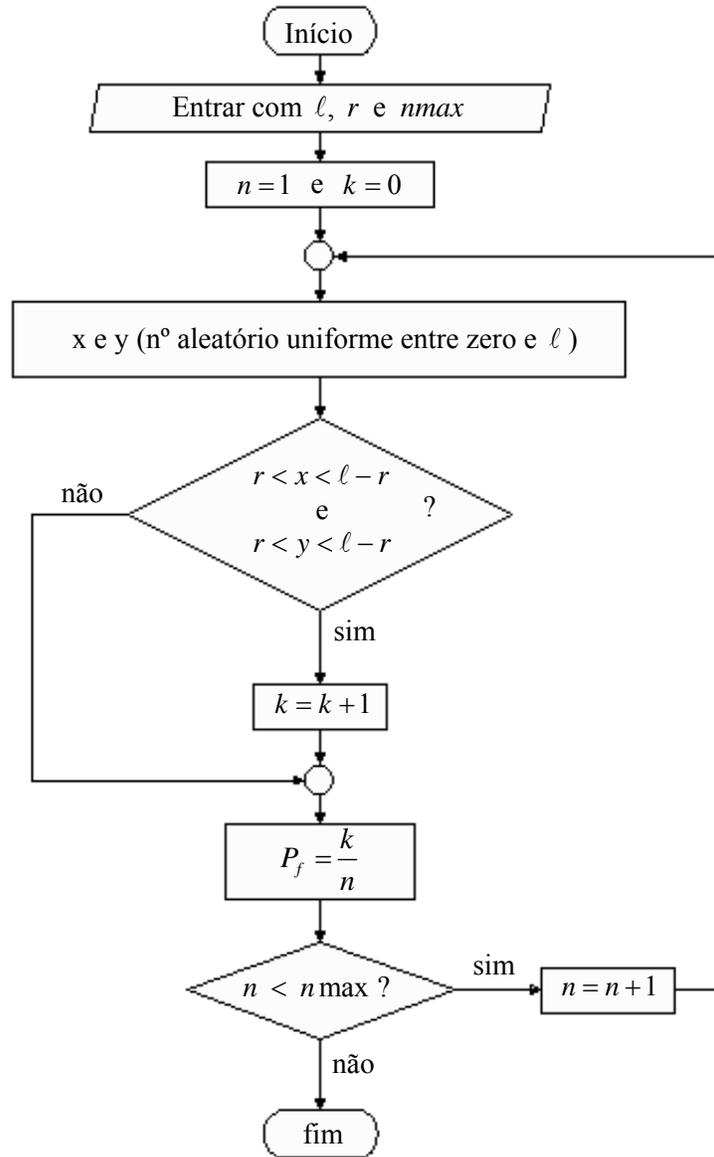


FIGURA 2.23 Fluxograma da simulação computacional do jogo dos discos.

### Comentários

Quando o chão da sala for constituído por ladrilhos quadrados, o professor pode utilizá-lo em substituição ou complementação ao uso do tabuleiro de xadrez. Nesse caso, as moedas poderão ser substituídas por discos de papelão com diâmetros inferiores aos lados dos ladrilhos.

Cabe salientar que a probabilidade de sucesso será tão maior quanto menor for o diâmetro do disco (ou da moeda) em relação aos lados dos quadrados. Isso pode ser facilmente verificado por meio do gráfico da Figura 3.19, descrita anteriormente.

Na Figura 2.24 estão representados o desenho do último lançamento do disco (parte superior) e o gráfico da probabilidade em função do número de lançamentos (parte inferior). Esta simulação foi feita com  $\ell = 10$ ,  $r = 2$  e  $n_{max} = 200.000$ . Acima de 45.000 lançamentos, houve pequenas oscilações da probabilidade freqüentista em torno da probabilidade geométrica (que, neste caso, vale 0,36) e a máxima diferença absoluta entre elas foi de, aproximadamente, 0,16%. Nota-se, pela Figura 2.20, que, no último lançamento, o disco não interceptou nenhum dos lados do quadrado, isto é, o centro do disco caiu dentro da região de sucesso (evento favorável).

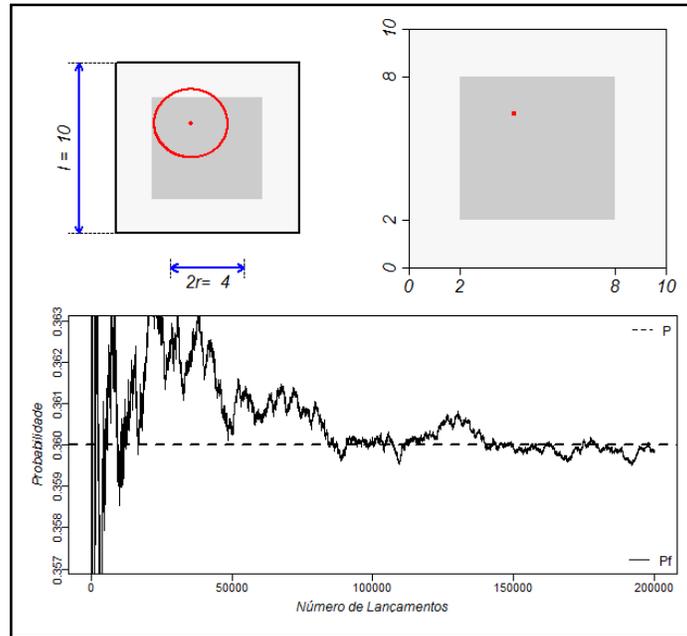


FIGURA 2.24 Desenho representativo de um lançamento do disco e gráfico da probabilidade em função do número de lançamentos.

## 5.5 Problema da agulha de Buffon<sup>4</sup>

### Apresentação do problema

Em 1777, o matemático e filósofo francês George Leclerc, o Conde de Buffon (1707-1788), apresentou, no *Essai d'Arithmétique Morale*, o seguinte problema:

Considere uma família de retas paralelas em  $\mathbb{R}^2$ , em que a distância entre quaisquer duas retas adjacentes arbitrárias vale  $a$ . Tendo-se lançado, ao acaso, uma agulha de comprimento  $\ell$  ( $\ell \leq a$ ) sobre o plano, qual a probabilidade de que essa agulha intercepte uma das retas?

<sup>4</sup> [www.galileu.esalq.usp.br](http://www.galileu.esalq.usp.br)

**Solução - probabilidade geométrica (Tunala, 1995)**

Seja  $x$  a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima e  $\theta$  o ângulo formado entre a agulha e esta mesma reta (Figura 2.25).

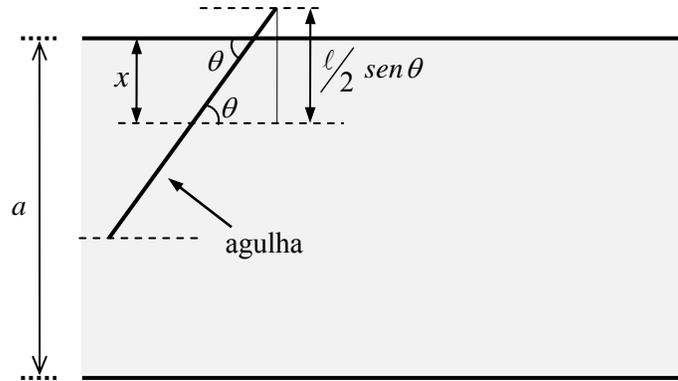


FIGURA 2.25 Representação gráfica da Agulha de Buffon.

Ainda na Figura 2.25, deduz-se que a agulha interceptará a reta mais próxima se  $x \leq \frac{l}{2} \text{sen } \theta$ , ou seja, se o ponto  $(x, \theta)$ , que individualiza a reta mais próxima, pertencer à região  $g$  da Figura 2.26.

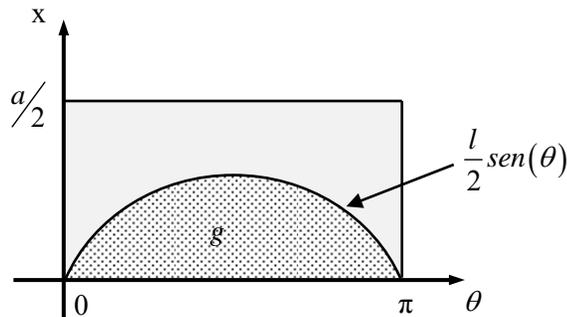


FIGURA 2.26 Região favorável (g) da agulha de Buffon.

O espaço amostral, neste caso, é formado por todos os pontos pertencentes à região que é delimitada pelo retângulo. Portanto, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{área de } g}{\text{área do retângulo}} = \frac{\int_0^\pi \frac{\ell}{2} \text{sen}(\theta) d\theta}{\pi \left(\frac{a}{2}\right)} = -\frac{\ell}{\pi a} [\cos(\pi) - \cos(0)]$$

$$P = \frac{2\ell}{\pi a}. \quad (2.9)$$

### Estimação de $\pi$

O número  $\pi$  (pi) é uma constante matemática que pode ser representada pela relação entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Sua história teve início há cerca de quatro mil anos. Na atualidade, existem muitos métodos que permitem calcular o valor de  $\pi$  de forma precisa. Por exemplo, usando métodos computacionais, pode-se calcular o seu valor com bilhões de casas decimais.

Por meio da associação entre a frequência relativa e a probabilidade geométrica, é possível obter uma estimativa para o valor de  $\pi$ . Isso pode ser feito tanto por simulação lúdica quanto por simulação computacional. Nos dois processos de simulação, a estimativa de  $\pi$  surge igualando-se as expressões 2.4 e 2.9. Assim:

$$\frac{k}{n} = \frac{2\ell}{\hat{\pi}a} \quad \Rightarrow \quad \hat{\pi} = \frac{2\ell n}{ka}. \quad (2.10)$$

O valor de  $\hat{\pi}$  calculado a partir da expressão 2.10 se aproxima do valor real de  $\pi$  à medida que o número de lançamentos aumenta.

### **Descrição da atividade - probabilidade freqüentista**

#### **I) Simulação lúdica**

Para a simulação lúdica da agulha de Buffon, sugere-se o roteiro abaixo.

Passo 1: Distribuir, para cada dupla, um pequeno tabuleiro de madeira com um feixe de retas paralelas, separadas por uma distância  $a$ .

Passo 2: Lançar uma agulha, de comprimento  $\ell$  ( $\ell \leq a$ ),  $n$  vezes sobre o tabuleiro e contar o número  $k$  de vezes que ela intercepta uma das retas.

Passo 3: Calcular a estimativa de  $\pi$  (expressão 2.10) e confrontá-la com o seu valor verdadeiro.

Passo 4: Discutir as possíveis diferenças entre os resultados.

#### **II) Simulação computacional**

Para a simulação computacional da agulha de Buffon pode-se utilizar a rotina A5 (Anexo A) ou construir sua própria rotina, seguindo as orientações dadas pelo fluxograma da Figura 2.27.

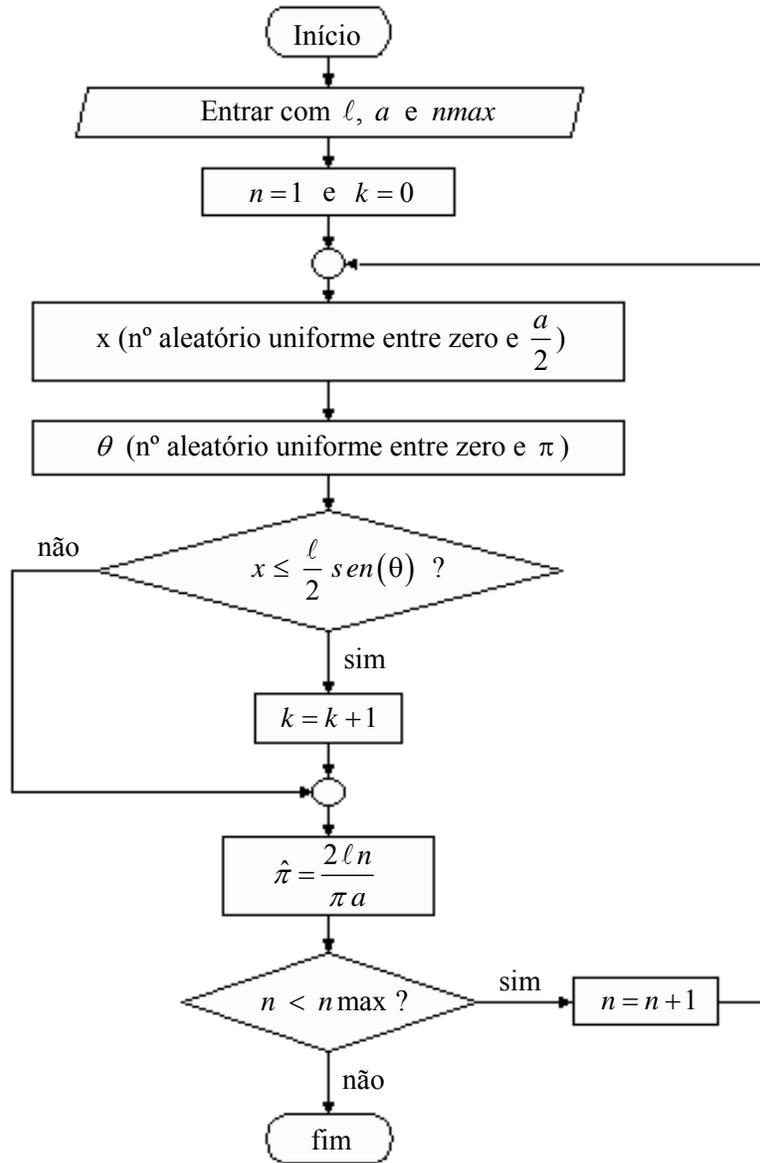


FIGURA 2.27 Fluxograma da simulação computacional do problema da agulha de Buffon.

**Comentários**

Quando o chão da sala for constituído por ladrilhos, o professor pode utilizar algumas retas desse chão em substituição ou complementação ao uso do tabuleiro de madeira, na simulação lúdica. Vale ressaltar que o comprimento da agulha deverá ser menor ou igual à distância entre as retas.

Na Figura 2.28 estão representados o desenho do último lançamento da agulha (parte superior) e o gráfico da estimativa de  $\pi$  em função do número de lançamentos (parte inferior). Esta simulação foi feita com  $\ell = 24$ ,  $d = 30$  e  $n_{max} = 200.000$ . Acima de 75.000 lançamentos houve pequenas oscilações da estimativa de  $\pi$  (linha contínua) em torno de seu valor real (linha pontilhada) e a máxima diferença absoluta entre esses dois valores foi de, aproximadamente, 0,45%. Nota-se que, no último lançamento, a agulha interceptou uma das retas, isto é, ocorreu um sucesso (evento favorável).

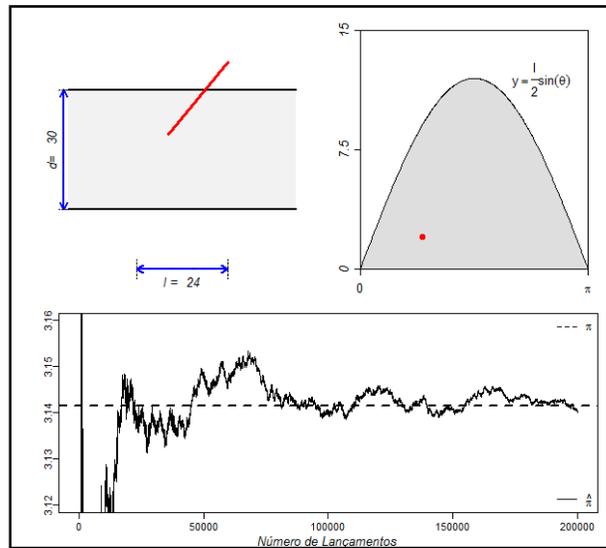


FIGURA 2.28 Desenho representativo de um lançamento da agulha de Buffon e gráfico da estimativa de  $\pi$  em função do número de lançamentos.

## 5.6 Lançamento de dardos

### Apresentação do problema

Uma pessoa, com os olhos fechados, arremessa um dardo em direção a um alvo circular de raio  $r_1$ , tendo em seu centro um disco de raio  $r_2$  ( $r_2 < r_1$ ), conforme Figura 2.29. Se, num determinado arremesso, ela acertar o alvo, qual é a probabilidade de que o disco central seja atingido?

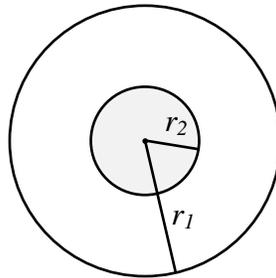


FIGURA 2.29 – Alvos de raios  $r_1$  e  $r_2$ .

### Solução - probabilidade geométrica (Kataoka et al., 2007)

Conforme visto na expressão 2.3, a solução para esse problema é dada pela razão entre as áreas. Assim, a probabilidade desejada será:

$$P = \frac{\text{área do círculo menor}}{\text{área do círculo maior}} = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (2.11)$$

### Descrição da atividade - probabilidade freqüentista

#### I) Simulação lúdica

Para a simulação lúdica do lançamento de dardos, sugere-se a atividade descrita pelos passos a seguir.

- Passo 1: Distribuir  $n$  dardos para cada participante que deverá lançá-los no alvo de raio  $r_1$ .
- Passo 2: Contar o número ( $n$ ) de vezes que cada participante acerta o alvo e o número ( $k$ ) de vezes que ele acerta o disco central de raio  $r_2$ .
- Passo 3: Calcular a frequência relativa (expressão 2.4), individual e coletiva, e confrontar esses resultados com o da probabilidade geométrica (expressão 2.11).
- Passo 4: Discutir as possíveis diferenças entre os resultados.

## **II) Simulação computacional**

Para a simulação computacional do lançamento de dardos, pode-se executar a rotina A6 (Anexo A) ou construir sua própria rotina, seguindo as orientações dadas pelo fluxograma da Figura 2.30.

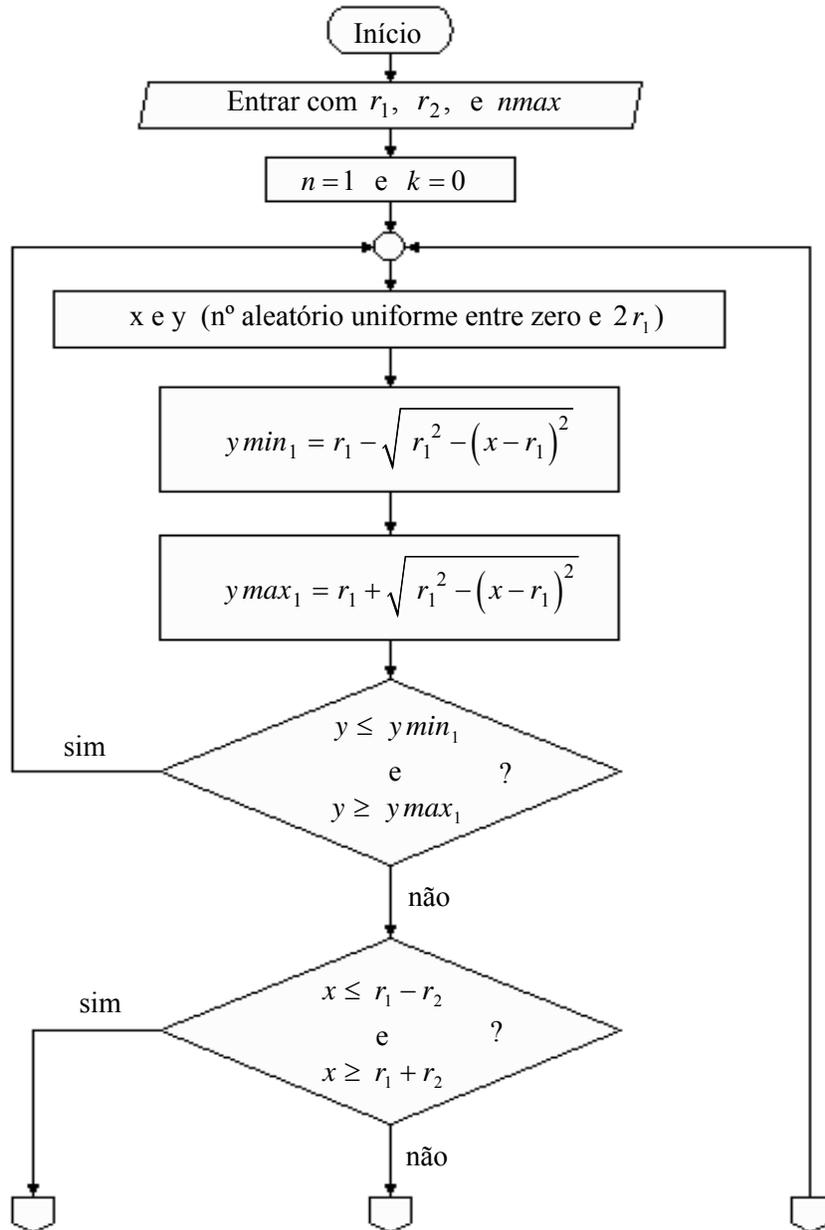
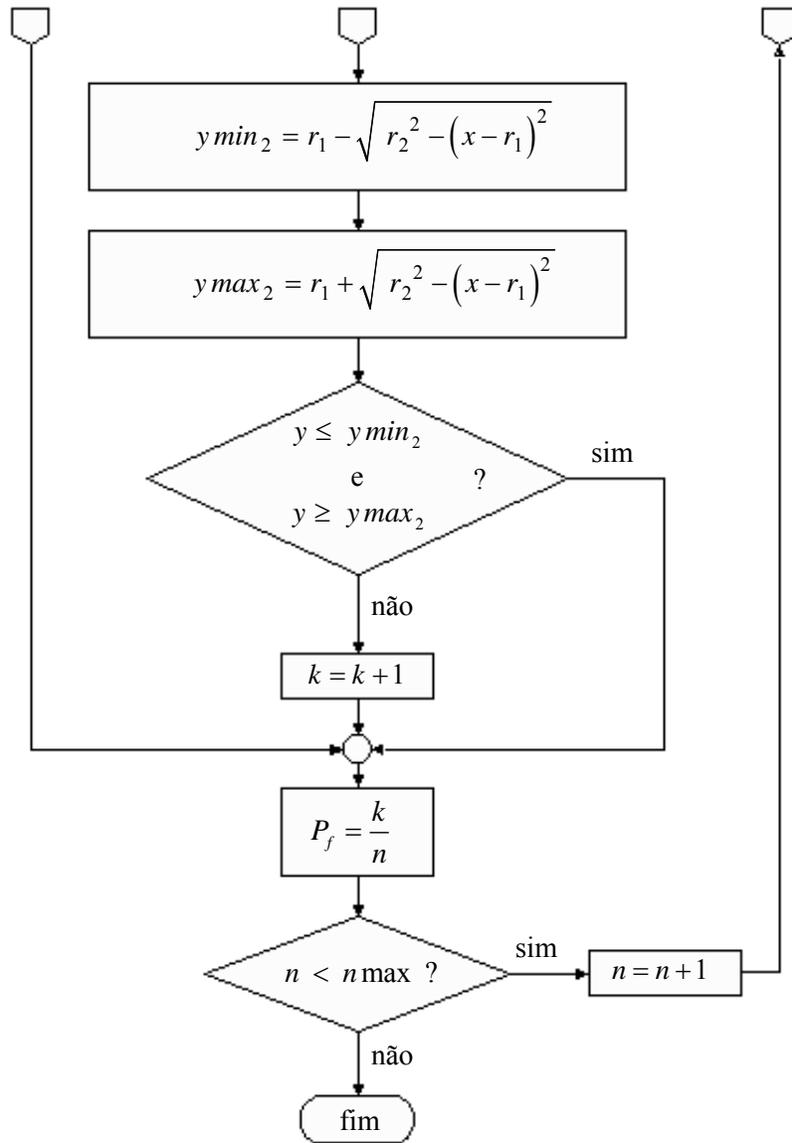


FIGURA 2.30 Fluxograma da simulação computacional do lançamento de dardos (...Continua...)

FIGURA 2.30 Cont.



**Comentários**

Na Figura 2.31 estão representados o desenho do último arremesso do dardo (parte superior) e o gráfico da probabilidade em função do número de arremessos (parte inferior) para  $r_1 = 10$ ,  $r_2 = 5$  e  $n_{max} = 250.000$ . Acima de 30.000 repetições houve pequenas oscilações da probabilidade freqüentista em torno da probabilidade geométrica e a máxima diferença absoluta entre elas foi de, aproximadamente, 0,14%. Como exemplo nota-se que, no último arremesso, o dardo não acertou o disco central, isto é, ocorreu um evento desfavorável.

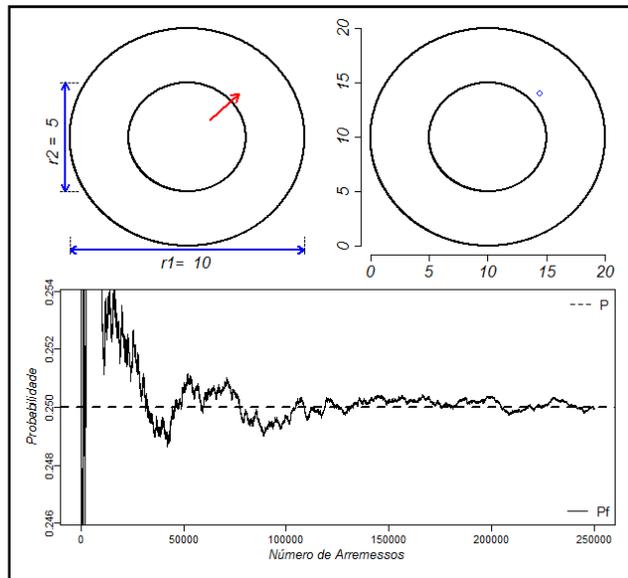


FIGURA 2.31 Desenho representativo do arremesso de um dardo e gráfico da probabilidade em função do número de arremessos.

### **5.7 Comentários gerais sobre as atividades**

Por meio da simulação computacional, a estabilização da frequência relativa em torno da probabilidade geométrica se torna muito mais evidente do que na simulação lúdica. Isso ocorre porque, obviamente, neste caso, o número de repetições, para o tempo da aula, pode ser bastante elevado.

Uma das vantagens de se usar o chão da sala de aula para as simulações lúdicas das subseções 5.3, 5.4 e 5.5 é tirar os alunos da inércia, isto é, fazer com que eles participem mais ativamente do processo de ensino. Ao saírem de suas cadeiras, esses alunos, provavelmente, irão se interessar mais pelo assunto que está sendo abordado e a aula se tornará bem mais descontraída. Outra vantagem é que isso permite uma maior socialização entre os alunos e entre professor-aluno.

Na Tabela 2.1 foram feitas algumas considerações a respeito das seqüências didáticas de todas as subseções. Essas seqüências poderão ser exploradas na Educação Básica e no Ensino Superior de acordo com os interesses e os objetivos dos professores e alunos, sendo nível de exploração e de ensino são apenas sugestões.

TABELA 2.1 Pré-requisitos e níveis de exploração sugeridos para as seqüências apresentadas.

SEQÜÊNCIA	PRÉ-REQUISITO	NÍVEL DE ENSINO SUGERIDO	NÍVEL DE EXPLORAÇÃO SUGERIDO
5.1 Divisão de um segmento em duas partes	Introdução à geometria	Fundamental	EA
		Médio	EEA
		Superior	EEA
5.2 Problema do macarrão	Geometria analítica	Fundamental	EA
		Médio	EEA
		Superior	EEA
5.3 Lançamento da moeda entre duas retas paralelas	Noções de limites	Fundamental	EA
		Médio	EA
		Superior	EEA
5.4 Jogo dos discos	Área de quadrados Função quadrática	Fundamental	EA
		Médio	EA
		Superior	EEA
5.5 Problema da agulha de Buffon	Integrais	Fundamental	EA
		Médio	EEA
		Superior	EEA
5.6 Lançamento de dardos	Área de círculos	Fundamental	EA
		Médio	EEA
		Superior	EEA

\*EA – execução da atividade, EEA – execução e exploração da atividade

Na coluna “Nível de exploração”, da Tabela 2.1, EA refere-se à execução da atividade de forma prática, sem o desenvolvimento teórico da probabilidade geométrica, mas que não impede o professor de fomentar, junto aos alunos, algumas deduções intuitivas, sem um elevado grau de aprofundamento. Por outro lado, EEA refere-se à execução e exploração da atividade. O grau dessa exploração irá depender do nível escolar do aluno. Por exemplo, no problema da agulha de Buffon (subseção 5.5), o cálculo da área sob a curva  $\frac{\ell}{2} \text{sen}(\theta)$  exige o conhecimento de integral, conteúdo disponível apenas para alunos do Ensino Superior. Assim, na Educação Básica, a fórmula da probabilidade geométrica (2.9) pode ser apresentada sem o seu desenvolvimento formal.

A vantagem em executar cada rotina do Anexo A na sala de aula é mostrar o processo de simulação passo a passo, isto é, representar graficamente cada repetição do experimento. Porém, como o tempo de aula é curto, o número máximo de repetições, em uma aula, seria bem inferior ao utilizado nesse trabalho (200.000 repetições). Em suas formas originais, o tempo médio gasto para a execução de cada uma dessas rotinas em um computador com processador Intel Pentium 4, 2666 MHz, 512 megabytes de memória RAM e 120 gigabytes de disco rígido foi de, aproximadamente, 23 horas. Como o interesse nesse trabalho era apenas o resultado final, foram feitas algumas modificações nessas rotinas, de forma que a representação gráfica ocorresse apenas na última repetição. Com isso, houve uma enorme redução do tempo para cada execução das rotinas: O tempo médio caiu de 23 horas para 6 minutos.

## 6 CONCLUSÕES

Com este capítulo concluiu-se que:

- as simulações, lúdicas e computacionais, dão credibilidade aos resultados teóricos obtidos para todos os problemas relacionados à probabilidade geométrica;
- o método estocástico denominado “problema da agulha de Buffon” fornece excelentes estimativas do valor de  $\pi$  para um número elevado de lançamentos da agulha;
- a simulação computacional fornece melhores resultados que a lúdica, para um mesmo intervalo de tempo, tendo em vista que o número de repetições ou lançamentos, provavelmente, será muito mais elevado. Porém, tomando com referência a Educação Básica, a simulação lúdica deve ser escolhida, por permitir ao professor, por meio de um processo manual de experimentação, a apresentação e a discussão com os alunos dos conceitos de probabilidade, estimação, variabilidade e fenômeno de convergência, dentre outros;
- em cada uma das seqüências didáticas, os valores da probabilidade freqüentista, obtidos na simulação computacional, tiveram pequenas oscilações em torno da probabilidade geométrica, para um número elevado de repetições ou lançamentos. Esses resultados mostraram que os algoritmos utilizados cumpriram bem os seus objetivos. Porém, é possível que, em alguma execução desses algoritmos, esses resultados não sejam satisfatórios, tendo em vista as possíveis oscilações no gerador de números pseudo-aleatórios do software R;

- as atividades experimentais são excelentes ferramentas para o desenvolvimento da capacidade crítica dos alunos e para torná-los membros participativos do processo de ensino;
- as atividades relacionadas à probabilidade geométrica podem ser aplicadas em diferentes níveis de ensino e com diferentes graus de aprofundamento.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training teachers to teach probability. **Jornal of Statistics Education**. Granada, v. 12, n.1, 2004. Disponível em: <<http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html>>. Acesso em 16 mar 2008.

BATANERO, C.; GODINO, J. **Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros**. Granada: Universidade de Granada, 2002. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm>>. Acesso em 14 mar 2008.

BATISTA, J. L. F. Uso da teoria de probabilidades geométricas para estimar o comprimento total dos canais de escoamento numa bacia hidrográfica. **IPEF**, Piracicaba, n. 37, p. 73-74, 1987.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília, 1998.

CORDANI, L. K. **Estatística para todos**. São Paulo: ABE, 2006, 32 p. Apostila. Disponível em: <[http://www.redeabe.org.br/OFICINA%20site\\_educacao.pdf](http://www.redeabe.org.br/OFICINA%20site_educacao.pdf)>. Acesso em: 15 mar 2008.

COSTA, R. R. **A formação continuada do professor de matemática a partir da sua prática pedagógica**. 2005. 111 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, PR.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista**: estudo epistemológico e didático. 1994. 151 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COUTINHO, C. Q. S. Estatística e probabilidade no currículo da escola básica. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: USP.FE, 2004.

COUTINHO, C. Q. S. Using experimental approaches for teaching probability: working on a project using face to face and virtual sessions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 7., 2006, Salvador. Disponível em: < [http://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/PDFs/InvitedPapers/6B3\\_COUT.pdf](http://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/PDFs/InvitedPapers/6B3_COUT.pdf) >. Acesso em: 16 mar. 2008.

GATTUSO, L.; PANNONE, M. A. Teacher's training in a statistics teaching experiment. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 6., 2002, Cape Town. Disponível em: <[http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/6e3\\_gatt.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/6e3_gatt.pdf)>. Acesso em: 12 mar. 2008.

GONÇALVES, H. J. L.; MUNIZ, C. A. A Educação Estatística no Ensino Fundamental: discussões sobre a práxis de professoras que ensinam matemática no interior de Goiás. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 1, p. 26-33, 2006.

GONÇALVES, M. C. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. 2004. 148 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

INNABI, H. Teaching statistics for critical thinking. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 6., 2002, Cape Town. Disponível em: <[http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2b3\\_inna.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2b3_inna.pdf)>. Acesso em: 15 mar. 2008.

KATAOKA, V. Y.; OLIVEIRA, A.C. S.; RODRIGUES, A.; SOUZA, A. A.; OLIVEIRA, M. S. Statistical reasoning adequacy on Elementary School Mathematics teachers for interdisciplinary working, in Lavras, Minas Gerais, Brazil. In: INTERNATIONAL STATISTICAL INSTITUTE, 56., 2007, Lisboa. **Proceedings...** Lisboa, Portugal: Internacional Statistical Institute, 2007.

KATAOKA, V. Y.; RODRIGUES, A.; OLIVEIRA, M. S. **Utilização do conceito de probabilidade geométrica como recurso didático no Ensino de Estatística**. Lavras: UFLA/DEX, 2007. (Curso de Extensão).

LOPES, C. A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular**. 1998. 126 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

LOPES, C. A. E. O ensino de probabilidade e estatística na escola básica nas dimensões do currículo e da prática pedagógica. In: SIMPOSIO IBEROAMERICANO DE ENSEÑANZA MATEMÁTICA, 16., 2004, Castellón. **Proceedings...** Castellón: Universitat Jaumei, 2004.

LOPES, C. A. E.; MEIRELLES, E. C. S. Estocástica nas séries iniciais. In: ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 18., 2005, Campinas. **Anais...** Campinas, SP: UNISINOS, 2005.

LOPES, C. E. A. Stochastics and the professional knowledge of teachers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 7., 2006, Salvador. Disponível em: < <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/C107.pdf> >. Acesso em: 15 mar. 2008.

MAGALHÃES, M. N. Conceitos básicos em probabilidade. In: \_\_\_\_\_. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 2.ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2006. Cap. 1. p.1-46.

MEYER, P. L. Introdução à probabilidade. In \_\_\_\_\_. **Probabilidade: aplicações à estatística**. 2.ed. Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983. Cap. 1, p.1-21. Título original: Introductory probability and statistical applications.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3.ed. New York: McGraw-Hill, 1974. 556p.

MORIN, A. How far can we go in the statistics curriculum development at the secondary school level to reach successfully the objective? In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 7., 2006, Salvador. Disponível em: < [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2d4\\_mori.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2d4_mori.pdf) >. Acesso em: 15 mar. 2008.

NICHOLSON, J.; DARNTON, C. Mathematics teachers teaching statistics: what are the challenges for the classroom teachers? In: INTERNATIONAL STATISTICAL INSTITUTE 54., 2003. Berlin: ISI, 2003. Disponível em: <<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/3463.pdf> >. Acesso em: 15 mar. 2008.

PATERLINI, R. R. O problema do jogo dos discos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v.48, p. 13-20, 2002.

PECK, R.; GOULD, R. **Preparing secondary teachers to teach statistics: a distance education model**. In: INTERNATIONAL STATISTICAL INSTITUTE, 55., 2005. Sidney: ISI, 2005. Disponível em: <<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/13/Peck-Gould.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2008.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>. Acesso em: 12 mar. 2008.

SERRADÓ, A.; AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J. M. Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 7., 2006, Salvador. Disponível em: <[http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2E4\\_SERR.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2E4_SERR.pdf)>. Acesso em: 15 mar. 2008.

SILVA, I. A. **Probabilidade: a visão laplaciana e a visão freqüentista na introdução do conceito**. 2002. 173 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 20, p. 16-22, 1995.

WAGNER, E. Probabilidade geométrica – O problema do macarrão e um paradoxo famoso, **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 34, p. 28-35, 1997.

WATSON, J. M. Issues for statistical literacy in the middle school. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 7., 2006, Salvador. Disponível em: <[http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/6C1\\_WATS.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/6C1_WATS.pdf)>. Acesso em: 15 mar. 2008.

## **CAPÍTULO 3**

### **QUINCUX DE GALTON**

## 1 RESUMO

SANTOS, Geraldino Moura dos. Quincux de Galton. In: \_\_\_\_\_. **Conceitos estatísticos no desenvolvimento de metodologias interdisciplinares de ensino**. 2008, Cap. 3, p. 69-106. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG\*.

O Quincux de Galton é um aparelho que permite demonstrar mecanicamente a geração da distribuição normal. Consiste de um quadro composto por um conjunto de fileiras de pregos (que tem a função de impedir a queda livre de pequenas esferas) e de divisórias (nas quais essas esferas são distribuídas). Buscou-se, com a realização deste trabalho, discutir alguns aspectos teóricos, com o intuito de auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos na manipulação do Quincux de Galton e, por conseguinte, estimular a sua utilização no ensino interdisciplinar da Estatística. Para tal, primeiramente, procurou-se descrever alguns modelos desse aparelho, dos quais foi tomado, como foco para a realização desse trabalho, o modelo denominado de um único estágio e com base neste, dois aparelhos foram construídos. Em seguida, realizaram-se dois tipos de simulação: a lúdica (utilizando apenas um dos aparelhos construídos) e a computacional (via web). Observou-se que, para um grande número de esferas (o que é equivale a várias repetições), o histograma formado pelas esferas ou pela frequência observada tinha o aspecto da curva normal. No caso do histograma da frequência observada/simulação lúdica, tal suposição foi comprovada com a aplicação do teste de Kolmogor-Simnorv. Vale salientar que, na simulação lúdica, essa curva foi mais achatada em relação à curva esperada do que na simulação computacional, tendo em vista os erros envolvidos no processo de experimentação (à própria construção do aparelho, a quantidade de esferas soltas simultaneamente e irregularidade nos diâmetros das esferas, dentre outros). O Quincux de Galton pode ser aplicado em todos os níveis de ensino, devendo o formalismo matemático ser omitido na Educação Básica, devido à complexidade dos conceitos envolvidos.

---

\* Comitê Orientador: Marcelo Silva de Oliveira – UFLA (Orientador), Verônica Yumi Kataoka (Co-orientadora) - UFLA

## 2 ABSTRACT

SANTOS, Geraldino Moura dos. quincunx of Galton. In:\_\_\_\_\_. **Statistical concepts in the development of methodologies teaching interdisciplinary**. 2008, Chap. 3, p. 69-106. Dissertation (Master Program in Statistics and Agricultural Experimentation) – Federal University of Lavras, Lavras, MG\* .

Galton's Quincunx is an apparatus that allows to demonstrate the generation of the normal distribution mechanically. It consists of a picture composed by a group of arrays of nails (that has as function to impede the fall free from small spheres) and of slots (in which those spheres are distributed). The objective of this chapter was to discuss some theoretical aspects, with intention of aiding the understanding of the concepts involved in the manipulation of Quincunx, and, consequently, to stimulate your use in the Statistics teaching interdisciplinary. For such, firstly it tried to describe some models of that apparel, of the which it was taken, as focus for the accomplishment of that work, the denominated model of an only apprenticeship and with base in this, two apparels were built. Soon after they took place two simulation types: the ludic (just using one of the built apparels) and the computational (he/she saw web). it was Observed that for a great number of spheres, the one that is equal to several repetitions, the histogram formed by the spheres or for the observed frequency, they had the aspect of the normal curve. In the case of the histogram of the frequency observed frequency/ ludic simulation such supposition it was proven with the application of the test of Kolmogor-simnorv. It is worth to point out, that in the ludic simulation that curves it was flater in relation to the expected curve than in the computational simulation, tends in view the mistakes involved in the experimentation process (to the own construction of the apparel, amount of free spheres simultaneously; irregularity in the diameters of the spheres; among other). finally, Quincux of Galton can be applied in all the teaching levels, and in the Basic Education the mathematical formalism should be omitted, due the complexity of the involved concepts.

---

\* Guidance Committee: Marcelo Silva de Oliveira –UFLA (Advisor), Verônica Yumi Kataoka (Co- advisor) - UFLA

### 3 INTRODUÇÃO

A distribuição normal é a mais importante distribuição de probabilidades da Estatística devido à sua grande aplicação nos mais variados campos do conhecimento. Além disso, segundo Ferreira (2005), algumas outras razões podem ser enumeradas, como:

- a grande maioria das técnicas empregadas na Estatística é baseada na distribuição normal;
- muitos são os fenômenos aleatórios cujos comportamentos podem ser descritos precisamente ou de forma aproximada pelo modelo probabilístico normal;
- a distribuição normal é a forma limitante de outras distribuições de probabilidades, como consequência do teorema central do limite;
- muitas estatísticas apresentam distribuições assintóticas normais, ou seja, a distribuição da estatística se aproxima da normal à medida que o tamanho da amostra cresce.

Como já dito, o comportamento de muitos fenômenos que ocorrem na natureza formam, aproximadamente, uma curva normal. Atualmente, já existem aparelhos que podem reproduzir parcialmente tais fenômenos, como, por exemplo, o “Quincunx de Galton” ou simplesmente “Tábua de Galton”.

No caso do Quincunx de Galton, o que de fato ocorre é a aproximação normal à binomial. A precisão dessa aproximação dependerá de dois fatores: o número de fileiras de pregos e o número de esferas utilizadas. Essa precisão também pode ser influenciada pelos erros envolvidos no processo de experimentação. Alguns se devem à própria construção do aparelho e outros à execução da simulação lúdica.

Pelo exposto, verifica-se que, utilizando o Quincux, o professor pode facilitar o ensino, tanto da distribuição binomial quanto a sua aproximação normal, já que o aluno pode participar ativamente do processo de construção do conhecimento, associando a teoria à prática por meio de simulações lúdicas. Além disso, muitas outras discussões podem ser fomentadas com essa atividade, como, por exemplo, a semelhança entre o movimento das esferas pelas linhas de pregos no Quincux de Galton e o movimento browniano descrito na teoria cinética dos gases, mas que não será discutido neste trabalho.

Com base nessas idéias, o principal objetivo deste capítulo é discutir alguns aspectos teóricos, com o intuito de auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos na manipulação do Quincux e, por conseguinte, estimular a sua utilização no ensino interdisciplinar da Estatística.

Para tal, primeiramente, descreveram-se alguns modelos desse aparelho (subseção 4.1) e, em seguida, foi feito um estudo detalhado sobre um desses modelos (subseções 4.2 e 4.3). Para comprovar essa teoria, dois Quincux foram construídos e suas descrições encontram-se na subseção 5.1. Os resultados da simulação lúdica, com trinta repetições, utilizando um desses aparelhos, bem como suas análises, encontram-se na subseção 5.2. Para efeito de comparação, também foram realizadas simulações computacionais. Finalmente, na subseção 5.3, foram apresentados e descritos alguns modelos do Quincux propostos por Piaget e Inhelder, para o trabalho com crianças.

## 4 ASPECTOS TEÓRICOS

### 4.1 Descrição do Quincux de Galton e notas históricas

O Quincux de Galton, como o próprio nome sugere, foi inventado por Francis Galton, por volta de 1877 (Gayon, 1998, p. 122). Este aparelho é composto de um quadro vertical com fachada de vidro e parte superior contendo um funil, dentro do qual são soltas pequenas esferas de metal (vidro ou plástico)<sup>5</sup> que, ao caírem, encontram várias fileiras de pequenos pregos (ou alfinetes) igualmente espaçadas e com a finalidade de impedir a queda livre das mesmas.

A origem do nome desse aparelho se deve ao fato de que os pregos são arranjados de tal forma que o conjunto de cinco pregos forma um quadrado ou retângulo, com um em cada vértice e o outro no centro (Gass & Assad, 2005, p. 17), conforme Figura 3.1.

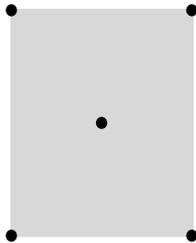


FIGURA 3.1 Esquema de um quincux.

Quando a esfera choca-se com um desses pregos, ela pode cair para a direita ou para a esquerda, com igual probabilidade e isso ocorre até o fundo do aparelho, em que existe uma série de divisórias, também igualmente espaçadas.

---

<sup>5</sup> No Quincux original foram utilizadas balas de chumbo (Gayon, 1998).

Como resultado final, as esferas formam um histograma que, segundo Gayon (1998), mostra claramente o efeito de uma distribuição binomial. O mesmo autor relata que, se o número de esferas e o número de fileiras de obstáculos forem suficientemente elevados, a distribuição resultante será, aproximadamente, uma normal.

Consta, na literatura, que Galton fez mais de um modelo desse aparelho (Bulmer, 2003, p. 183; Gayon, 1998, p. 125), sendo dois desses representados na Figura 3.2.

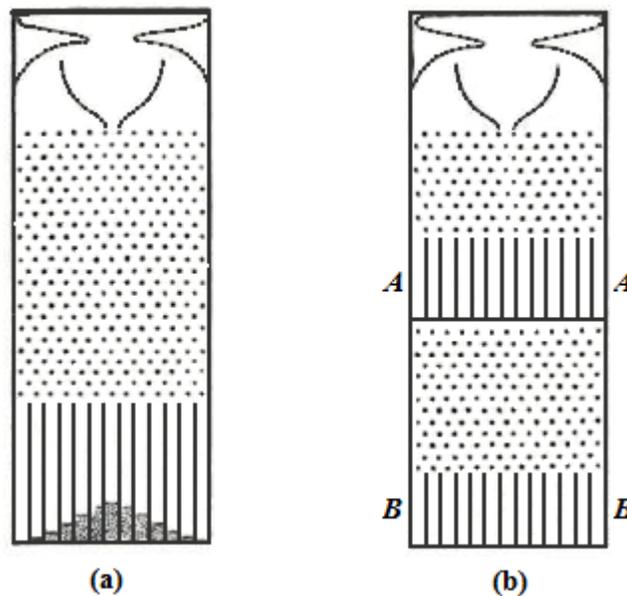


FIGURA 3.2 O Quincux de um estágio (a) e o Quincux duplo (b).  
Fonte: adaptado de Bulmer (2003).

Na Figura 3.2 (a) está representado o modelo de um único estágio, que é o mais comum. Neste, existe uma única camada de divisórias, na qual pode haver, como já foi dito, a formação de uma distribuição normal, quando uma

grande quantidade de esferas for solta no topo do aparelho. As suas propriedades serão estudadas com detalhes nas próximas subseções deste capítulo.

Por outro lado, na Figura 3.2 (b) apresenta-se o Quincux duplo, que consiste de dois estágios: *AA* e *BB*. Cada divisória da camada *AA* possui uma porta de saída, que pode ser aberta, independentemente das portas dos compartimentos vizinhos. Com todas as saídas fechadas, haverá a formação de uma distribuição normal nessa camada, quando um número suficientemente grande de esferas for solta no funil. Assim, segundo Gayon (1998), essa normal funciona como uma geratriz de outras normais que serão formadas nas divisórias da camada *BB*, após a abertura de uma ou mais dessas saídas. A média da nova distribuição gerada será diferente para cada compartimento da camada *AA*. Isso também pode ocorrer se duas ou mais saídas de compartimentos vizinhos forem abertas simultaneamente. Esses fatos podem ser visualizados com mais clareza na Figura 3.3.

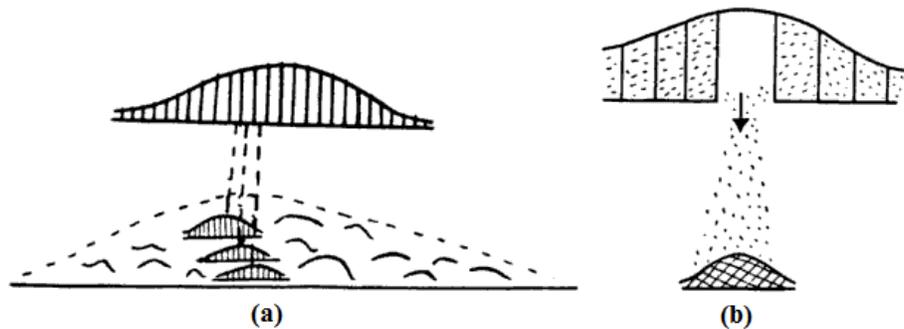


FIGURA 3.3 Representação esquemática do princípio do Quincux de dois níveis, mostrando que a distribuição normal pode ser dividida dentro de várias outras distribuições normais individuais.  
Fonte: adaptado de Gayon (1998).

Na Figura 3.3 (a) são apresentadas as miniaturas da distribuição normal formadas nas divisórias da camada *BB*. Apesar de essa figura ter um aspecto tri-

dimensional, na prática, isso não ocorrerá, tendo em vista que se duas ou mais divisórias de AA fossem abertas simultaneamente, as esferas de uma delas iriam se misturar com as da outra, formando uma única distribuição resultante, conforme está representado na Figura 3.3 (b). Tal esboço foi feito apenas para ilustrar o efeito individual de cada uma dessas divisórias.

Além do modelo de Quincux duplo descrito anteriormente, Galton utilizou outro em seu artigo de 1877, *On sweet peãs* (Uchii, 2008), cujo esboço está apresentado na Figura 3.4.

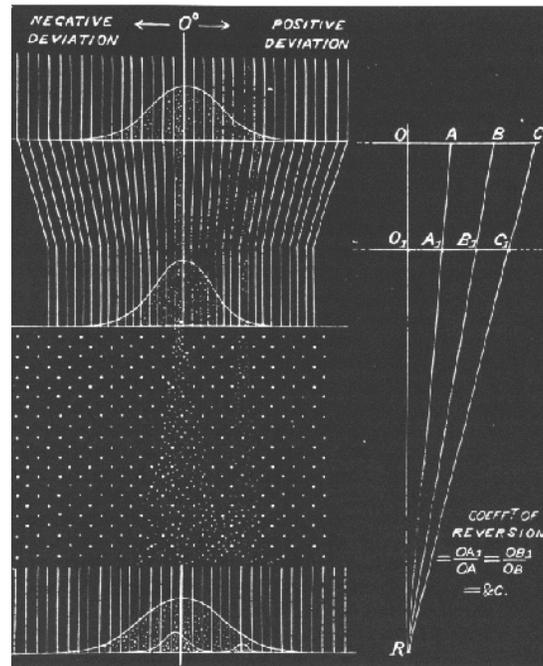


FIGURA 3.4 Esboço de uma versão do Quincux duplo apresentado por Galton em seu artigo de 1877.  
Fonte: Uchii (2008).

Na Figura 3.4 foram ilustradas duas distribuições normais, no primeiro estágio e três no segundo. Observa-se que, no primeiro estágio, as duas

distribuições possuem médias iguais e desvios padrões diferentes, enquanto que, no segundo, as médias e os desvios padrões são diferentes de uma distribuição para a outra. Essa última consideração permite afirmar que a distribuição das esferas nas camadas inferiores depende da divisória que a gerou. Esse fato permite estudar a relação entre duas variáveis, como, por exemplo, a dependência da altura do filho em relação à dos seus pais. Porém, esse assunto não será abordado neste trabalho, podendo ser tema de futuros estudos.

Conforme citado anteriormente, nas próximas subseções será feito um estudo detalhado do Quincux de um único estágio (Figura 3.2 (a)).

#### **4.2 Distribuição das esferas em relação ao número de fileiras**

Nesta subseção, faz-se um estudo teórico sobre a distribuição das esferas, neste caso uma binomial, em relação ao número de fileiras de pregos, para o Quincux de um estágio.

##### **Distribuição binomial**

No Quincux apresentado na Figura 3.5, considere  $n=7$  o número de fileiras de pregos. Logo, o número de divisórias deve ser igual a  $n + 1 = 8$ .

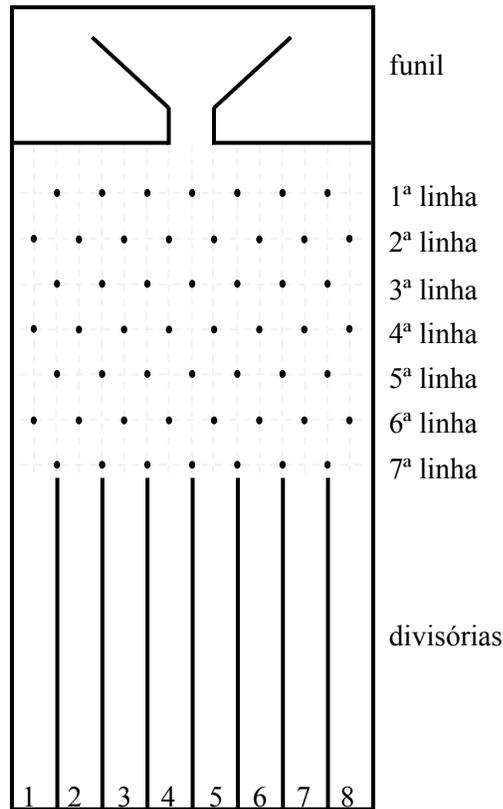


FIGURA 3.5 Desenho representativo de um Quincunx de Galton com sete fileiras de pregos e, conseqüentemente, oito divisórias.

Nota-se que cada esfera, após ser solta no funil, irá atingir inicialmente o prego central da primeira linha, podendo cair para a direita do observador, com probabilidade  $p$  ou para a sua esquerda, com probabilidade  $1 - p$ . Nas condições ideais, ocorrerá a mesma situação para todas as outras fileiras. Assim, pode-se afirmar que o fenômeno descrito constitui um ensaio independente de Bernoulli, tendo em vista que a esfera colidirá com apenas um prego em cada uma delas. Assim, o número de vezes que uma esfera cai para a direita do observador, até atingir uma das divisórias, será uma variável aleatória com distribuição binomial

com parâmetros  $n$  e  $p$ . Definindo essa variável como  $X$ , a probabilidade dela assumir um valor específico será:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x},$$

em que  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Para um Quincux ideal, a probabilidade de sucesso é  $p = \frac{1}{2}$ . Logo, para essa condição tem-se:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-x};$$

$$\Rightarrow P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.1)$$

Vale ressaltar que cada divisória corresponde a um valor específico de  $X$ . Essa relação pode ser comprovada por meio da Tabela 3.1.

TABELA 3.1 Relação entre a variável  $X$  e o número da divisória

Divisória $I$	Variável $X$
1	0
2	1
3	2
.	.
.	.
.	.
$N$	$n-1$
$n+1$	$n$

Nota-se, observando-se os resultados da Tabela 3.1, que o valor da variável  $X$  pode ser encontrado pela expressão  $X = i - 1$ , em que  $i$  corresponde ao número da divisória. Nessas condições, a expressão 3.1 pode ser reescrita como:

$$P(X = i - 1) = \frac{n!}{(i - 1)!(n - i + 1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (3.2)$$

em que  $i = 1, 2, \dots, n + 1$  (neste trabalho, a ordem crescente da numeração das divisórias foi considerada da esquerda para a direita do observador).

A probabilidade definida pela expressão 3.2 representa a probabilidade de sucesso da divisória  $i$ . Ela assumirá um valor mínimo nas divisórias extremas e um valor máximo na(s) divisória(s) central(is), conforme descrito a seguir.

#### Probabilidade mínima

A função que fornece o valor mínimo para a expressão 4.2 pode ser encontrada substituindo-se  $i$  por 1 ou por  $n + 1$ , assim:

$$P_{min} = P(X = 1 - 1) = P(X = n + 1 - 1) = \frac{n!}{(n + 1 - 1)! [n - (n + 1) + 1]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

que, após simplificada, se torna:

$$P_{min} = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.3)$$

#### Probabilidade máxima

Por outro lado, para encontrar a função que define o valor máximo da expressão 3.2, é necessário, primeiramente, verificar se  $n$  é par ou ímpar. Assim, podem ocorrer duas situações:

**I)  $n$  é par**

Nesta condição, haverá um número ímpar de divisórias e a probabilidade definida pela expressão 3.2 assumirá o seu valor máximo em apenas uma das divisórias, ( $i = \frac{n}{2} + 1$ ). Então, substituindo-se o valor de  $i$  em tal expressão, obtém-se:

$$P_{max} = P\left(X = \frac{n}{2} + 1 - 1\right) = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2} + 1 - 1\right)! \left[n - \left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1\right]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

Que, após simplificada, se torna:

$$P_{max} = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.4)$$

**II)  $n$  é ímpar**

Nesta condição, haverá um número par de divisórias e a probabilidade definida pela expressão 3.2 assumirá o seu valor máximo nas duas divisórias centrais, que são definidas por:  $i = \frac{n+1}{2}$ ; e  $i = \frac{n+3}{2}$ . Estes dois valores de  $i$  fornecerão o mesmo resultado para a probabilidade de  $X$ , tendo em vista que, para  $p = \frac{1}{2}$ , a distribuição binomial é simétrica em relação ao valor mais provável da variável  $X$  (Ferreira, 2005, p. 147). Isso pode ser comprovado substituindo-se esses valores na expressão 3.2, então:

$$P_{max} = P\left(X = \frac{n+1}{2} - 1\right) = \frac{n!}{\left(\frac{n+1}{2} - 1\right)! \left[n - \left(\frac{n+1}{2}\right) - 1\right]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

ou:

$$P_{max} = P\left(X = \frac{n+3}{2} - 1\right) = \frac{n!}{\left(\frac{n+3}{2} - 1\right)! \left[n - \left(\frac{n+3}{2} - 1\right)\right]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

que, simplificado, resulta em:

$$P_{max} = \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.5)$$

Nota-se, claramente, que essa expressão é diferente daquela estabelecida pela expressão 3.4.

### Considerações sobre a distribuição da variável X

Nota-se, por meio da expressão 3.3, que a probabilidade mínima de X se aproxima de zero à medida que o número de fileiras aumenta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

logo,  $n \rightarrow \infty$ ,  $P_{min} \rightarrow 0$ .

Isso significa que, aumentando o valor de  $n$ , o número de esferas também deverá aumentar para se ter a garantia de que pelo menos uma delas cairá nas divisórias extremas. Mas, nesta situação, muitas esferas cairão nas divisórias centrais, o que exigirá uma altura maior para essas divisórias. Nota-se, então, que o custo é maior para a construção do Quincux com o aumento do número de fileiras, além de torná-lo pouco manuseável.

Por outro lado, quanto maior o número de fileiras, maior será a garantia de que o histograma formado pelas esferas, considerando um número suficiente

delas, se aproxima da curva normal. Esse estudo será feito de forma mais detalhada na próxima subseção.

### 4.3 Distribuição das esferas em relação ao total delas

Conforme descrito na subseção anterior, a probabilidade de sucesso, que é representada, nesta subseção, por  $p_i$ , depende da divisória  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ). Retomando-se a expressão 3.2, essa probabilidade é dada por:

$$p_i = P(X = i - 1) = \frac{n!}{(i - 1)!(n - i + 1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Verificou-se que essa probabilidade (expressão 3.2) possui um valor mínimo (expressão 3.3) e um valor máximo (expressão 3.4 ou 3.5), ambos dependendo do número de fileiras de pregos.

A soma das probabilidades de sucesso para todas as divisórias deverá ser igual à unidade, tendo em vista que uma determinada esfera, após ser solta no funil, cairá com certeza em uma das divisórias, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1.$$

Seja  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}$  o número de esferas que caem, respectivamente, nas divisórias  $1, 2, \dots, n + 1$ . Nota-se, então, que essas variáveis seguem conjuntamente uma distribuição multinomial com parâmetros  $m$  e todos os  $p_i$ , em que  $m$  representa o número total de esferas e  $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$  são as probabilidades de sucesso correspondentes às divisórias  $1, 2, \dots, n + 1$ . Assim:

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_{n+1} = y_{n+1}) = \frac{m!}{y_1! y_2! \dots y_{n+1}!} p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_{n+1}^{y_{n+1}},$$

em que  $\sum_{i=1}^{n+1} y_i = m$ .

Dessa forma, a distribuição marginal da variável  $Y_i$  será dada por:

$$P(Y_i = y_i) = \frac{m!}{y_i! (m - y_i)!} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{m - y_i}, \quad (3.6)$$

que representa a probabilidade de  $Y_i$  esferas caírem na divisória  $i$ .

A esperança matemática da variável  $Y_i$  será dada por:

$$E(Y_i) = m p_i. \quad (3.7)$$

#### **Aproximação normal à binomial**

Como dito, o Quincux apresenta  $(n+2)$  distribuições binomiais, uma representando o número de vezes que uma esfera cai para a direita do observador – variável aleatória  $X$  (expressão 3.2) e as outras correspondentes ao número de esferas que caem numa determinada divisória  $i$  (expressão 3.6) – marginais da variável aleatória  $Y_i$ . Conseqüentemente, com o aumento do número de esferas, baseado no teorema central do limite (Magalhães, 2006; Ferreira, 2005; Mood et al., 1974), cada uma dessas distribuições se aproxima cada vez mais de uma curva normal, ou seja, podem ser definidas  $(n+2)$  distribuições normais, com funções de densidade de probabilidade descritas a seguir.

**1º caso) Correspondente à variável aleatória  $X$**

Quando o número de fileiras de pregos ( $n$ ) aumenta, a variável  $X$  se aproxima cada vez mais de uma curva normal, com função de densidade de probabilidade dada pela expressão:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}},$$

em que  $\mu_X = np$  e  $\sigma_Y^2 = np(1-p)$ .

Ressalta-se que  $\mu_X$  é o número esperado de choques em que a esfera cai à direita do observador e a frequência relativa observada de choques ocorridos para cada divisória pode ser obtido por  $f_r(x=i-1) = \frac{y_i}{m}$ .

Assim, para um quincux com muitas fileiras, é necessário usar um grande número de esferas para que o histograma formado por elas tenha, aproximadamente, o aspecto de uma curva normal.

**2º caso) Correspondente à variável aleatória  $Y_i$**

A distribuição marginal da variável  $Y_i$  se aproxima cada vez mais de uma curva normal à medida que o número de esferas ( $m$ ) aumenta.

Neste caso, a função de densidade de probabilidade dessa normal será dada pela expressão:

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_i-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}},$$

em que  $\mu_Y = m p_i$  e  $\sigma_Y^2 = m p_i(1-p_i)$ .

Vale salientar que, na parte prática deste trabalho, não será avaliado o comportamento das curvas normais formada em cada divisória  $i$ .

### Valor esperado do número total de esferas

Com base nas idéias acima, pode surgir o seguinte questionamento: qual o número de esferas que devem ser usadas no Quincux de Galton para que o valor esperado de  $Y_i$  nas extremidades seja maior ou igual à unidade? A resposta a este questionamento surge a partir da associação entre as expressões 3.3 e 3.7, conforme descrito a seguir.

$$E(Y_1) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad m p_1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad m \geq \frac{1}{p_1}.$$

Mas, de acordo com a expressão 3.3, a probabilidade de sucesso é mínima nas extremidades, isto é:

$$p_1 = p_{n+1} = p_{min} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

Logo:

$$m \geq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m \geq 2^n}. \quad (4.8)$$

Com base na expressão 3.8, observa-se que a quantidade de esferas que fornece um valor esperado para  $Y_1$  e  $Y_{n+1}$  maior ou igual à unidade, cresce muito rapidamente com o aumento do número de fileiras de pregos. Por exemplo, para  $n = 20$ , seriam necessárias, no mínimo, 1.048.576 esferas para atender às condições especificadas. Para esta situação, o número esperado de esferas para a divisória central (cuja probabilidade é dada pela expressão 2.4) é de 184.756, o que exigiria, para esferas de 1,5 cm de diâmetro, um Quincux com divisórias de altura igual a 277.134 cm ( $\approx 2,8$  km) ou 3.695 repetições do experimento para um Quincux com divisórias de altura igual a 75 cm.

Porém, na prática, em algumas dessas repetições, uma ou mais esferas podem cair nas divisórias extremas, tendo em vista que o experimento é aleatório e que vários erros podem estar associados a ele. Alguns desses erros se devem à própria construção do aparelho, entre os quais citam-se: inclinação de um prego em relação aos outros, variação da distância entre eles e irregularidade do material utilizado, etc. Outros se devem à execução do experimento, como, por exemplo: quantidade de esferas soltas simultaneamente, irregularidade nos diâmetros das esferas, número de choques que elas sofrem em cada fileira de prego, etc.

### Número total de esferas para certo grau de confiança $\gamma$

Outro questionamento que pode surgir é: qual o número de esferas que devem ser usadas no Quincux para que pelo menos uma delas caia nas divisórias extremas com um grau de confiança  $\gamma$ ? Este questionamento pode ser respondido com base nas expressões 3.3 e 3.6.

No extremo  $i = 1$  (ou  $i = n + 1$ ), a expressão 3.6 se torna:

$$P(Y_1 = y_1) = \frac{m!}{y_1! (m - y_1)!} p_1^{y_1} (1 - p_1)^{m - y_1}.$$

Mas,  $p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , então:

$$P(Y_1 = y_1) = \frac{m!}{y_1! (m - y_1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n y_1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{m - y_1},$$

de acordo com o questionamento:

$$P(Y_1 \geq 1) = P(Y_{n+1} \geq 1) = \gamma,$$

porém,  $P(Y_1 \geq 1) = 1 - P(Y_1 = 0)$ , assim:

$$1 - P(Y_1 = 0) = \gamma \quad \Rightarrow \quad 1 - \gamma = P(Y_1 = 0).$$

Substituindo-se o valor de  $P(Y_1 = 0)$  tem-se:

$$1 - \gamma = \frac{m!}{0!(m-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{m-0} \Rightarrow 1 - \gamma = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^m.$$

Finalmente, aplicando-se o logaritmo natural de ambos os lados dessa função, obtém-se:

$$\ln(1 - \gamma) = m \ln\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

e, portanto:

$$\boxed{m = \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}}. \quad (3.9)$$

Esta expressão mostra, claramente, que, para um mesmo grau de confiança, o número de esferas que precisam ser usadas no Quincux de Galton, de forma que pelo menos uma delas caia nas extremidades, aumenta com o aumento de  $n$ . Além disso, para um valor fixo de  $n$ , à medida que o grau de confiança se aproxima de 100%,  $m$  tende a infinito. Considerando, por exemplo,  $n = 20$  e  $\gamma = 63,21\%$ , obtém-se  $m = 1048517$ , que é aproximadamente igual ao valor obtido anteriormente. A diferença entre as expressões 3.8 e 3.9 é que, na primeira, considerou-se o valor médio da variável  $Y_1$ , enquanto que, no último, considerou-se o próprio valor dessa variável.

### Altura das divisórias para um grau de confiança $\alpha$

Na subseção 4.3 foi relatado que a altura das divisórias deve aumentar quando o número de fileiras de pregos aumenta. Por meio da associação entre as expressões 3.6 e 3.4 (ou 3.5), é possível obter uma estimativa para essa altura.

Considerando-se que a largura de cada divisória seja aproximadamente igual ao diâmetro das esferas, a altura dessa divisória é encontrada multiplicando-se o diâmetro da esfera pelo número máximo de esferas que cairá nessa divisória. Assim, o primeiro passo é obter uma estimativa desse número de esferas. Para isso, é necessário considerar as duas situações que foram descritas na subseção 4.3 ( $n$  par e  $n$  ímpar).

Se  $n$  é par, a probabilidade de sucesso ( $p_i$ ) assume o valor máximo para  $i = \frac{n}{2} + 1$ . Então, o valor de  $p_i$  será o da expressão 3.4. Por outro lado, se  $n$  é ímpar, essa probabilidade assume o valor máximo para  $i = \frac{n+1}{2}$  (ou para  $i = \frac{n+3}{2}$ ). Neste caso, o valor de  $p_i$  é dado pela expressão 3.5.

Tendo em vista que a expressão 3.6 envolve o fatorial de  $m$ , deve-se obter a probabilidade acumulada de  $Y_i$  de forma recursiva que, segundo Ferreira (2006), consiste em obter a probabilidade  $P(Y_i = 0) = (1 - p_i)^m$  e as demais utilizando-se a relação:

$$P(Y_i = y_i) = \frac{n - y_i + 1}{y_i} \left( \frac{p_i}{1 - p_i} \right) P(Y_i = y_i - 1). \quad (3.10)$$

Para cada valor de  $Y_i$ , a probabilidade atual deve ser somada às anteriores, comparando-se esta soma com o índice de confiança  $\alpha$ . O processo deve ser interrompido quando a soma for igual ou superior a  $\alpha$ . Assim, o número de esferas desejado é dado pelo último valor de  $Y_i$ . No fluxograma da Figura 3.6 são apresentadas todas as etapas do método descrito anteriormente.

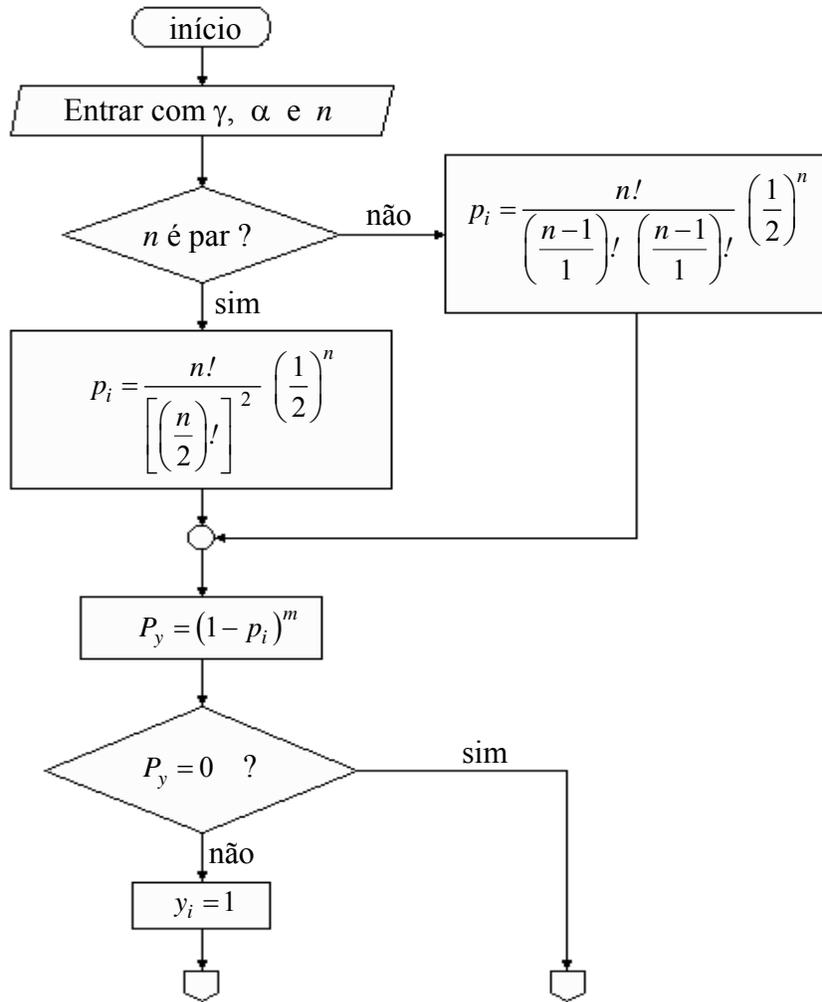
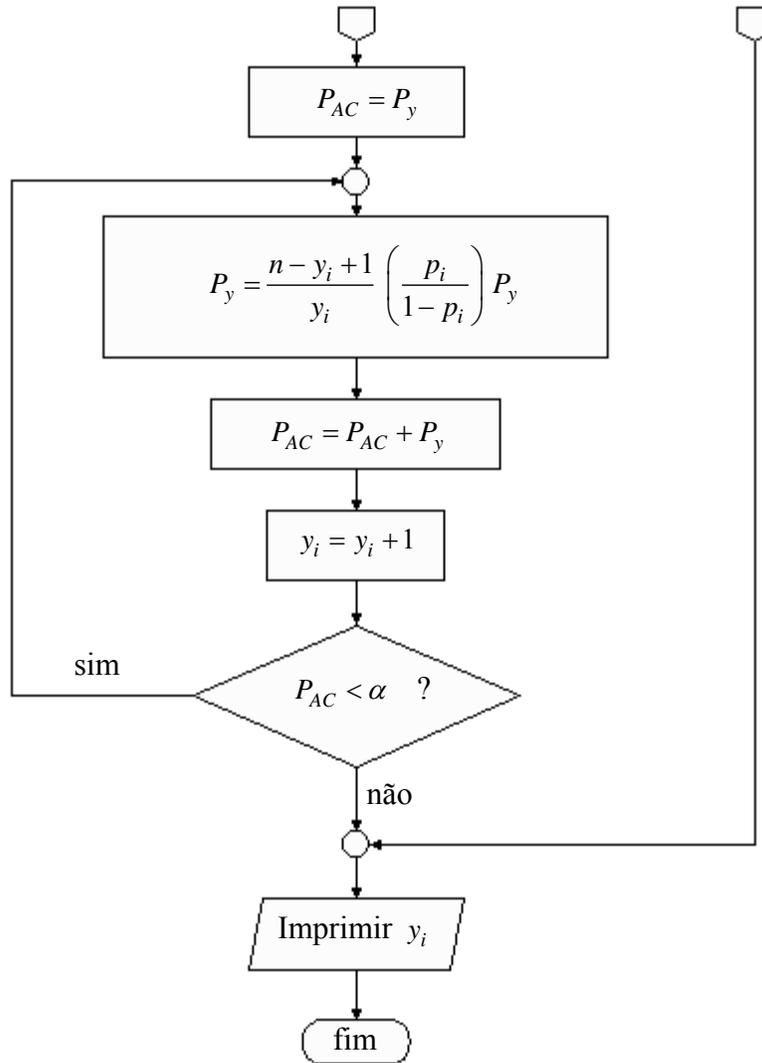


FIGURA 3.6 Fluxograma para estimar o número de esferas na(s) divisória(s) de máxima probabilidade no Quincux de Galton (...Continua...)

FIGURA 3.6 Cont.



Vale ressaltar que, para  $m$  muito elevado, o algoritmo representado pelo fluxograma da Figura 3.6 perde o sentido, tendo em vista que, neste caso, o fator  $(1 - p_i)^m$  será nulo. Entretanto, para valores elevados de  $m$ , pode ser utilizada a

aproximação pela normal, mais especificamente pela normal padronizada, que fornecerá excelentes resultados para a probabilidade acumulada de  $Y_i$ . Assim:

$$P(Y_i \leq y_i) = P\left(Z \leq \frac{y_i - m p_i}{\sqrt{m p_i (1 - p_i)}}\right) = P(Z \leq z) = \alpha, \quad (3.11)$$

logo,

$$y_i = m p_i + z \sqrt{m p_i (1 - p_i)},$$

em que  $z$  é o valor do quantil da distribuição da normal padronizada que satisfaz à condição à expressão 3.11. Em seguida, basta multiplicar o valor da variável  $Y_i$  pelo diâmetro da esfera para se obter o resultado desejado.

Na próxima seção, são apresentados alguns resultados obtidos por meio do Quincux construído para este fim.

## **5 APLICAÇÕES PRÁTICAS**

Nesta seção é apresentada a descrição dos Quincux de Galton construídos para a comprovação da teoria deste capítulo, bem como os resultados obtidos por meio de um deles. Além disso, apresenta-se também a sugestão de uma atividade direcionada às crianças, por meio do Quincux de Galton.

### **5.1 Descrição dos Quincux construídos para este trabalho**

#### **Quincux com dezesseis fileiras de pregos**

Este Quincux foi construído com material de baixo custo, visando orientar sua utilização mesmo em escolas com poucos recursos financeiros. Ele consta de dezesseis fileiras de pregos tendo, conseqüentemente, dezessete divisórias. No depósito superior (funil) foi feita uma abertura no fundo, por meio da qual as esferas caem sobre o prego central da primeira linha, que consiste de três pregos. A partir da primeira linha, o número de pregos cresce de forma a ter quatro na segunda, cinco na terceira e assim por diante. Na última linha existem, portanto, dezoito pregos. Os dois últimos pregos de cada fileira servem apenas para escorar os limitadores da área interna do Quincux. Com o objetivo de permitir o seu uso na vertical, a área dos pregos e a das divisórias foram enfaixadas com plástico, de forma que as esferas pudessem se movimentar em seu interior (Figura 3.7).

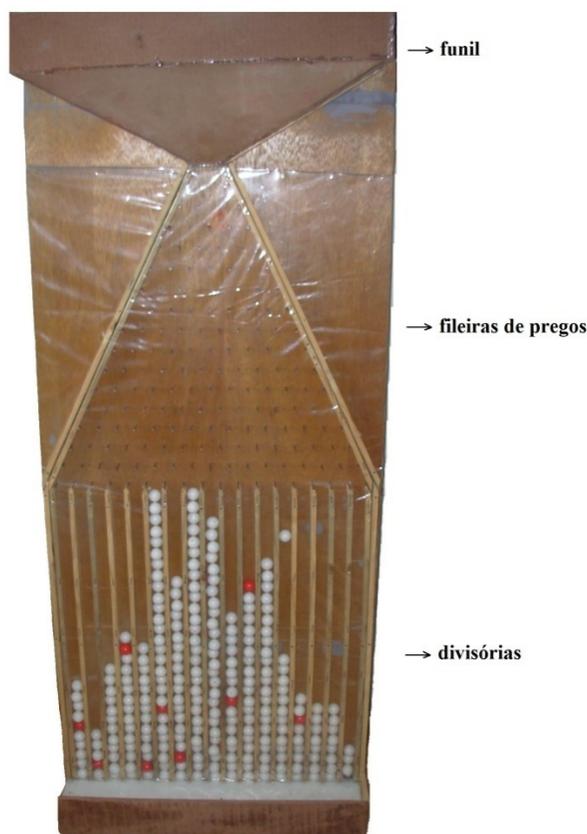


FIGURA 3.7 Fotografia do Quincux com dezesseis fileiras de pregos – resultado de um experimento.

Está representado, na Figura 3.7, o resultado de um experimento realizado com esferas de, aproximadamente, 1,50 cm de diâmetro. O histograma formado por essas esferas não tem, visualmente, o aspecto de uma curva normal, o que pode ou não ser confirmado por meio de um teste de normalidade.

Este Quincux pode não ser o ideal para uma demonstração dos aspectos teóricos, mas serve para os propósitos didáticos na apresentação do conteúdo.

### Quincux com 22 fileiras de pregos

Este Quincux foi construído seguindo as mesmas orientações do primeiro. As principais diferenças são: custo mais elevado em função do material utilizado em sua construção; na base do funil foi feito um canal com largura aproximadamente igual ao diâmetro das esferas, com o objetivo de fazer com que todas elas colidam igualmente no primeiro prego e, principalmente, maior número de fileiras de pregos, cujo objetivo é obter histogramas mais parecidos com a curva normal. Duas fotografias desse Quincux estão apresentadas na Figura 3.8.



FIGURA 3.8 Fotografias do Quincux com 22 fileiras de pregos – resultado de dois experimentos.

Nas Figuras 3.8 (a) e 3.8 (b) estão apresentadas as fotografias do Quincux, com 22 fileiras de pregos, obtidas após o experimento com um conjunto de esferas de, aproximadamente, 1,50 cm de diâmetro cada. Os histogramas formados têm, visualmente, o aspecto da curva normal, mas, como já dito, tal suposição precisa ser confirmada por meio de um teste de normalidade.

Uma simulação com trinta repetições foi realizada com esse Quincux, com o objetivo de analisar se o histograma formado pela média dessas repetições, em cada divisória, tem o aspecto da curva normal, conforme descrito na próxima subseção.

## 5.2 Resultados obtidos por meio do Quincux com 22 fileiras de pregos

Nesta subseção foram apresentados os resultados de 30 experimentos obtidos por meio do Quincux com 22 fileiras de pregos, tanto com simulação lúdica como computacional.

### Resultados da simulação lúdica

Para verificar se o Quincux com 22 fileiras de pregos, construído para a realização deste trabalho, atende à suposição de normalidade para um  $m$  elevado, foi realizada uma simulação lúdica com  $m = 265$  esferas, repetindo-se o processo trinta vezes. O resultado obtido é equivalente a usar 7.950 esferas em uma só etapa. O número de esferas que caíram em cada divisória foi computado e, em seguida, calculou-se a frequência relativa observada em cada uma dessas divisórias. Essas frequências estão computadas na Tabela 3.2, juntamente com a probabilidade de sucesso e a probabilidade da aproximação normal. Os resultados individuais da simulação lúdica encontram-se na Tabela 1B (Anexo B).

TABELA 3.2 Probabilidade de sucesso, probabilidade da aproximação normal e frequência observada, para cada divisória do Quincux com 22 fileiras de pregos.

Divisória	Probabilidade de sucesso	Probabilidade da aproximação normal	Frequência relativa observada
1	0,0000002384	0,0000037812	0,0010062893
2	0,0000052452	0,0000217388	0,0022641509
3	0,0000550747	0,0001192898	0,0046540881
4	0,0003671646	0,0005470859	0,0130817610
5	0,0017440320	0,0020971014	0,0155974843
6	0,0062785150	0,0067192398	0,0343396226
7	0,0177891300	0,0179961800	0,0333333333
8	0,0406608600	0,0402920838	0,0568553459
9	0,0762391100	0,0754145108	0,0708176101
10	0,1185942000	0,1180046311	0,0833962264
11	0,1541724000	0,1543695623	0,0971069182
12	0,1681881000	0,1688295905	0,1109433962
13	0,1541724000	0,1543695623	0,1186163522
14	0,1185942000	0,1180046311	0,0973584906
15	0,0762391100	0,0754145108	0,0713207547
16	0,0406608600	0,0402920838	0,0543396226
17	0,0177891300	0,0179961800	0,0569811321
18	0,0062785150	0,0067192398	0,0322012579
19	0,0017440320	0,0020971014	0,0186163522
20	0,0003671646	0,0005470859	0,0161006289
21	0,0000550747	0,0001192898	0,0060377358
22	0,0000052452	0,0000217388	0,0033962264
23	0,0000002384	0,0000037812	0,0016352201

Por meio da Tabela 3.2, nota-se que as probabilidades de sucesso são muito pequenas nas extremidades ( $i=1$  e  $i=23$ ), sendo máxima na divisória central ( $i=12$ ). Por outro lado, o número médio de esferas é menor que o

esperado nas divisórias centrais e maior nas divisórias extremas. Isso ocorreu em função dos erros envolvidos na simulação lúdica. Alguns desses erros já foram relatados anteriormente.

Alguns histogramas, tanto para a simulação lúdica como para a computacional (realizada via simulador na web), podem ser observados na Figura 3.9, incluindo o da aproximação normal.

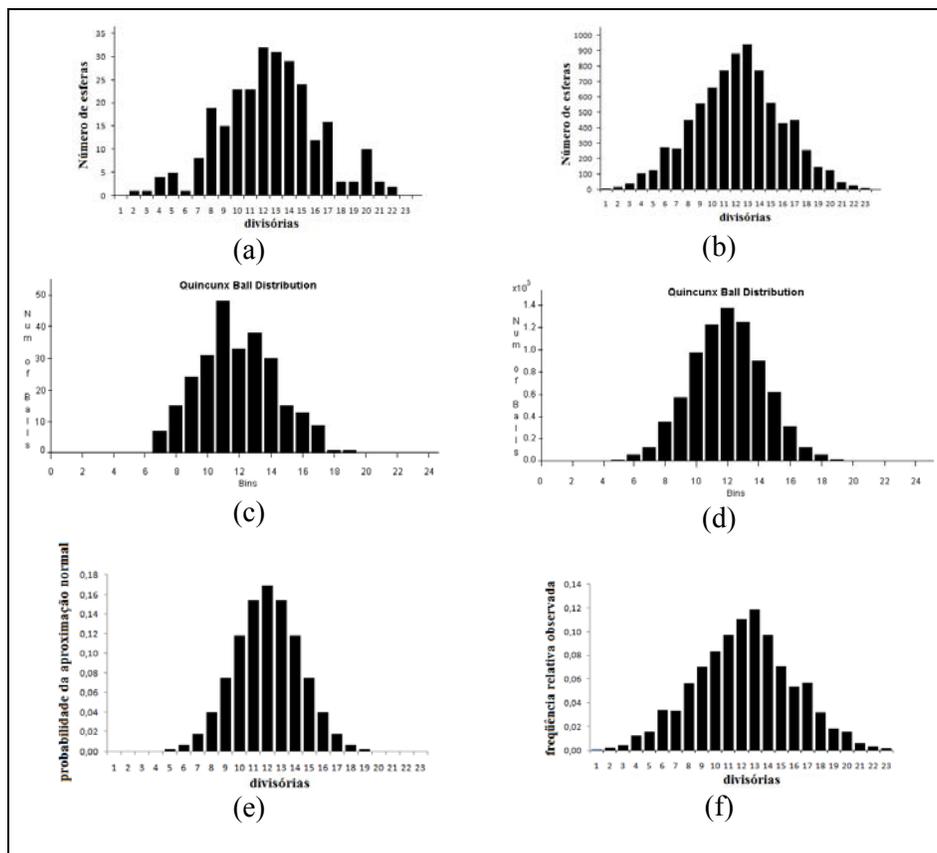


FIGURA 3.9 Histograma da simulação: (a) lúdica com  $m=265$ ; (b) lúdica com  $m=7950$ ; (c) computacional com  $m=265$ ; (d) computacional com  $m=7950$ , (e) histograma aproximação normal e (f) histograma da freqüência relativa observada.

Na Figura 3.9 (a) está representado o histograma da simulação lúdica para uma das 30 repetições, escolhida aleatoriamente, em que foram utilizadas 265 esferas em cada uma. O histograma da Figura 3.9 (b) mostra o resultado da soma dessas trinta repetições, ou seja, do conjunto de 7.950 esferas. Nota-se uma maior regularidade deste histograma em relação ao primeiro, em consequência do aumento do tamanho da amostra.

Na simulação computacional<sup>6</sup>, cujos histogramas são apresentados nas Figuras 3.9 (c) e 3.9 (d), a mesma análise pode ser feita em relação ao tamanho da amostra. A diferença, neste caso, é que a simulação com 7.950 esferas (Figura 3.9 (d)) foi feita em uma única etapa (Quincunx ideal) e de forma independente da simulação com 265 esferas (Figura 3.9 (c)). Porém, o mesmo resultado seria obtido se o procedimento tivesse sido idêntico ao da simulação lúdica. Nota-se que, na simulação computacional, houve maior concentração das esferas nas divisórias centrais, havendo, portanto, menor desvio padrão para o número de esferas em cada divisória. Isso pode ser comprovado por comparação das Figuras 3.9 (b) e 3.9 (d).

O histograma da Figura 3.9 (e) foi obtido a partir da aproximação normal (terceira coluna da Tabela 3.2) e o histograma da Figura 3.9 (f), a partir da frequência relativa observada (quarta coluna da Tabela 3.2). Nota-se que, na simulação lúdica, houve uma dispersão maior das esferas entre as divisórias, conforme relatado anteriormente. Observa-se também que o histograma da Figura 3.9 (f) tem aspecto semelhante ao da Figura 3.9 (b). Isso se deve, obviamente, ao fato de que a frequência relativa observada, para cada divisória, é obtida pela razão entre soma do número de esferas que caem nessa divisória e o número de repetições.

---

<sup>6</sup> O programa utilizado para esta simulação foi obtido no site: <http://www.jcu.edu/math/ISEP/Quincunx/Quincunx.html>.

Ainda com respeito ao histograma da Figura 3.9 (f), visualmente, pode-se dizer que ele tem o aspecto da curva normal. Porém, essa suposição deve ser comprovada por um teste de normalidade. Neste trabalho, foi utilizado o teste Kolmogorov-Smirnov (Gibbons & Chakraborti, 1992) e os resultados encontrados mostram, de fato, não haver evidências para a rejeição da hipótese que o número médio de esferas segue uma distribuição normal ( $D = 0,3478$ ; valor  $p = 0,1243$ ).

### 5.3 Relato de uma experiência: aplicação do Quincux no trabalho com crianças

Segundo Batanero (2001), Piaget & Inhelder (1951) propuseram a utilização do Quincux de Galton para a compreensão da idéia de distribuição normal com crianças. Os modelos que foram utilizados nesse estudo podem ser observados na Figura 3.10.

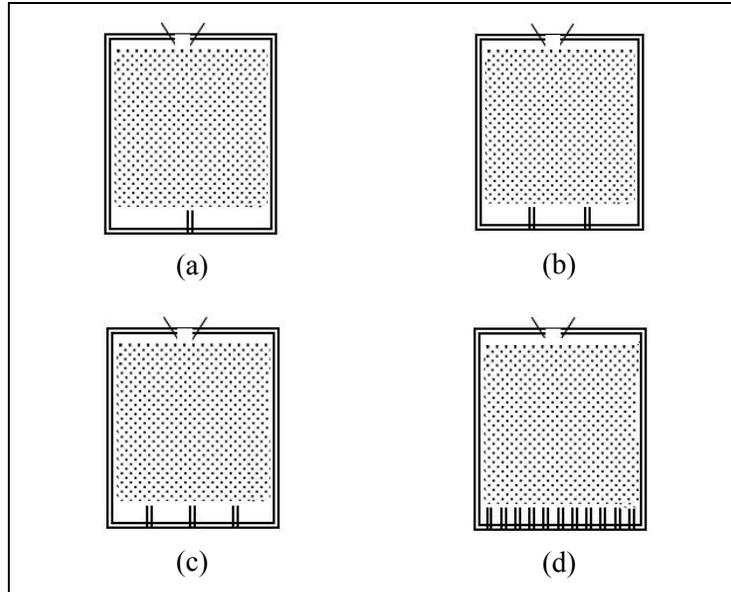


FIGURA 3.10 Algumas formas de Quincux propostos por Piaget e Inhelder.  
Fonte: Adaptado de Batanero (2001).

Nota-se que os quatro aparelhos apresentados na Figura 3.10 possuem uma abertura superior na parte central. A diferença entre eles ocorre no número de divisórias, sendo duas no primeiro (a), três no segundo (b), quatro no terceiro (c) e doze no quarto (d).

De acordo com Batanero (2001), para cada uma das caixas, o experimento pode ser realizado da seguinte forma: introduz-se uma esfera, depois uma segunda, uma terceira e, simultaneamente, pergunta-se para as crianças em que divisória a esfera irá cair e por que. Uma vez compreendida a experiência, pede-se às crianças que expliquem a forma que tomaria a distribuição quando for utilizado um grande número de esferas. Finalmente, soltam-se essas esferas e pede-se às crianças que interpretem a distribuição obtida.

A mesma autora afirma que o primeiro estágio se caracteriza pela ausência da idéia de distribuição. No primeiro e no segundo aparelhos, geralmente, as crianças apostam igualmente em cada uma das divisórias, mas sem a idéia de uma distribuição uniforme para um grande número de esferas. No terceiro, elas apostam nas divisórias centrais ou por uma distribuição irregular. No quarto, se espera, em geral, uma distribuição irregular.

Batanero (2001) comenta que, na etapa de operações concretas, as crianças prevêm a desigualdade entre as freqüências nas divisórias laterais e centrais, mas essa distribuição permanece insuficientemente quantificada por falta de compreensão da lei dos grandes números.

Por fim, afirma que, a partir dos doze anos, já é possível realizar a quantificação da distribuição do conjunto e a compreensão do papel dos grandes números na regularidade da distribuição. Neste caso, deve-se repetir o experimento até se obter um histograma com o aspecto de uma distribuição normal.

Com base neste relato de experiência, pode-se fomentar a aplicação do Quincux em todos os níveis de ensino, ressaltando que, na Educação Básica, o formalismo matemático, descrito neste capítulo, deve ser omitido por envolver conceitos mais complexos.

#### **5.4 Programas para simulações do Quincux**

O Quincux de Galton é amplamente divulgado por meio da internet e existem vários programas on-line que têm função simular a deste aparelho. Alguns desses programas permitem alterar os três parâmetros que dão a forma da distribuição resultante. Estes parâmetros são: número de fileiras de pregos e probabilidade de sucesso para cada choque e número de esferas.

Como exemplos, têm-se os seguintes endereços eletrônicos:

- . <http://www.stattucino.com/berrie/dsl/Galton.html>;
- . <http://www.jcu.edu/math/isep/Quincunx/Quincunx.html>;
- . <http://www.mathsisfun.com/probability/quincunx.html>.

## **6 CONCLUSÕES**

Conclui-se, com este capítulo, que:

- o histograma formado pelas esferas, no Quincux de Galton, tem o aspecto da curva normal quando o número de fileiras de pregos e o número de esferas forem suficientemente elevados;
- o aumento do número de fileiras de pregos faz aumentar rapidamente o número total de esferas que deverá ser utilizado para que, nas divisórias extremas, caia pelo menos uma esfera;
- o Quincux de Galton é uma excelente ferramenta para introduzir os conceitos da distribuição binomial e normal;
- o Quincux de Galton pode ser utilizado para explicar vários fenômenos não só na Estatística como também em outros ramos da ciência;
- recomenda-se, como estudos futuros, uma pesquisa mais aprofundada sobre o Quincux duplo;
- o Quincux de Galton pode ser aplicado em todos os níveis de ensino, devendo, na Educação Básica, ser omitido o formalismo matemático.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATANERO, C. **Didáctica de la estadística**. Granada: Universidad de Granada: Departamento de Didáctica de La Matemática, 2001. 210 p.  
Disponível em: <[www.ugr.es/local/batanero](http://www.ugr.es/local/batanero)>. Acesso em: 14 abr. 2008.
- BULMER, M. G. **Francis Galton: pioneer of heredity and biometry**. Baltimore: J. Hopkins University, 2003. 357 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. Lavras: UFLA, 2005. 664 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística computacional utilizando R**. Lavras: UFLA/DEX, 2006. 78 p. Apostila.
- GASS, S. I.; ASSAD, A. **An annotated timeline of operations research an informal history**. New York: Kluwer Academic, 2005. 313 p.
- GAYON, J. **Darwinism's struggle for survival: heredity and the hypothesis of natural selection**. Cambridge: Cambridge University, 1998. 516 p.
- GIBBONS, J. D.; CHAKRABORTI, S. **Nonparametric statistical inference**. 3.ed. rev. Exp. New York: M. Dekker, 1992. 543 p.
- MAGALHÃES, M. N. **Conceitos básicos em probabilidade**. 2.ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2006. 428 p.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3.ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1974. 564 p.
- UCHII, S. Galton's Quincunx. Kyoto: Kyoto University. Philosophy and History of Science, 2008. Disponível em: <<http://www.bun.kyoto-u.ac.jp/~suchii/quinc.html>> . Acesso em: 26 mar. 2008.



## **CAPÍTULO 4**

### **DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES DE MAXWELL**

## 1 RESUMO

SANTOS, Geraldino Moura dos. Distribuição de velocidades de Maxwell. In: \_\_\_\_\_. **Conceitos estatísticos no desenvolvimento de metodologias interdisciplinares de ensino**. 2008, Cap. 4, p. 107-152. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG\* .

A aplicação de métodos estatísticos às leis da mecânica permite expressar todas as variáveis termodinâmicas como médias das propriedades microscópicas. Uma importante aplicação clássica desses métodos é dada pela lei de distribuição de velocidades de Maxwell. Objetivou-se, com a realização deste trabalho, deduzir essa lei por uma abordagem puramente estatística, visando o ensino interdisciplinar da Estatística para o nível superior. Para tal, primeiramente, encontraram-se a distribuição no espaço e a distribuição de energia das moléculas. Em seguida, com base nas mesmas, a distribuição de velocidades de Maxwell foi determinada. A partir dessa distribuição, obtiveram-se alguns resultados metodológicos que permitiram encontrar os resultados numéricos. Observou-se que a velocidade média, a velocidade mais provável e o desvio padrão da velocidade aumentam com a elevação de temperatura e com a redução da massa molecular. Nessas condições, a curva da distribuição de Maxwell fica mais achatada. Por fim, tal distribuição constitui excelente ferramenta para o ensino interdisciplinar da Estatística, devendo ser usada apenas no Ensino Superior, devido ao seu avançado formalismo matemático.

---

\* Comitê Orientador: Marcelo Silva de Oliveira – UFLA (Orientador), Verônica Yumi Kataoka (Co-orientadora) - UFLA

## 2 ABSTRACT

SANTOS, Geraldino Moura dos. Maxwell velocity Distribution. In:\_\_\_\_\_.  
**Resources didactic interdisciplinary for statistics teaching.** Lavras: UFLA,  
2008, Chap. 4, p. 107-152. Dissertation (Master Program in Statistics and  
Agricultural Experimentation) – Federal University of Lavras, Lavras, MG\*.

The application of statistical methods to the laws of the mechanics allows to express all the thermodynamic variables as averages of the microscopic properties. An important classic application of those methods is given by the law of distribution of speeds of Maxwell. It was aimed at with that chapter to deduce that law purely for an approach statistics, seeking the Statistics teaching interdisciplinary, for the superior level. For that, firstly, he/she was the distribution in the space and the distribution of energy of the molecules, with base in which the distribution of speeds of Maxwell was obtained. Starting from that distribution, they were obtained some methodological results that allowed to obtain the numeric results. It was observed that the medium speed, the most probable speed and the standard deviation of the speed, they increase with the temperature elevation and with the reduction of the molecular mass. In those conditions the curve of the distribution of Maxwell is flatter.

---

\* Guidance Committee: Marcelo Silva de Oliveira –UFLA (Advisor), Verônica Yumi Kataoka (Co- advisor) - UFLA

### **3 INTRODUÇÃO**

O gás, como qualquer outro objeto macroscópico, é constituído por um número extremamente elevado de moléculas ( $6,023 \cdot 10^{23}$  moléculas por mol). Tentar descrever o comportamento individual dessas moléculas constitui uma tarefa inerentemente impossível do ponto de vista prático, tendo em vista que nem mesmo o melhor computador existente no mundo seria capaz de lidar com tal problema.

Por outro lado, a aplicação de métodos estatísticos às leis da mecânica permite expressar todas as variáveis termodinâmicas como médias das propriedades microscópicas. O ramo da Física que lida com tal estudo é denominado Mecânica Estatística, que foi desenvolvida, a partir do século XVIII, com os trabalhos de vários cientistas, dentre eles, James Clerk Maxwell.

Uma das contribuições mais importantes de Maxwell foi a dedução, por volta de 1859, da lei de distribuição de velocidades que foi comprovada experimentalmente por Miller e Kush, em 1955. Essa lei rege o comportamento das moléculas de um gás ideal monoatômico no qual as interações entre as moléculas são consideradas desprezíveis. Ela pode ser utilizada para explicar alguns fenômenos que ocorrem na natureza, como, por exemplo, o movimento browniano e o espalhamento do perfume no ar, etc.

Tendo como foco principal o ensino interdisciplinar de Estatística, procurou-se, ao longo deste capítulo, deduzir essa lei por meio de uma abordagem puramente estatística. Para tal, primeiro estudou-se o comportamento das moléculas em relação à sua posição no espaço, utilizando-se a distribuição multinomial e o teorema central do limite. Em seguida, deduziu-se a lei de distribuição da energia, para a qual foi necessário utilizar alguns argumentos físicos. Com base nos dois resultados anteriores,

desenvolveu-se a lei de distribuição das componentes da velocidade e, por conseguinte, a distribuição de velocidade de Maxwell.

Com base na distribuição de Maxwell, encontraram-se a velocidade média (Esperança de  $V$ ) e a esperança de  $V^2$  de duas formas: pela definição de esperança matemática e por meio da função característica. Encontraram-se, também, o desvio padrão e a velocidade mais provável (moda da velocidade), que foi comparada com a velocidade média, a fim de estudar a assimetria da distribuição de Maxwell.

Visando à sua utilização prática, foi apresentado o esquema original do aparelho utilizado para a comprovação dessa lei e a fotografia de um conjunto de laboratório utilizado para simular a distribuição de velocidades por meio de bolas de vidro.

Na seção seguinte, são apresentados alguns resultados numéricos e as curvas da distribuição de Maxwell para temperaturas e gases diferentes. Essas curvas e os valores numéricos foram obtidos por meio do software estatístico R, com base em um exemplo de um livro de Física.

Como o formalismo matemático utilizado nesse capítulo é bastante avançado, aconselha-se utilizá-lo no ensino de Estatística e de Física de nível superior. No entanto, o professor de Física do Ensino Médio pode utilizá-lo como fonte de pesquisa e tecer alguns comentários sobre tal distribuição, para seus alunos.

## **4 ASPECTOS TEÓRICOS**

### **4.1 Considerações iniciais**

A totalidade do mundo que experimentamos por meio de nossos sentidos consiste de objetos que são macroscópicos, isto é, grandes quando comparados com as dimensões atômicas. Esse mundo é extremamente variado e complexo, composto por gases, líquidos, sólidos e organismos biológicos das mais diversas formas e composições. Conseqüentemente, tentar descrevê-lo por meio do comportamento de suas partículas microscópicas seria extremamente complicado.

Em consonância com essas idéias, Halliday & Resnick (1984) relatam que a solução do problema do movimento das moléculas que constituem um gás, pela aplicação direta das leis da mecânica a cada uma, não poderia ser obtida nem mesmo com o auxílio do melhor computador eletrônico existente. Este fato pode ser compreendido fazendo-se um paralelo com Capítulo 2, em que se relatou que o tempo médio gasto em cada simulação computacional sem a representação gráfica individual foi de, aproximadamente, 6 minutos para 200.000 repetições. Então, se o movimento de cada molécula for considerado um evento individual, o tempo médio necessário para o estudo do comportamento de todas elas seria da ordem de  $10^{17}$  minutos ( $\cong 10^{11}$  anos), tempo maior que a idade do universo, o que torna essa tarefa impossível de ser realizada.

Torna-se, então, necessário recorrer a métodos estatísticos para estudar o comportamento médio dessas moléculas. O ramo da Física que lida com esse estudo é conhecido como Mecânica Estatística, que teve seu início nos estudos envolvendo a teoria cinética dos gases e evoluiu para o tratamento microscópico dos fenômenos termodinâmicos.

Entre as muitas contribuições da Mecânica Estatística encontra-se a lei de distribuição de velocidades, que foi obtida, pela primeira vez, por James Clerk Maxwell, por volta de 1859 (Halliday & Resnick, 1984, p. 240; Ribas, 2007, p. 18). Ela é baseada na teoria clássica, não levando em conta as interações quânticas entre as moléculas do gás.

Nesta seção, essa lei é deduzida seguindo-se as etapas apresentadas pelo esquema da Figura 4.1.

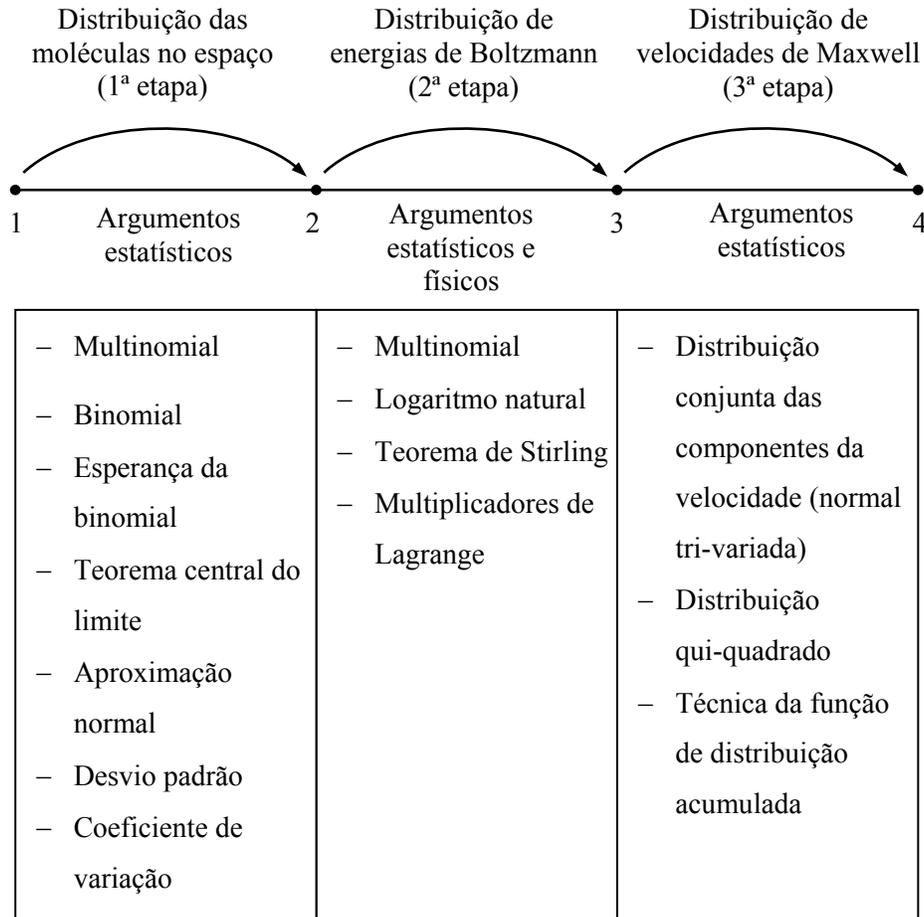


FIGURA 4.1 Etapas seguidas para a dedução da distribuição de velocidades de Maxwell.

A primeira etapa é apresentada na subseção 4.2, a segunda na subseção 4.3 e a terceira é constituída por duas partes: distribuição conjunta das componentes da velocidade (subseção 4.4) e distribuição de velocidades de Maxwell (subseção 4.5).

A justificativa para o uso de tal seqüência reside no fato de que a distribuição de velocidades está relacionada com a distribuição das moléculas no espaço e com a distribuição de energias. Nota-se, pelo esquema da Figura 4.1, que a única etapa em que é necessário utilizar argumentos físicos é a segunda. Isso ocorre em consequência de a multinomial para a energia estar sujeita a duas restrições, como será visto na subseção 4.3.

#### 4.2 Distribuição das moléculas no Espaço – 1ª etapa

Considere um recipiente, hermeticamente fechado, de volume  $w$ , contendo um gás ideal monoatômico<sup>7</sup> em equilíbrio térmico. Para estudar como as moléculas deste gás se distribuem no espaço, tal recipiente pode ser dividido “mentalmente” em  $k$  células de volumes  $w_1, w_2, \dots, w_k$ , avaliando-se, em seguida, o número de moléculas em cada uma delas. Segundo Born (1962), a determinação exata do valor dessa variável, num dado momento, além de ser inerentemente impossível, seria de pouca utilidade, visto que ela muda constantemente, em virtude do movimento das moléculas. Assim, torna-se necessário recorrer aos métodos estatísticos do cálculo das probabilidades para estimar o seu valor mais provável.

Para o gás descrito anteriormente, todas as moléculas têm igual probabilidade de estar em qualquer lugar dentro do recipiente, tendo em vista

---

<sup>7</sup> Esse gás é aquele que obedece aos seguintes pressupostos: o volume de cada molécula é uma fração desprezível do volume do recipiente; as forças que atuam sobre elas são desprezíveis exceto durante as colisões; os choques entre essas moléculas são perfeitamente elásticos e de duração desprezível e, finalmente, cada molécula é constituída por um só átomo (Halliday & Resnick, 1984, p. 211).

que, na ausência de forças externas, não existe nenhuma posição privilegiada para elas (Tipler & Llewellyn, 2006, p.219). Então, a probabilidade de sucesso,  $p_i$ , isto é, a probabilidade de encontrar uma molécula na  $i$ -ésima célula, é dada, conforme visto na expressão 2.3 do capítulo anterior, pela razão entre volumes (probabilidade geométrica), isto é:

$$p_i = \frac{w_i}{w}, \quad (4.1)$$

em que  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $w = w_1 + w_2 + \dots + w_k$ .

A soma dessas probabilidades para todas as células deve ser igual à unidade, uma vez que a molécula, por hipótese, estará em algum lugar dentro do recipiente (Beiser, 1969), isto é:

$$\sum p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1. \quad (4.2)$$

Assim, as variáveis aleatórias  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , que representam, respectivamente, o número de moléculas contidas nas células  $1, 2, \dots, k$  seguem, conjuntamente, uma distribuição multinomial com parâmetros  $n$  e  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), em que  $n$  é o número total de moléculas e  $p_i$  é a probabilidade de sucesso para a célula  $i$  (expressão 4.1). Portanto, a probabilidade conjunta dessas variáveis será:

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}, \quad (4.3)$$

em que:

$$\sum n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k = n. \quad (4.4)$$

A distribuição mais provável de moléculas no recipiente, isto é, aquela que fornece um máximo para a expressão 3.3, pode ser encontrada com base no teorema central do limite, como será apresentado a seguir.

A distribuição marginal de cada  $N_i$  é uma distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p_i$ , tendo em vista que cada molécula pode ou não estar contida na célula especificada. É importante ressaltar que cada molécula é considerada um ensaio independente de Bernouli. Então, a probabilidade marginal para  $N_i$  será:

$$P(N_i = n_i) = \frac{n!}{n_i!(n - n_i)!} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{n - n_i}, \quad (4.5)$$

em que  $n_i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

O valor médio (esperança matemática) de  $N_i$  pode ser obtido por meio da função geradora de momentos, conforme demonstrado em Mood et al. (1974). Assim:

$$\boxed{\bar{n}_i = E(N_i) = n p_i} \quad (4.6)$$

Por outro lado, a distribuição de cada  $N_i$  pode ser aproximada, com boa precisão, pela distribuição normal, o que garante a simetria da distribuição de  $N_i$  em relação ao valor mais provável, mesmo quando a célula é muito menor que o recipiente, tendo em vista que o número total de moléculas no recipiente é extremamente elevado (da ordem de  $10^{23}$  moléculas por mol). Este fato é uma conseqüência do teorema central do limite (Magalhães, 2006, p. 105; Ferreira, 2005, p.146). Dessa forma, o número mais provável de moléculas na  $i$ -ésima célula é aproximadamente igual ao valor esperado de  $N_i$  (expressão 4.6). Esse resultado está em consonância com aquele obtido por meio de argumentos físicos, como é encontrado nos livros de Física (por exemplo, Beiser, 1969).

É óbvio que o número médio de moléculas numa dada célula depende do tamanho dessa célula. Isso pode ser constatado, também, por substituição da expressão 4.1 na 4.6. Assim, se o recipiente for dividido mentalmente em  $k$  partes iguais, todas as células terão, em média, o mesmo número de moléculas.

Neste caso, de acordo com a expressão 3.1, a probabilidade de sucesso para cada célula será:

$$p_i = \frac{w_i}{k w_i} = \frac{1}{k};$$

e o valor esperado de  $N_i$ , conforme expressão 4.6:

$$E(N_i) = n p_i = \frac{n}{k}$$

Para avaliar como ocorrem as oscilações de  $N_i$  em torno de seu valor esperado, pode-se, em vez de utilizar argumentos físicos, encontrar o desvio padrão e o coeficiente de variação dessa variável. O primeiro é dado por:

$$\sigma_{N_i} = \sqrt{n p_i (1 - p_i)} = \sqrt{n \left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{k-1}{k}\right)} = \frac{1}{k} \sqrt{n(k-1)};$$

e o segundo, por:

$$cv = \frac{\sigma_{N_i}}{E(N_i)} 100\% = \frac{\frac{1}{k} \sqrt{n(k-1)}}{\frac{n}{k}} 100\% = \sqrt{\frac{k-1}{n}} 100\%.$$

Nota-se que, para um gás ideal monoatômico, considerando um valor fixo para  $k$  ( $k \ll n$ ), embora o desvio padrão seja bastante elevado, o  $cv$  tende a zero. Para se ter uma idéia mais clara desse fato, considere as seguintes seqüências de números:

- i) 99, 100, 101;
- ii) 99999, 100000, 100001.

Estas duas seqüências têm o mesmo desvio padrão, mas, a primeira tem uma variação dez vezes maior do que a segunda ( $cv_1 = 1\%$  e  $cv_2 = 0,1\%$ ).

Assim, para um gás em equilíbrio térmico, as oscilações que ocorrem em torno do valor esperado podem ser consideradas desprezíveis e a distribuição de moléculas no espaço, totalmente uniforme (Roy, 2002). Isso

significa que a posição de uma molécula não é afetada pela presença de outras moléculas já que, neste caso, as forças de interação entre elas são consideradas desprezíveis. Como uma consequência desses fatos, as moléculas se movimentam aleatoriamente dentro do recipiente, fazendo com que as componentes da velocidade de cada molécula sejam independentes.

Por outro lado, a distribuição de energia não é uniforme, conforme será demonstrado na subseção seguinte.

### 4.3 Distribuição de energias moleculares – 2ª etapa

Para um gás em equilíbrio, a energia total das moléculas permanece constante, de acordo com o princípio da conservação de energia. Isso mostra que, considerando  $k$  intervalos em ordem crescente de energias, isto é, o primeiro de  $0$  a  $E_1$ , o segundo de  $E_1$  a  $E_2$  ( $E_1 < E_2$ ), o terceiro de  $E_2$  a  $E_3$  ( $E_2 < E_3$ ), ... , e o  $k$ -ésimo de  $E_{k-1}$  a  $E_k$  ( $E_{k-1} < E_k$ ), o número de moléculas com energias dentro de cada um desses intervalos decai à medida que a energia aumenta. A justificativa para esse fato é que, se uma molécula possui energia elevada, a energia restante terá que ser dividida para todas as outras moléculas (Born, 1962). A consequência desse fato é que a probabilidade de sucesso não será constante para intervalos iguais de energias, como ocorria para a distribuição de moléculas no espaço. Ela depende não só do tamanho do intervalo como também dos valores da energia para esse intervalo.

No entanto, de forma semelhante à distribuição no espaço, as variáveis aleatórias  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , que representam o número de moléculas com energias nos intervalos  $1, 2, \dots, k$ , seguem, conjuntamente, uma distribuição multinomial e a probabilidade conjunta dessas variáveis é, também, dada pela expressão 4.3 (Beiser, 1969, p.272). A diferença em relação à distribuição no espaço é que, neste caso, além da condição estabelecida pela expressão 4.4, a

soma das energias de todas as moléculas deve ser igual à energia total do sistema, isto é:

$$\sum_{i=1}^k n_i \bar{u}_i = n_1 \bar{u}_1 + n_2 \bar{u}_2 + \dots + n_k \bar{u}_k = g, \quad (4.7)$$

em que  $\bar{u}_i$  representa a energia média do  $i$ -ésimo intervalo e  $g$ , a energia total do sistema. Uma consequência dessa última condição é que a distribuição de  $N_i$  será assimétrica em relação ao seu valor mais provável e o método anterior não pode ser utilizado nesse caso. Entretanto, o problema pode ser resolvido por meio de argumentos físicos, como demonstrado a seguir.

Em primeiro lugar, deve-se aplicar o logaritmo natural na expressão 4.3 para facilitar o processo, tendo em vista que a função logarítmica é uma função monótona crescente e, então, um máximo para a probabilidade corresponde a um máximo para o seu logaritmo. Assim, a expressão 4.3 torna-se:

$$\ln(P) = \ln(n!) - \sum \ln(n_i!) + \sum n_i \ln(p_i). \quad (4.8)$$

Como os valores  $n$  e  $n_i$  são muito elevados, o teorema de Stirling, cuja demonstração se encontra em Beiser (1969), pode ser aplicado. Segundo esse teorema, para essas situações:

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n \quad \text{e} \quad \ln(n_i!) = n_i \ln(n_i) - n_i,$$

e assim:

$$\begin{aligned} \ln(P) &= n \ln(n) - n - \sum [n_i \ln(n_i) - n_i] + \sum n_i \ln(p_i) \\ \Rightarrow \ln(P) &= n \ln(n) - n - \sum n_i \ln(n_i) + \sum n_i + \sum n_i \ln(p_i). \end{aligned}$$

Mas, de acordo com a expressão 4.4,  $\sum n_i = n$ , então,

$$\ln(P) = n \ln(n) - \sum n_i \ln(n_i) + \sum n_i \ln(p_i). \quad (4.9)$$

Na condição de máxima probabilidade, a variação de  $\ln(P)$  é nula. Isso significa que, próximo ao valor máximo de  $P$ , uma pequena variação ( $\delta n_i$ ) em cada  $n_i$  não afeta o valor da probabilidade. Assim:

$$\delta \ln(P)_{m\acute{a}x} = \delta [n \ln(n)] - \sum \delta n_i \ln(n_i) - \sum n_i \delta \ln(n_i) + \sum \delta n_i \ln(p_i) = 0.$$

Como  $n \ln(n)$  é constante e  $\delta \ln(n_i) = \frac{1}{n_i} \delta n_i$ , a expressão acima se torna:

$$-\sum \delta n_i \ln(n_i) - \sum \delta n_i + \sum \delta n_i \ln(p_i) = 0. \quad (4.10)$$

Porém, uma vez que o número total de moléculas é constante, a soma das variações  $\delta n_i$  deve ser nula, isto é:

$$\sum \delta n_i = \delta n_1 + \delta n_2 + \dots + \delta n_k = 0. \quad (4.11)$$

Então, por meio da expressão 4.10, obtém-se:

$$-\sum \delta n_i \ln(n_i) + \sum \delta n_i \ln(p_i) = 0. \quad (4.12)$$

Beiser (1969) relata que, embora a expressão 4.12 deva ser satisfeita pela distribuição mais provável das moléculas, ela não especifica, por si mesma, completamente esta distribuição. Segundo o mesmo autor, deve-se considerar o fato de que as variações  $\delta n_1, \delta n_2, \dots, \delta n_k$  do número de moléculas com energias dentro dos  $k$  intervalos não são independentes, mas devem obedecer a duas restrições: a primeira foi estabelecida pela expressão 4.11 e a segunda está relacionada à conservação da energia do gás. Em função dessa última restrição, tem-se:

$$\sum \bar{u}_i \delta n_i = \bar{u}_1 \delta n_1 + \bar{u}_2 \delta n_2 + \dots + \bar{u}_k \delta n_k = 0. \quad (4.13)$$

A fim de incorporar tais restrições à expressão 4.12, deve-se aplicar o método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange, que consiste em

multiplicar a expressão 4.11 por  $-\alpha$  e a expressão 4.13 por  $-\beta$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são quantidades independentes dos  $n_i$ , e somar essas expressões à expressão 4.12. Assim:

$$\begin{aligned} -\sum \delta n_i \ln(n_i') + \sum \delta n_i \ln(p_i) + \sum (-\alpha \delta n_i) + \sum (-\beta u_i \delta n_i) &= 0 \\ \Rightarrow \sum (-\ln(n_i') + \ln(p_i) - \alpha - \beta u_i) \delta n_i &= 0. \end{aligned}$$

Para que a expressão anterior seja verdadeira, a quantidade entre parênteses deve ser nula, isto é:

$$\begin{aligned} -\ln(n_i') + \ln(p_i) - \alpha - \beta u_i = 0 &\Rightarrow \ln(n_i') = \ln(p_i) - \alpha - \beta u_i \\ \Rightarrow \boxed{n_i' = p_i e^{-\alpha} e^{-\beta u_i}} &\quad (i = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \quad (4.14)$$

que é o número mais provável de moléculas com energias no  $i$ -ésimo intervalo. “Este resultado é conhecido como *lei de distribuição de Maxwell-Boltzmann*” (Beiser, 1969, p.273).

A partir desse resultado, a distribuição de velocidades pode ser encontrada como será visto nas duas próximas subseções.

#### 4.4 Distribuição conjunta das componentes da velocidade – 3ª etapa: parte I

Considerando uma distribuição contínua de energias moleculares, em vez de um conjunto discreto, a expressão 4.14 se torna:

$$n(u)du = p e^{-\alpha} e^{-\beta u} du, \quad (3.15)$$

em que  $n(u)du$  é interpretado como o número de moléculas cujas energias se encontram entre  $u$  e  $u + du$ . Essa aproximação é perfeitamente válida para as moléculas de um gás ideal monoatômico, tendo em vista que, neste caso, “a energia de quantização é insignificante e o número total de moléculas pode ser muito grande” (Beiser, 1969, p.273).

Entretanto, na condição de equilíbrio do gás, as forças que atuam sobre as moléculas são consideradas desprezíveis e as componentes da velocidade são independentes, conforme relatado na subsecção 4.2. Assim, a energia de cada molécula será puramente cinética, de forma que:

$$U = \frac{1}{2} m V^2, \quad (4.16)$$

em que  $m$  e  $V$  são, respectivamente, a massa e a velocidade da molécula. Essa condição, associada à expressão 4.15, permite afirmar que:

$$n(v)dv \propto e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2} dv. \quad (4.17)$$

Porém, a velocidade é uma grandeza vetorial que possui três componentes  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$ , conforme Figura 4.2. Cada uma dessas componentes pode assumir qualquer valor na escala dos números reais, de acordo com a teoria clássica.

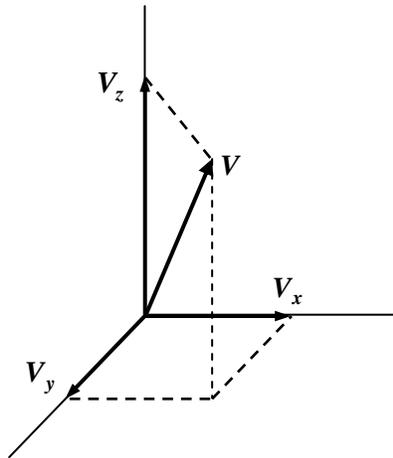


FIGURA 4.2 Representação gráfica da velocidade e de suas componentes.

Dessa forma, o número de moléculas cujas componentes da velocidade,  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$ , situam-se nos intervalos infinitesimais,  $v_x$  e  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  e  $v_y + dv_y$ ,  $v_z$  e  $v_z + dv_z$ , pode ser obtido, com base na Figura 4.2 e na expressão 4.17, de forma que:

$$n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \propto e^{-\frac{1}{2} \beta m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z,$$

em que  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ .

Tendo em vista que a probabilidade conjunta das componentes  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  é proporcional ao número de moléculas, obtém-se:

$$\begin{aligned} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &\propto n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \\ \Rightarrow f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &\propto e^{-\frac{1}{2} \beta m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z. \end{aligned}$$

Inserindo uma constante de proporcionalidade na expressão anterior tem-se:

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = c e^{-\frac{1}{2} \beta m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z, \quad (4.18)$$

em que  $f(v_x, v_y, v_z)$  é a função de densidade de probabilidade conjunta dessas variáveis e  $c$  é a constante de proporcionalidade.

Para que  $f(v_x, v_y, v_z)$  seja uma fdp (função de densidade de probabilidade), a integral da expressão 4.18 sobre todos os valores das componentes da velocidade deve ser igual à unidade, isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-\frac{1}{2} \beta m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = 1.$$

Como as variáveis aleatórias  $V_x, V_y$  e  $V_z$  são independentes, essa integral pode ser desmembrada, tornando-se:

$$c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_z^2} dv_z = 1.$$

Essas integrais, segundo Mood et al. (1974) e Nussenzveig (2004), valem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_x^2} dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_y^2} dv_y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_z^2} dv_z = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}.$$

Então:

$$c \left( \frac{2\pi}{\beta m} \right)^{\frac{3}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Substituindo-se esse resultado na expressão 4.18, obtém-se:

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \quad (4.19)$$

Assim, a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis  $V_x, V_y$  e  $V_z$  é:

$$\boxed{f(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)},} \quad (4.20)$$

em que  $-\infty < v_x < \infty$ ,  $-\infty < v_y < \infty$  e  $-\infty < v_z < \infty$ .

Nota-se, por meio dessa função, que as componentes  $V_x, V_y$  e  $V_z$ , seguem, conjuntamente, uma distribuição normal tri-variada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta m} \end{bmatrix}.$$

A condição de independência permite desmembrar a expressão 4.20 de forma que:

$$f(v_x) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_x^2}, \quad \text{em que } -\infty < v_x < \infty;$$

$$f(v_y) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_y^2}, \quad \text{em que } -\infty < v_y < \infty;$$

$$f(v_z) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_z^2}, \quad \text{em que } -\infty < v_z < \infty.$$

Essas funções mostram que as variáveis,  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$ , são normalmente e independentemente distribuídas com média zero e variância  $\frac{1}{\beta m}$ . Além disso, as curvas dessas funções são simétricas em relação aos seus valores mais prováveis. Assim, em cada direção, é igualmente provável encontrar a molécula movimentando-se para um lado ou para o outro, isto é, a componente da velocidade, nessa direção, pode ser negativa ou positiva com a mesma probabilidade (Reif, 1965, p. 266).

Esses fatos constituem a base para encontrar a distribuição de Maxwell, como será demonstrado na próxima subseção.

#### 4.5 Distribuição de velocidades de Maxwell – 3ª etapa: parte II

A função de distribuição de velocidades de Maxwell pode ser encontrada a partir da expressão 4.19. Para isso, primeiramente, o comportamento da variável aleatória  $S = \beta m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$ , relativa ao exponencial da expressão 4.20, deve ser avaliado. Essa variável, conforme é demonstrado a seguir, tem uma distribuição qui-quadrado com 3 graus de liberdade.

##### Demonstração

Sejam as variáveis aleatórias  $Z_1 = \sqrt{\beta m} V_x$ ,  $Z_2 = \sqrt{\beta m} V_y$  e  $Z_3 = \sqrt{\beta m} V_z$ . Como as distribuições individuais de  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  são normais com média zero e variância  $\frac{1}{\beta m}$ , as variáveis  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  seguem, individualmente, uma distribuição normal padrão,  $N(0,1)$ , como pode ser comprovado pela técnica da função de distribuição acumulada (Mood et al., 1974). Nota-se, então, que a variável aleatória  $S$  corresponde a uma soma de normais padrões ao quadrado, isto é:

$$S = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$$

Mas, segundo Mood et al. (1974) e Ferreira (2005), essa soma possui uma distribuição qui-quadrado com três graus de liberdade. Assim, a função densidade de probabilidade da variável  $S$  é:

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} s^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}s}.$$

Porém,  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  e  $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , portanto,

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}s}, \quad \text{em que } 0 < s < \infty$$

Essa expressão permite encontrar a função densidade de probabilidade da variável aleatória  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ , que representa o módulo da velocidade da molécula, tendo em vista que:

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = \frac{S}{\beta m} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{S}{\beta m}}.$$

Assim, aplicando-se a técnica da função de distribuição acumulada para a variável  $V$ , encontra-se:

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P\left(\sqrt{\frac{S}{\beta m}} \leq v\right) = P(S \leq \beta m v^2) = F_S(\beta m v^2).$$

Derivando-se ambos os lados dessa função, obtém-se:

$$f_V(v) = f_S(\beta m v^2) 2\beta m v = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\beta m v^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\beta m v^2)} \right] 2\beta m v,$$

que pode ser reescrita como:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2},$$

ou

$$\boxed{f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2}}, \quad (4.21)$$

em que  $0 < v < \infty$ . Esta função é conhecida como distribuição de Maxwell (Morse, 1962, p. 99; Reif, 1965, p. 267; Walck, 2007, p. 88).

O produto  $f(v) dv$  representa a probabilidade de encontrar uma molécula com módulos da velocidade entre  $v$  e  $v + dv$ . Multiplicando-se essa probabilidade pelo número total de moléculas encontra-se o número mais provável de moléculas cujos módulos da velocidade situam-se entre  $v$  e  $v + dv$ , isto é:

$$n(v)dv = n f(v)dv = n \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2} dv, \quad (4.22)$$

em que  $0 < v < \infty$ . Esta expressão é conhecida como “Distribuição de Velocidades de Maxwell”, tendo em vista que sua primeira dedução foi feita por James Clerk Maxwell, por volta de 1859 (Halliday & Resnick, 1984, p. 240; Ribas, 2007, p. 18).

### Determinação da constante $\beta$

Como foi relatado na subseção 4.4, a energia de cada molécula do gás ideal monoatômico sofre influência apenas da energia cinética (expressão 4.16). Assim, aplicando-se a técnica da função de distribuição acumulada para a variável  $U$ , encontra-se:

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P\left(\frac{1}{2}m V^2 \leq u\right) = P\left(V^2 \leq \frac{2u}{m}\right) = P\left(V \leq \sqrt{\frac{2u}{m}}\right)$$

$$\Rightarrow F_U(u) = F_V\left(\sqrt{\frac{2u}{m}}\right).$$

Derivando-se ambos os lados dessa função, obtém-se:

$$f_U(u) = f_V\left(\sqrt{\frac{2u}{m}}\right) \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2u}} \left(\frac{2}{m}\right) \right] = f_V\left(\sqrt{\frac{2u}{m}}\right) \frac{1}{m} \sqrt{\frac{m}{2u}}.$$

Com base nessa expressão e em 4.21, a função densidade de probabilidade da energia (variável  $U$ ) é:

$$f_U(u) = \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2u}{m}\right) e^{-\frac{1}{2}\beta m \left(\frac{2u}{m}\right)} \right] \frac{1}{m} \sqrt{\frac{m}{2u}},$$

que pode ser reescrita, de forma mais simplificada, como:

$$\boxed{f(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{\frac{3}{2}} \sqrt{u} e^{-\beta u}}, \quad (4.23)$$

em que  $0 < u < \infty$ .

Mas, conforme visto anteriormente,  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ , então, a expressão

4.23 pode ser reescrita como:

$$f(u) = \frac{\beta}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (\beta u)^{\frac{3}{2}-1} e^{-\beta u}.$$

Isso mostra que a variável  $U$  tem distribuição gama com parâmetros  $\lambda = \beta$  e

$r = \frac{3}{2}$  (Walck, 2007, p. 88).

Com base na expressão 4.23, pode-se afirmar que o número de moléculas com energias entre  $u$  e  $u + du$  é:

$$n(u)du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{\frac{3}{2}} \sqrt{u} e^{-\beta u} du, \quad (4.24)$$

em que  $0 < u < \infty$ . Esta função será usada para obter o valor de  $\beta$ .

Antes, porém, vale ressaltar que, apesar de a teoria clássica permitir valores entre zero e infinito para a energia, a expressão 4.24 só terá resultados expressivos se os valores dessa grandeza forem extremamente baixos (da ordem de  $10^{-21}$  Joules), tendo em vista que, segundo a teoria clássica, a energia média por molécula é dessa ordem. Esse resultado também pode ser comprovado por meio da expressão 4.15 ( $U = \frac{1}{2} m V^2$ ). Nessa expressão, o valor de  $m$  (massa da molécula) é da ordem de  $10^{-27}$  kg. Então, se a molécula possuísse uma velocidade próxima à velocidade da luz ( $3,0 \times 10^8$  m/s), sua energia seria da ordem de  $10^{-19}$  Joules.

O valor da constante  $\beta$  pode ser determinado por meio da associação entre a conservação de energia e a expressão 4.24. Pela conservação da energia, a energia total do gás é a soma de todas as energias individuais. Assim:

$$\int_0^{\infty} u n(u) du = \int_0^{\infty} u n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{\frac{3}{2}} \sqrt{u} e^{-\beta u} du = n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} u^{\frac{3}{2}} e^{-\beta u} du .$$

Mas, segundo Beiser (1969), a integral  $\int_0^{\infty} u^{\frac{3}{2}} e^{-\beta u} du$  vale  $\frac{3}{4\beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ ,

então:

$$\int_0^{\infty} u n(u) du = n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4\beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{3}{2} \left( \frac{n}{\beta} \right).$$

Por outro lado, de acordo com a teoria cinética dos gases, a energia total do referido gás vale  $\frac{3}{2} n k T$ , em que  $T$  é a temperatura absoluta e  $k$  é a

constante de Boltzmann<sup>8</sup> (Beiser, 1969, p. 276; Halliday & Resnick, 1984, p. 219). Portanto:

$$\frac{3}{2} \left( \frac{n}{\beta} \right) = \frac{3}{2} n k T \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{k T}.$$

Essa constante pode ser substituída em todas as expressões anteriores. Porém, como o maior interesse, do ponto de vista estatístico, é pela função densidade de probabilidade, isso será feito somente para a expressão 4.21. Dessa forma:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2}, \quad (4.25)$$

em que  $0 < v < \infty$ . Nota-se que a curva desta função depende da temperatura, obtendo-se, para cada temperatura, uma curva diferente. Isso será comprovado na secção 7.

Com base na expressão 4.25, foram obtidos, na seção seguinte, alguns resultados metodológicos, iniciando-se pela função característica, que permitiu encontrar valor esperado de  $V$  e de  $V^2$ . Esses dois últimos resultados foram obtidos também pela definição de esperança matemática e, a partir deles, encontrou-se o desvio padrão de  $V$ . Além desses resultados, encontrou-se também a velocidade mais provável (moda da velocidade).

---

<sup>8</sup>  $k = \frac{r}{n_0} = 1,38 \times 10^{-23}$  em que  $r$  é a constante universal dos gases e  $n_0$  é o número de Avogadro (Halliday & Resnick, 1984).

## 5 RESULTADOS METODOLÓGICOS

Nesta seção são deduzidos alguns resultados metodológicos para a distribuição de velocidades de Maxwell. Inicia-se com a função característica, tendo em vista sua importância na dedução de outros resultados, como a esperança de  $V$  e a de  $V^2$ , que também são deduzidos pela definição de esperança matemática. São obtidos também o desvio padrão e a velocidade mais provável.

### 5.1 Função característica da distribuição de Maxwell

A função característica de uma variável qualquer é uma função matemática que permite encontrar os momentos de qualquer ordem. Segundo Magalhães (2006) e Walck (2007), a função característica de uma variável  $X$  é definida por:

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f(x) dx;$$

para  $t$  real e  $i = \sqrt{-1}$ .

Com base dessa função, as esperanças das variáveis  $X$  e  $X^2$  são dadas por:

$$E(X) = \frac{1}{i} \left( \frac{d}{dt} \right) \phi_X(t) \Big|_{t=0} \quad \text{e} \quad E(X^2) = \frac{1}{i^2} \left( \frac{d^2}{dt^2} \right) \phi_X(t) \Big|_{t=0}.$$

Para encontrar tais esperanças para a distribuição de Maxwell, primeiro, é necessário deduzir sua função característica. Assim, partindo-se da expressão 3.25, obtém-se:

$$\phi_V(t) = E(e^{itV}) = \int_0^{\infty} e^{itv} f(v) dv = \int_0^{\infty} e^{itv} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2} dv;$$

$$\Rightarrow \phi_V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2 + itv} dv;$$

$$\Rightarrow \phi_V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} \left( v^2 + 2 \left( \frac{kT it}{m} \right) v \right)} dv.$$

Para resolver a integral na expressão acima, deve-se completar o quadrado em relação a  $v$  no fator exponencial. Dessa forma:

$$\phi_V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} \left( v^2 - 2 \left( \frac{kT it}{m} \right) v + \left( \frac{kT it}{m} \right)^2 - \left( \frac{kT it}{m} \right)^2 \right)} dv.$$

Isolando-se o termo que não depende da velocidade, tem-se:

$$\phi_V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2} \frac{m}{kT} \left( \frac{kT it}{m} \right)^2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} \left( v - \frac{kT it}{m} \right)^2} dv,$$

que, após simplificada, se torna:

$$\phi_V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{kT}{m} \right) i^2 t^2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} \left( v - \frac{kT it}{m} \right)^2} dv. \quad (4.26)$$

Para se obter a o valor da integral é necessário fazer uma mudança de variável. Seja:

$$s^2 = \frac{m}{kT} \left( v - \frac{kT it}{m} \right)^2, \quad (4.27)$$

então:

$$s = \sqrt{\frac{m}{kT}} \left( v - \frac{kT it}{m} \right).$$

Isolando-se  $v$  nesta expressão, tem-se:

$$v = \sqrt{\frac{kT}{m}} s + \frac{kT it}{m}. \quad (4.28)$$

Derivando-se ambos os lados desta expressão, tem-se:

$$dv = \sqrt{\frac{kT}{m}} ds. \quad (4.29)$$

Elevando-se ao quadrado a expressão 4.28, obtém-se:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left( \sqrt{\frac{kT}{m}} s + \frac{kT it}{m} \right)^2 = \frac{kT}{m} s^2 + 2\sqrt{\frac{kT}{m}} s \left( \frac{kT it}{m} \right) + \left( \frac{kT it}{m} \right)^2; \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{kT}{m} s^2 + 2 it \left( \frac{kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}} s + \left( \frac{kT it}{m} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Substituindo-se as expressões 4.28, 4.29 e 4.30 em 4.26, obtém-se:

$$\phi_V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{kT}{m} \right) i^2 t^2} d, \quad (4.31)$$

em que:

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{kT}{m} s^2 + 2 it \left( \frac{kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}} s + \left( \frac{kT it}{m} \right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} s^2} \sqrt{\frac{kT}{m}} ds; \\ \Rightarrow d &= \left( \frac{kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} s^2 e^{-\frac{1}{2} s^2} ds + 2 it \left( \frac{kT}{m} \right)^2 \int_0^{\infty} s e^{-\frac{1}{2} s^2} ds + \\ &+ i^2 t^2 \left( \frac{kT}{m} \right)^{\frac{5}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} s^2} ds. \end{aligned}$$

Mas, segundo Ribas (2007):

$$\int_0^{\infty} s^2 e^{-\frac{1}{2} s^2} ds = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{\infty} s e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 1,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Portanto:

$$d = \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2 i t \left(\frac{kT}{m}\right)^2 + i^2 t^2 \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Substituindo-se o valor de  $d$  na expressão 4.31, tem-se:

$$\phi_V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)i^2 t^2} \left[ \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2 i t \left(\frac{kT}{m}\right)^2 + i^2 t^2 \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right].$$

Simplificando-se essa expressão obtém-se:

$$\boxed{\phi_V(t) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)i^2 t^2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i t + \left(\frac{kT}{m}\right) i^2 t^2 \right]}, \quad (4.32)$$

que é a função característica da distribuição de Maxwell.

Os resultados das subseções 5.2 e da 5.3 foram obtidos com base nesta função e na definição de esperança matemática.

## 5.2 Velocidade média ou esperança de $V$

Conforme relatado na subseção anterior, a velocidade média pode ser obtida pela definição de esperança matemática e por meio da função característica.

### Pela definição de esperança matemática

Partindo-se da expressão 4.25, obtém-se:

$$\begin{aligned}\bar{v} = E(V) &= \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} v \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)v^2} dv; \\ \Rightarrow \bar{v} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)v^2} dv.\end{aligned}$$

Mas, segundo Ribas (2007):

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)v^2} dv = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = 2 \left(\frac{kT}{m}\right)^2.$$

Então:

$$\bar{v} = E(V) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} 2 \left(\frac{kT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

### Por meio da função característica

Neste caso, derivando-se a expressão 4.32 em relação a  $t$ , obtém-se:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)\phi_V(t) &= e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)i^2 t^2} \left(\frac{kT}{m} i^2 t\right) \left[1 + \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i t + \left(\frac{kT}{m}\right) i^2 t^2\right] + \\ &+ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)i^2 t^2} \left[\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i + 2\left(\frac{kT}{m}\right) i^2 t\right]. \end{aligned} \right\} (4.33)$$

Conforme já relatado, a esperança de  $V$  é igual ao valor dessa derivada no ponto  $t = 0$ , dividido por  $i$ , isto é:

$$E(V) = \frac{1}{i} \left( \frac{d}{dt} \right) \phi_V(0) = \frac{1}{i} e^0 \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} ;$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v} = E(V) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}, \quad (4.34)$$

que é a velocidade média das moléculas.

### 5.3 Esperança de $V^2$

Também neste caso, pode-se utilizar o método comum ou a função característica para obter o resultado desejado.

#### Pela definição de esperança matemática

A expressão 4.25 conduz a:

$$E(V^2) = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \int_0^{\infty} v^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2} dv ;$$

$$\Rightarrow E(V^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2} dv .$$

Mas, segundo Ribas (2007):

$$\int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2} dv = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{\frac{5}{2}} .$$

Então:

$$E(V^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{\frac{5}{2}} = \frac{3kT}{m} .$$

**Por meio da função característica**

Neste caso, conforme já foi abordado, deve-se utilizar a derivada de segunda ordem da expressão 4.32, no ponto  $t=0$  e dividir essa derivada por  $i^2$ . Como a derivada de primeira ordem já foi obtida na subseção anterior (4.33), o primeiro passo será reescrever essa expressão de forma mais simplificada, isto é:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\phi_V(t) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)i^2t^2} \left[ \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i + \left(\frac{kT}{m} + \frac{2kT}{m}\right)i^2t + \frac{kT}{m} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i^3t^2 + \left(\frac{kT}{m}\right)^2 i^4t^3 \right].$$

Derivando-se essa função em relação a  $t$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)\phi_V(t) &= e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)i^2t^2} \left(\frac{kT}{m} i^2t\right) \left[ \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i + \left(\frac{kT}{m} + \frac{2kT}{m}\right)i^2t + \right. \\ &+ \left. \frac{kT}{m} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i^3t^2 + \left(\frac{kT}{m}\right)^2 i^4t^3 \right] + e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)i^2t^2} \left[ \left(\frac{kT}{m} + \frac{2kT}{m}\right)i^2 + \right. \\ &+ \left. 2\left(\frac{kT}{m}\right) \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} i^3t + 3\left(\frac{kT}{m}\right)^2 i^4t^2 \right]. \end{aligned}$$

Então, a esperança de  $V^2$  será:

$$E(V^2) = \frac{1}{i^2} \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)\phi_V(0) = \frac{1}{i^2} e^0 \left(\frac{kT}{m} + \frac{2kT}{m}\right)i^2 = \frac{3kT}{m}$$

$$\boxed{E(V^2) = \frac{3kT}{m}}. \quad (4.35)$$

Este resultado, associado ao da expressão 4.34, permite encontrar o desvio padrão da velocidade, conforme descrito na próxima subseção.

Na Física, é comum utilizar o conceito de velocidade quadrática média que é dado pela raiz quadrada da expressão 4.35. Halliday & Resnick (1984) relatam que essa é uma espécie de média da velocidade molecular. Neste trabalho, como o enfoque é o ensino de Estatística, não foi dada ênfase a essa velocidade.

#### 5.4 Desvio padrão da velocidade

O desvio padrão pode ser encontrado extraindo-se a raiz quadrada da diferença entre esperança de  $V^2$  e o quadrado da esperança de  $V$ , isto é:

$$\sigma_V = \sqrt{E(V^2) - [E(V)]^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m} - \frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{kT}{\pi m}(3\pi - 8)};$$

$$\Rightarrow \sigma_V = \sqrt{\frac{kT}{\pi m}(3\pi - 8)} . \quad (4.36)$$

Nota-se que o desvio padrão aumenta com o aumento da temperatura absoluta ou com a redução da massa da molécula. Isso significa que a curva da distribuição de velocidade (expressão 4.25) será mais achatada para temperaturas mais elevadas ou gases mais leves. Esse fato será comprovado na seção 7.

#### 5.5 Velocidade mais provável ou moda da velocidade

A velocidade mais provável ( $v_p$ ) representa o valor da velocidade para a qual a função de Maxwell (expressão 4.25) assume o seu valor máximo. Para se obter esse resultado, primeiro, deve-se fazer uma transformação logarítmica na expressão 4.25, para facilitar o processo. Assim:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2};$$

$$\ln f(v) = \ln \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2} \right];$$

$$\Rightarrow \ln f(v) = \ln \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 2 \ln(v) - \frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2.$$

Derivando-se essa função em relação a  $v$  e igualando-se essa derivada a zero, obtém-se:

$$\left( \frac{d}{dv} \right) \ln f(v) = \frac{2}{v_p} - \left( \frac{m}{kT} \right) v_p = 0;$$

$$\Rightarrow \frac{2}{v_p} = \left( \frac{m}{kT} \right) v_p \quad \Rightarrow \quad \frac{2kT}{m} = v_p^2;$$

$$\Rightarrow \boxed{v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}. \quad (4.37)$$

Comparando-se essa expressão com a 4.34, pode-se notar que este resultado é um pouco inferior ao valor esperado da velocidade  $\left( 2 < \frac{8}{\pi} \right)$ . Esse fato mostra que a curva da distribuição de Maxwell (expressão 4.25) é assimétrica em relação à velocidade mais provável.

Na próxima seção, será apresentado um esquema do aparelho original utilizado por Miller e Kusch para a verificação experimental da distribuição de velocidades de Maxwell, bem como a fotografia e uma breve descrição do aparelho usado para simulação dessa distribuição.

## 5 APARELHO EXPERIMENTAL

O objetivo desta seção é fazer uma breve descrição sobre os métodos utilizados para a verificação da distribuição de velocidades de Maxwell.

Essa distribuição, apesar de ter sido deduzida em 1859, teve sua primeira medida direta somente em 1926, por Otto Stern (Tipler & Llewellyn, 2006, p.225). Isso motivou vários outros pesquisadores que procuraram melhorar as técnicas utilizadas, até que, em 1955, Miller e Kusch fizeram uma verificação experimental de alta precisão de tal distribuição, usando o aparelho esquematizado na Figura 4.3.

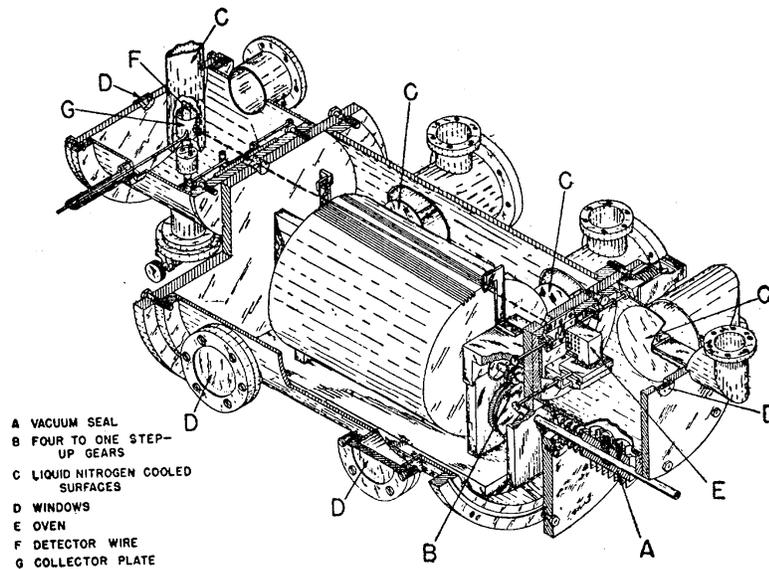


FIGURA 4.3 Diagrama esquemático do aparelho designado para medir a distribuição de velocidades de Maxwell.

Fonte: Miller & Kusch (1955).

Este aparelho pode ser representado de forma mais simplificada como na Figura 4.4.

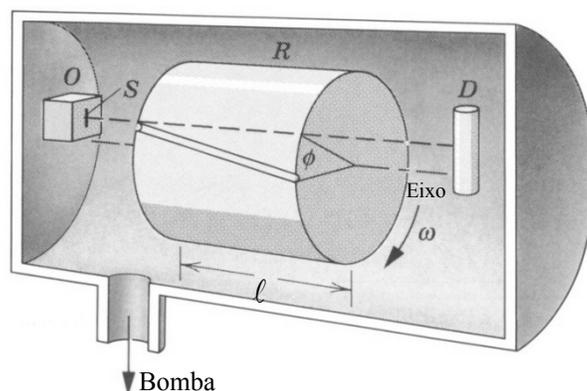


FIGURA 3.4 Esquema simplificado do aparelho de Miller e Kusch.  
Fonte: Adaptado de Halliday & Resnick (1984).

Na Figura 4.4 está representado um esquema simplificado do aparelho usado por Miller e Kusch para a verificação experimental da distribuição de velocidades de Maxwell. Com base nessa figura, os elementos principais desse aparelho são: forno ( $O$ ), seletor de velocidades ( $R$ ) e placa coletora ( $D$ ).

O forno contém uma fenda  $S$ , por onde escapa o vapor da substância aquecida. No experimento real de Miller e Kusch, foram utilizados o potássio e o tálio para diferentes temperaturas.

Por outro lado, o seletor de velocidades consiste de um cilindro sólido contendo sulcos helicoidais, dos quais apenas um foi mostrado na Figura 4.4. Para uma dada velocidade angular  $\omega$  do cilindro, apenas as moléculas que têm velocidade dentro de certa faixa (em torno da velocidade  $v$ ) podem passar ao longo do sulco, sem se chocar contra a parede (Halliday & Resnick, 1984, p. 240; Tipler & Llewellyn, 2006, p.225). Essa velocidade pode ser encontrada pela expressão:

$$v = \frac{\ell \omega}{\phi},$$

em que  $\phi$ ,  $\ell$  e  $\omega$  são, respectivamente, o deslocamento angular, o comprimento e a velocidade angular do cilindro.

A placa coletora registra a intensidade do feixe em função da velocidade  $\omega$  selecionada.

Vale ressaltar, ainda, que o interior do aparelho é altamente evacuado por meio da bomba, a fim de reduzir as colisões entre as moléculas emergentes da fenda,  $S$  (Halliday & Resnick, 1984).

O experimento de Miller e Kusch também pode ser simulado por meio do aparelho cuja fotografia se encontra na Figura 4.5.

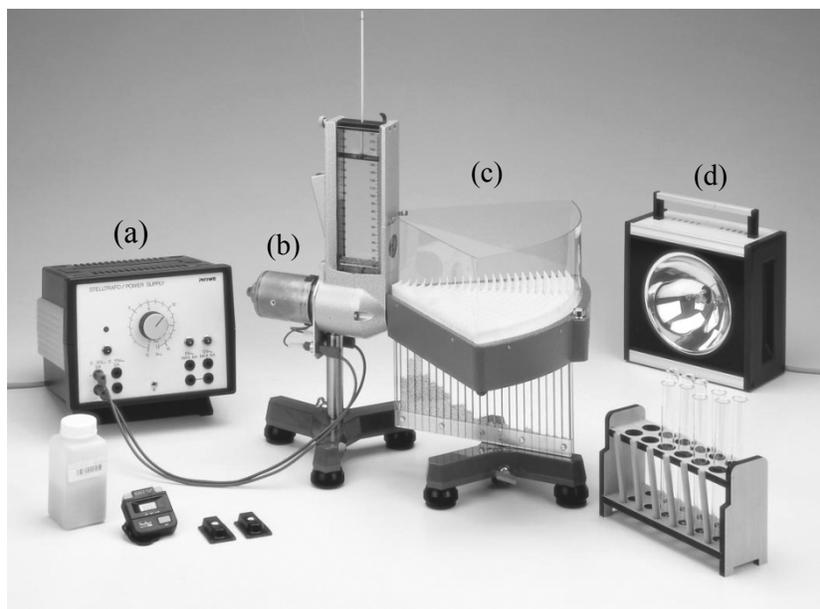


FIGURA 4.5 Aparelho para simulação da distribuição de velocidades de Maxwell: (a) regulador de freqüência; (b) agitador mecânico; (c) depósito e (d) estreboscópio.

Fonte: Physics 261 Laboratory – Departamento de Física da Universidade de Regina, Canadá

O aparelho da Figura 4.5 consta de quatro elementos principais: regulador de frequência (*a*), câmara de vibração (*b*), depósito (*c*) e estreboscópio (*d*). Ele tem como meta simular a distribuição de Maxwell. Nele, as moléculas são representadas por esferas de metal (ou vidro).

O agitador mecânico acoplado agita as esferas, fazendo com que elas colidam entre si e com as paredes da câmara, até alcançarem uma situação de equilíbrio semelhante à do gás. Em seguida, uma porta é aberta e algumas bolas caem no depósito, que possui várias divisórias espaçadas de 1,0 em 1,0 cm. As divisórias mais afastadas da saída da câmara de vibração são atingidas apenas pelas esferas mais rápidas.

Por meio do controlador de frequência, pode-se repetir o experimento para frequências diferentes e analisar a distribuição de esferas nas divisórias para cada uma delas.

A descrição do aparelho da Figura 4.5 foi adaptada de “*Physics 261 Laboratory Manual*”, da Universidade de Regina, Canadá.

Na seção seguinte, são apresentados alguns resultados numéricos que foram obtidos por meio da distribuição de Maxwell.

## 6 APLICAÇÃO PRÁTICA

Apesar da distribuição de velocidades de Maxwell ter sido deduzida com base em pressuposições válidas somente para os gases ideais monoatômicos, ela fornece bons resultados para os gases reais sujeitos a altas temperaturas e baixa pressão, como sugere a teoria cinética dos gases. Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos por meio dessa distribuição para seis gases e três temperaturas diferentes. Os dados da massa molar foram extraídos de Halliday & Resnick (1984).

Para obter esses resultados, utilizou-se a massa molar (massa de um mol) em vez da massa de uma molécula. Assim, as expressões 4.25, 4.34, 4.36 e 4.37 podem ser reescritas em função da massa molecular, conforme descrito a seguir.

A massa de uma molécula pode ser encontrada pela razão entre a massa molar ( $M$ ) e o número de Avogadro ( $n_0 = 6,023 \times 10^{23}$  moléculas), isto é:

$$m = \frac{M}{n_0} = \frac{M k}{r}, \quad (4.38)$$

tendo em vista que  $k = \frac{r}{n_0}$ , em que  $r$  é a constante universal dos gases<sup>9</sup>,

conforme foi relatado na subseção 4.5.

Substituindo-se a expressão 4.38 nas expressões 4.25, 4.34, 4.36 e 4.37, obtém-se:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m}{kT} \right) v^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{M}{rT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{M}{rT} \right) v^2}, \quad (4.39)$$

---

<sup>9</sup>  $r = 8,317 \text{ J}/(\text{mol K})$ .

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8rT}{\pi M}}, \quad (4.40)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{kT}{\pi m}(3\pi - 8)} = \sqrt{\frac{rT}{\pi M}(3\pi - 8)}, \quad (4.41)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2rT}{M}}. \quad (4.42)$$

A partir dessas expressões, obtiveram-se os resultados desejados.

### Comportamento da distribuição de Maxwell para temperaturas diferentes

Na Tabela 4.1 foram apresentados os resultados obtidos com base nas expressões 4.40, 4.41 e 4.42, para o gás oxigênio, em três temperaturas: 73 K, 273K e 500K.

TABELA 4.1 Velocidade média, velocidade mais provável e desvio padrão da velocidade para o gás oxigênio, em três temperaturas: 73K, 273K e 500 K.

Temperatura (K)	$\bar{v}$ (m/s)	$v_p$ (m/s)	$\sigma_v$ (m/s)
73	219,81	194,80	92,76
273	425,07	376,71	179,39
500	575,26	509,81	242,77

Por meio dos resultados da Tabela 4.1, pode-se notar que a velocidade média, a velocidade mais provável e o desvio padrão crescem com o aumento da temperatura. Observa-se também que a velocidade média foi superior à velocidade mais provável, para todas as temperaturas. Isso significa que a distribuição de Maxwell é assimétrica à direita, isto é, o coeficiente de

assimetria é positivo. Tal fato pode ser comprovado por meio do primeiro coeficiente de Pearson, que é dado por:

$$a_s = \frac{\bar{v} - v_p}{\sigma_v} . \quad (3.39)$$

Para reforçar tais idéias, são apresentadas, na Figura 4.6, as curvas obtidas por meio da distribuição de Maxwell (expressão 4.39) para as condições estabelecidas anteriormente.

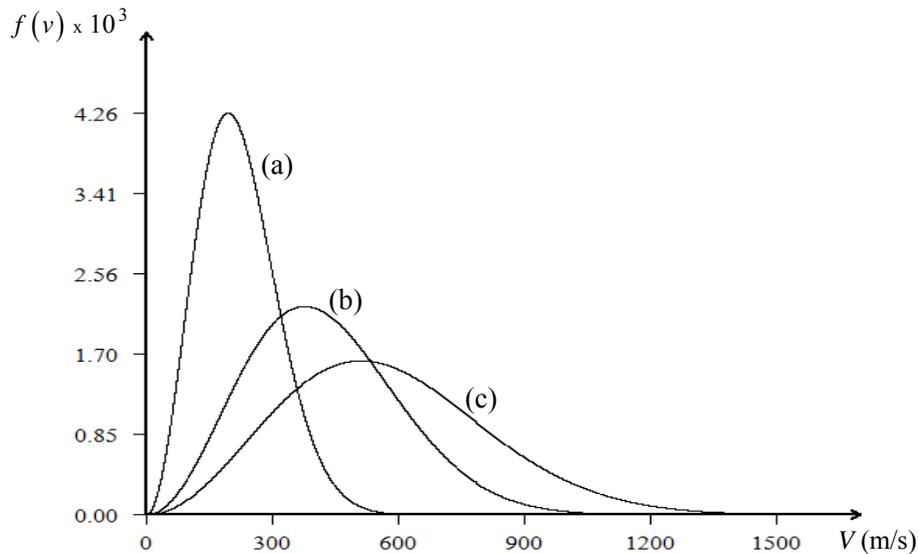


FIGURA 4.6 Curvas da distribuição de Maxwell para o gás oxigênio, nas temperaturas de 73K (a), 273K (b) e 500 K (c).

Nota-se, por meio da Figura 4.6, que o aumento na temperatura faz a curva de Maxwell ficar mais achatada. Assim, é mais provável encontrar moléculas com velocidades elevadas em temperaturas altas. Por outro lado, a assimetria em relação ao valor mais provável não é tão visível, por meio desta

figura, tendo em vista que a diferença entre esse valor e o da velocidade média é pequeno, se comparado com os valores da escala.

### Comportamento da distribuição de Maxwell para gases diferentes

Na Tabela 4.2 foram apresentados os resultados obtidos, com base nas expressões 4.40, 4.41 e 4.42, para seis gases na temperatura de 273K.

TABELA 4.2 Velocidade média, velocidade mais provável e desvio padrão da velocidade para seis gases na temperatura de 273K.

Gás	M (g/mol)	$\bar{v}$ (m/s)	$v_p$ (m/s)	$\sigma_v$ (m/s)
H <sub>2</sub>	2,02*	1691,84	1499,35	713,98
He	4,00*	1202,28	1065,49	507,38
H <sub>2</sub> O	18,00*	566,76	502,28	239,18
N <sub>2</sub>	28,00*	454,42	402,72	191,77
O <sub>2</sub>	32,00*	425,07	376,71	179,39
CO <sub>2</sub>	44,00*	362,50	321,26	152,98

\* Fonte: Halliday & Resnick (1984).

Por meio dos resultados da Tabela 4.2, observa-se que os valores obtidos para cada grandeza decrescem com o aumento da massa molar. Observa-se também, neste caso, que a distribuição de Maxwell é assimétrica à direita.

Na Figura 4.7, foram apresentadas as curvas da distribuição de Maxwell para os gases hélio (He), hidrogênio (H<sub>2</sub>) e oxigênio (O<sub>2</sub>).

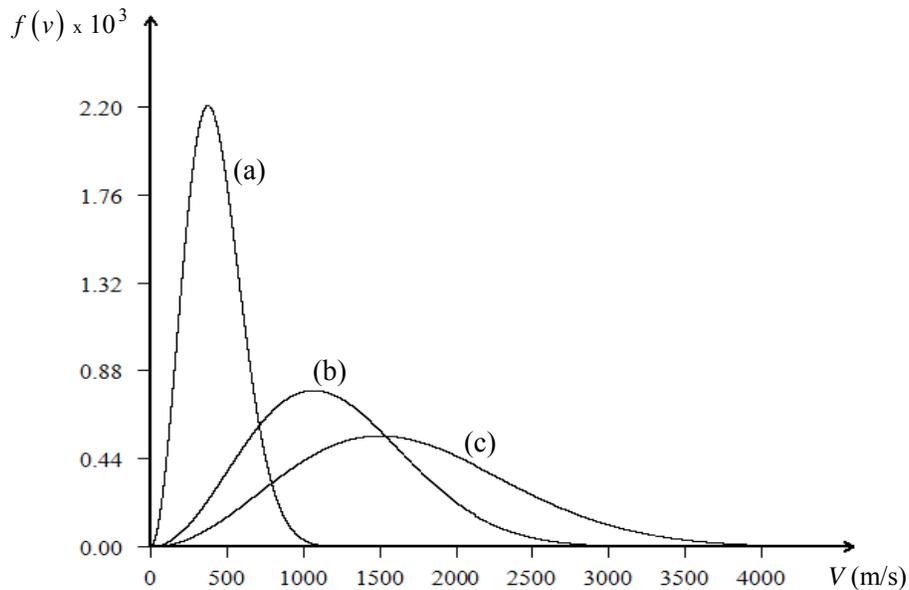


FIGURA 4.7 Curvas da distribuição de Maxwell para os gases hélio (b), hidrogênio (c) e oxigênio (a), na temperatura de 273K.

Nota-se, por meio dos resultados da Figura 4.7, que a curva mais achatada foi obtida para o gás hidrogênio. A justificativa para esse fato é que o desvio padrão para tal gás é o maior entre aqueles que se encontra na Tabela 4.2. Assim, o hidrogênio tem maior probabilidade de escapar da atmosfera terrestre, a grandes altitudes, do que o oxigênio ou o nitrogênio (Halliday & Resnick, 1984).

## **6 CONCLUSÕES**

Concluiu-se com este capítulo que:

- os resultados metodológicos obtidos por meio dessa distribuição condizem com os da teoria cinética dos gases;
- a velocidade média das moléculas é um pouco superior à velocidade mais provável para qualquer temperatura e gases diferentes, tendo em vista a assimetria da distribuição de Maxwell;
- as curvas dessa distribuição ficam mais achatadas com o aumento da temperatura e a redução da massa molecular do gás. Este fato é uma consequência do aumento do desvio padrão da velocidade;
- a distribuição de velocidades de Maxwell pode ser deduzida por meios de argumentos estatísticos, o que configura-se uma nova apresentação para aspectos de cálculo desta distribuição;
- tal distribuição constitui uma excelente ferramenta para o ensino interdisciplinar da Estatística, devendo ser usada apenas no Ensino Superior, devido ao seu avançado formalismo matemático.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEISER, A. Mecânica estatística. In: \_\_\_\_\_. **Conceitos de física moderna**. Tradução de Gita K. Ghinzberg. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1969. p. 264-299. Título original: Concepts of modern physics.
- BORN, M. **Física atômica**. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1962. 528 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. Lavras: UFLA/DEX, 2005. 664 p.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física**. 4.ed. Tradução de Antônio Luciano Leite. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. v.2, 309 p. Título Original: Physics.
- MAGALHÃES, M. N. **Conceitos básicos em probabilidade**. 2.ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2006. 428 p.
- MILLER, R. C.; KUSH, P. Velocity distributions in potassium and thallium atomic beams, **Physical Review**, New York, v. 99, n. 4, p. 1314-1321, ago. 1955.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3.ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1974. 564 p.
- MORSE, P. M. **Thermal physics**. New York: W.A. Benjamin, 1962. 276 p.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. 4.ed.rev. São Paulo: E. Blüncher, 2004. v.2, 307 p.
- PHYSICS 261 Laboratory Manual: Maxwellian Speed Distribution (Experimento 8). Regina, Canadá: Departamento de Física da Universidade de Regina, 2008. 20 p. Disponível em: <<http://hyperion.cc.uregina.ca/~bergbusp/uglabs/p261/Experiments/Exp8.pdf>>. Acesso em: 29 mar. 2008.
- REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. New York: McGraw-Hill, 1965. 650 p.
- RIBAS, R. V. **Estrutura da matéria–I**. São Paulo: USP, 2007. 151 p. Apostila. Disponível em: <<http://www.dfn.if.usp.br/~ribas/download/EstrMat-I.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2007.

ROY, B. N. **Fundamentals of classical and statistical thermodynamics.**  
Chichester: J. Wiley, 2002. 768 p.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. **Física Moderna.** 3.ed. Tradução de  
Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2006.  
515 p.

WALCK, C. **Hand-book on statistical distributions for experimentalists.**  
Stockholm: University of Stockholm, 2007. 190 p. Disponível em:  
<<http://www.physto.se/~walck/suf9601.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2007.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em face do que foi estudado nos capítulos anteriores pode-se concluir que:

- existe, na literatura sobre Estatística, Física e Matemática, material suficiente para a construção de recursos didáticos para o ensino interdisciplinar de Estatística;
- a probabilidade geométrica fornece uma interface entre Estatística e Matemática de forma muito lúdica, que garante um bom envolvimento dos alunos nas atividades (ou experimentações);
- a distribuição de velocidades de Maxwell permite a visualização do aparecimento das distribuições por argumentos estatísticos, além dos físicos. Além disso, o tamanho do número de Avogadro permite argumentar sob o aparecimento da distribuição normal de forma quase perfeita;
- o Quincux de Galton mostra-se especialmente rico para um ensino da distribuição binomial e normal, indicando a possibilidade de recursos para outras áreas do ensino de Estatística.

Espera-se, com este trabalho, dar suporte teórico e didático, tanto aos professores da Educação Básica como do Ensino Superior, para o desenvolvimento de atividades práticas para o ensino de diversos tópicos da Estatística.

Para estudos futuros, recomenda-se a possibilidade de novos recursos didáticos (caixa de amostragem, Quincux duplo e o Quincux simples para o estudo de outras distribuições e para o estudo do movimento browniano entre outras possibilidades) e, também, evoluir para o projeto de um laboratório para o ensino interdisciplinar de Estatística.

## ANEXOS

ANEXO A	Página
PROGRAMA A1 – DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM DUAS PARTES .	155
PROGRAMA A2 – PROBLEMA DO MACARRÃO .....	157
PROGRAMA A3 – LANÇAMENTO DA MOEDA .....	159
PROGRAMA A4 - JOGO DOS DISCOS .....	161
PROGRAMA A5 - AGULHA DE BUFFON .....	163
PROGRAMA A6 - LANÇAMENTO DE DARDOS .....	165

## PROGRAMA A1 – DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM DUAS PARTES

```
# SIMULAÇÃO PARA ESTIMAR A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NA  
# DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM DUAS PARTES
```

```
rm(list=ls(all=TRUE))      # remove todos os objetos
```

```
# DADOS DE ENTRADA
```

```
# Alterar conforme o interesse
```

```
l=20                      # comprimento do segmento
```

```
intervalo=0              # tempo entre uma simulação e outra
```

```
nmax=200000              # número máximo de lançamentos
```

```
# VALORES INICIAIS DA SIMULAÇÃO
```

```
# Não alterar
```

```
x=y=Pf=w=NULL
```

```
P=1/3                    # valor da probabilidade geométrica
```

```
# INÍCIO DA SIMULAÇÃO
```

```
for(j in 1:nmax){        # INÍCIO das repetições  
x=c(x,runif(1,0,1)); y=c(y,l-x[j]); if(x[j]>1/3 & x[j]<2*1/3){ w=c(w,1)  
} else { w=c(w,0)}; Pf=c(Pf,sum(w)/j)
```

```
layout(matrix(c(1,2,4,1,3,4),nrow = 3),height=c(1,4,5)); par(mar=c(0,0,0,0))  
plot.new(); text(0.5, 0.5, "Divisão de um segmento em 2 partes", cex=1.5,  
font=2); par(mar= c(3, 3, 0, 1)); plot(1, xlim=c(0, 2 * l),ylim=c(0, 2 * l),  
type = "n", xlab = "", ylab = "", axes = FALSE); rect(c(l/2,l/2,l/2+x[j]),  
c(3*1/2,1,5*1/8), c(3*1/2,l/2+x[j],3*1/2), c(3*1/2,1,5*1/8),lwd=2);  
rect(l/2+x[j],11*1/8, l/2+x[j], 13*1/8, lty=3) ; arrows(c(l/2,3*1/2), c(l/13,l/13),  
c(3*1/2,l/2), c(l/13,l/13), length=0.08, lwd=2, col="blue"); rect(c(l/2,3*1/2),  
c(0,0),c(l/2,3*1/2), c(l/6,l/6), lty=3); axis(1,11*1/12,"l =", font=3,tcl=0,  
cex.axis=1.3, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=l/13); axis(1, 13*1/12, l, font=3, tcl=0,  
cex.axis=1.3, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=l/13); plot(1, xlim = c(0,l+l/8),  
ylim=c(0,l), type="n", xlab="", ylab="", axes=FALSE); rect(0, 3*1/4, l,  
3*1/4); rect(c(0, l/3, 2*1/3, l), c(11*1/16, 11*1/16, 11*1/16, 11*1/16), c(0, l/3,  
2*1/3, l), c(13*1/16, 13*1/16, 13*1/16, 13*1/16), lty=3); text(c(0,l), c(9*1/16,  
9*1/16), c(0,l),font = 3, cex=1.2); points(0, 15*1/64, pch = 20, cex=1.2,  
col = "red"); points(0, 3*1/64, pch = 1, cex=1.2, col = "blue")  
text(5*1/16,l/4, "Evento favorável",font = 3,cex=1.4)  
text(3*1/8, l/16,"Evento desfavorável ",font = 3,cex=1.4)  
if(x[j]>1/3 & x[j]<2*1/3){; points(x[j], 3*1/4, pch = 20, cex=1.2,col = "red")
```

```

} else {; points(x[j], 3*1/4, pch=1, cex=1.2,col="blue"); }; if(j<=5000){
plot(Pf, type="l", ylim = c(0.3, 0.37), xlab="Número de repetições",
ylab = "Probabilidade", mgp = c(2, 0.5, 0), cex.lab=1.1,font.lab=3)
} else {; if(j<=20000){; plot(Pf,type = "l",ylim=c(0.32, 0.347) , font.lab=3,
xlab="Número de repetições", ylab = "Probabilidade", mgp = c(2, 0.5, 0),
cex.lab=1.1); } else {; plot(Pf, type = "l", ylim=c(0.33, 0.337), font.lab=3,
xlab="Número de repetições", ylab = "Probabilidade", mgp = c(2, 0.5, 0),
cex.lab=1.1) ; } ; }; abline(h = P, lty = 2); legend("topright",
legend = expression("P"),lty=2, bty = "n",cex=1.2); legend("bottomright",
legend = expression("Pf"), lty = 1, bty = "n", cex = 1.2); if (intervalo>0){
t=intervalo*1000000; for (q in 1:t){ ; }; }
}
# FIM dos lançamentos
# FIM DA SIMULAÇÃO

# RESULTADOS DA SIMULAÇÃO
div2partes=data.frame(Pf);write.table(div2partes,"Div2partes.txt")

```

## PROGRAMA A2 – PROBLEMA DO MACARRÃO

```
# SIMULAÇÃO PARA ESTIMAR A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO  
# PROBLEMA DO MACARRÃO
```

```
rm(list=ls(all=TRUE)) # remove todos os objetos  
sim=SIM=Sim=TRUE # validação da resposta sim  
não=nao=NÃO=NAO=Nao=Não=FALSE # validação da resposta  
não
```

```
# DADOS DE ENTRADA
```

```
# Alterar conforme o interesse
```

```
l=30 # comprimento do segmento AB  
nmax=200000 # número total de repetições  
intervalo=0 # tempo entre uma simulação e outra  
Apagar = sim # sim ou não  
# sim = apaga a simulação anterior  
# não = não apaga a simulação anterior
```

```
# VALORES INICIAIS DA SIMULAÇÃO
```

```
# Não alterar
```

```
x=y=z=xs=xi=ys=yi=w=Pf=NULL  
P=1/4 # probabilidade geométrica
```

```
# INÍCIO DA SIMULAÇÃO
```

```
for(j in 1:nmax){ # INÍCIO das repetições  
m=0; while (m<1){; s=runif(1,0,1); r=runif(1,0,1); if ((s+r)< 1){; m=1  
x=c(x,s) # comprimento de AP  
y=c(y,r) # comprimento de PQ  
z=c(z,l-x[j]-y[j]) # comprimento de QB  
}; }; if(x[j]<1/2 & y[j]<1/2 & z[j]<1/2){; xs=c(xs,x[j]); ys=c(ys,y[j]); w=c(w,1)  
} else {; xi=c(xi,x[j]); yi=c(yi,y[j]); w=c(w,0);}; Pf=c(Pf,sum(w)/j)
```

```
layout(matrix(c(1,2,4,1,3,4), nrow=3), height=c(1,4,5)); par(mar=c(0,0,0,0))  
plot.new(); text(0.5, 0.5, "Problema do Macarrão", cex=1.5,font=2)  
par(mar=c(3, 3, 0, 1)); plot(1, xlim=c(0, 2 * l), type = "n", ylim=c(0, 2 * l),  
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE); rect(c(1/2,1/2,1/2+x[j],1/2+x[j]+y[j]),  
c(13*1/8,9*1/8,3*1/4,3*1/8), c(3*1/2,1/2+x[j],1/2+x[j]+y[j],3*1/2),  
c(13*1/8,9*1/8,3*1/4,3*1/8), lwd=2); rect(c(1/2+x[j],1/2+x[j]+y[j]),  
c(6*1/4,6*1/4), c(1/2+x[j],1/2+x[j]+y[j]), c(7*1/4,7*1/4),lty=3); arrows(c(1/2,
```

```

3*1/2), c(1/20,1/20), c(3*1/2, 1/2), c(1/20, 1/20), col="blue", lwd=2,
length=0.08); rect(c(1/2, 3*1/2), c(0, 0), c(1/2, 3*1/2), c(1/6, 1/6), lty=3)
axis(1, 11*1/12, "l =", font=3, tcl=0, cex.axis=1.3, pos=1/20, mgp=c(0, 0.6, 0))
axis(1, 13*1/12, 1, font=3, tcl=0, cex.axis=1.3, pos=1/20, mgp=c(0, 0.6, 0))
plot(1, xlim = c(0, 1+1/2), ylim = c(0, 1+1/4), type = "n", xlab="", ylab="",
axes = FALSE); g=seq(0,1,0.1); c=1-g; lines(g,c, type="h", col="gray95")
rect(0, 0, 1/2, 1/2, col="gray85"); axis(1, c(0, 1/2, 1), c(0, 1/2, 1), tcl=-0.5,
pos=0); axis(2, c(0, 1/2, 1), c(0, 1/2, 1), tcl = -0.5, pos=0); segments(0,1,1,0)
g=seq(0, 1/2, 0.1); c=1/2-g; lines(g, c, type="h", col="gray95")
segments(0,1/2,1/2,0); arrows(0,0,0,1+1/4,length = 0.05); arrows(0,0,1+1/4,0,
length=0.05); if (Apagar==não) {; points(xs, ys, pch=20, cex=1.2, col="red")
points(xi, yi, pch = 20, cex=1.2,col = "blue"); } else {
if(x[j]<1/2 & y[j]<1/2 & z[j]<1/2){; points(x[j], y[j], pch=20, cex=1.2,
col="red"); } else {; points(x[j], y[j], pch = 1, cex=1.2, col = "blue");}; }
if(j<=5000){; plot(Pf, type="l", cex.lab=1.1, ylim=c(0.20, 0.30),
mgp=c(2,0.6,0), font.lab=3, xlab="Número de repetições em que x + y < l",
ylab = "Probabilidade"); } else {; if(j<=20000){; plot(Pf, type = "l",
cex.lab=1.1, ylim = c(0.23, 0.27), mgp=c(2,0.6,0) , ylab="Probabilidade",
xlab="Número de repetições em que x+y<l", font.lab=3); } else {
plot(Pf, cex.lab=1.1, ylim=c(0.245, 0.255), font.lab=3, mgp=c(2, 0.6, 0),
xlab="Número de repetições em que x + y < l", ylab = "Probabilidade",
type="l"); }; }; abline(h = P, lty = 2); legend("topright", lty = 2,
legend = expression("P"), bty = "n", cex=1.2); legend("bottomright",
legend = expression("Pf"), lty=1, bty="n",cex=1.2)
if (intervalo>0){; t=intervalo*1000000; for (r in 1:t){; }; }
} # FIM das repetições
# FIM DA SIMULAÇÃO

```

```

# RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

```

```

macarrão=data.frame(Pf); write.table(macarrão,"macarrão.txt")

```

### PROGRAMA A3 – LANÇAMENTO DA MOEDA

```
# SIMULAÇÃO PARA ESTIMAR A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO  
# LANÇAMENTO DA MOEDA ENTRE DUAS RETAS PARALELAS
```

```
rm(list=ls(all=TRUE))          # remove todos os objetos  
sim=SIM=Sim=TRUE              # validação da resposta sim  
não=nao=NÃO=NAO=Nao=Não=FALSE # validação da resposta  
não
```

```
# DADOS DE ENTRADA
```

```
# Alterar conforme o interesse
```

```
d = 10          # distância entre as retas  
r = 3          # raio da moeda  
intervalo=0    # tempo entre uma simulação e outra  
nmax=200000   # número máximo de lançamentos  
Apagar = sim   # sim ou não  
              # sim = apaga a simulação anterior  
              # não = não apaga a simulação anterior
```

```
# VALORES INICIAIS DA SIMULAÇÃO
```

```
# Não alterar
```

```
a=d/2; k=0; x=y=xs=xi=ys=yi=h=Pf=NULL; phi=seq(0,2*pi,0.001)  
if(r>=a) stop("o diâmetro da moeda não pode ser maior que d")  
P=(a-r)/a          # probabilidade geométrica
```

```
# INÍCIO DA SIMULAÇÃO
```

```
for(j in 1:nmax){          # INÍCIO dos lançamentos  
h=c(h, runif(1,0,a)); k=k+(h[j]<a-r); Pf=c(Pf,k/j); x=c(x,runif(1,r,r+d))  
y=c(y, sample(c(r+d/2-h[j],r+d/2+h[j]),1)); if(h[j]<a-r){  
xs=c(xs,x[j]); ys=c(ys,y[j]); } else {; xi=c(xi,x[j]); yi=c(yi,y[j]); }
```

```
layout(matrix(c(1,2,4,1,3,4), nrow=3), height=c(1,4.5,4.5)); par(mar=c(0,0,0,0))  
plot.new(); text(0.5, 0.5, "Lançamento da Moeda", cex = 1.5,)  
par(mar=c(3,3,0,1)); plot(1,xlim=c(0,2*r+d), font=2, type="n", xlab="",  
ylim=c(0,2*r+d), ylab="", axes = FALSE); rect(0,r,2*r+d,r+d, lty=0,  
col="gray97"); rect(0,2*r,2*r+d,d, col="gray87", lty=0); rect(c(0,0), c(r,r+d),  
c(2*r+d,2*r+d),c(r,r+d),lwd=2); arrows(c(d/2,2*r+d/2), c(0,0),c(2*r+d/2,d/2),  
c(0,0),col="blue",length=0.08,lwd=2); bd =par("usr"); rect(c(d/2,2*r+d/2),  
c(bd[1],bd[1]),c(d/2,2*r+d/2), c(d/16,d/16), lty=3); axis(1, r+7*d/16, "2r =",  
font=3, tcl=0, cex.axis=1.5,mgp=c(0, 0.6, 0),pos=0); axis(1, r+5*d/8,2*r,
```

```

font=3, tcl=0, cex.axis=1.5,mgp=c(0, 0.6, 0),pos=0); rect(c(bd[1], bd[1]),
c(r,r+d), c(0,0), c(r,r+d), lty=3); arrows(c(bd[1]/2, bd[1]/2), c(r,d+r), c(bd[1]/2,
bd[1]/2), c(d+r,r), col="blue", length=0.08, lwd=2); axis(2, r+7*d/16, "d =",
font = 3, tcl = 0, cex.axis = 1.5,mgp = c(0, 0.6, 0),pos=bd[1]/2); axis(2,
r+5*d/8,d, font = 3, tcl=0, cex.axis=1.5, mgp=c(0,0.6,0),pos=bd[1]/2)
px=x[j]+r*cos(phi); py=y[j]+r*sin(phi) ; lines(px,py,col="red")
points(x[j], y[j], pch = 20, cex=1,col = "red")
plot(1,type="n",ylim=c(0,d),xlim=c(0,d),axes=FALSE,xlab="",ylab="")
rect(0, 0, d, d, col = "gray97",lty=0); rect(0, r, d, d-r, col = "gray87", lty=0)
axis(2,c(0,a,2*a),c(0,a,2*a),tcl=-0.5,cex.axis=1.5); rect(c(0,0),c(0,d),
c(d,d),c(0,d), lwd=2); if (Apagar==não) {; points(xs-r, ys-r, pch = 20, cex=1.2,
col = "red"); points(xi-r, yi-r, pch = 20, cex=1.2,col = "blue")
} else {; if(h[j]<a-r){; points(x[j]-r,y[j]-r,pch=20, cex=1.2,col = "red")
} else {; points(x[j]-r,y[j]-r,pch=20, cex=1.2,col = "blue"); };}
par(mar=c(3,3,0,1)); if(j<=5000){
plot(Pf,ylim=c(P-0.2*P,P+0.2*P), xlab="Número de Lançamentos",
type = "l", font.lab=3, ylab="Probabilidade", mgp=c(2,0.6,0), cex.lab=1.2,)
} else {; if(j<=50000){; plot(Pf, ylim=c(P-0.05*P,P+0.05*P), type = "l",
xlab="Número de Lançamentos", ylab="Probabilidade", font.lab=3,
mgp = c(2, 0.6, 0), cex.lab=1.2); } else {; plot(Pf, ylab = "Probabilidade",
ylim = c(P-0.01*P, P+0.01*P), xlab = "Número de Lançamentos", type = "l",
mgp = c(2, 0.6, 0),cex.lab=1.2,font.lab=3) ;}; }; abline(h = (a-r)/a, lty = 2,
col = "red"); legend("topright", legend = expression("P"), lty = 2, bty = "n",
cex=1.2); legend("bottomright", legend=expression("Pf"), lty = 1, bty="n",
cex = 1.2); if (intervalo>0){ t=intervalo*1000000; for (q in 1:t){; }; }
} # FIM dos lançamentos
# FIM DA SIMULAÇÃO

# RESULTADOS DA SIMULAÇÃO
moeda=data.frame(Pf); write.table(moeda,"moeda.txt")

```

## PROGRAMA A4 - JOGO DOS DISCOS

```
# SIMULAÇÃO PARA ESTIMAR A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO
# JOGO DOS DISCOS
```

```
rm(list=ls(all=TRUE))          # remove todos os objetos
sim=SIM=Sim=TRUE               # validação da resposta sim
não=nao=NÃO=NAO=Nao=Não=FALSE # validação da resposta
não
```

```
# DADOS DE ENTRADA
```

```
# Alterar conforme o interesse
```

```
l = 10          # lado quadrado
r = 2           # raio da disco
intervalo=0     # tempo entre uma simulação e outra
nmax=200000    # número máximo de lançamentos
Apagar = sim   # sim ou não
                # sim = apaga a simulação anterior
                # não = não apaga a simulação anterior
```

```
# VALORES INICIAIS DA SIMULAÇÃO
```

```
# Não alterar
```

```
if(r>=l/2) stop("o diâmetro deve ser < l para ocorrer algum sucesso")
phi=seq(0,2*pi,0.001); d=2*r; x=y=w=xs=xi=ys=yi=Pf=NULL
P=d^2/l^2-2*d/l+1      # probabilidade geométrica
```

```
# INÍCIO DA SIMULAÇÃO
```

```
for(j in 1:nmax){          # INÍCIO dos lançamentos
x = c(x, runif(1, r, r+l)); y = c(y, runif(1, r, r+l))
if(x[j]>d & x[j]<l & y[j]>d & y[j]<l){ ys=c(ys,y[j]); xs=c(xs,x[j])
w=c(w,1); } else { xi=c(xi,x[j]); yi=c(yi,y[j]); w=c(w,0);}; Pf=c(Pf,sum(w)/j)
```

```
px=x[j]+r*cos(phi); py=y[j]+r*sin(phi); layout(matrix(c(1,2,4,1,3,4),
nrow = 3), height=c(1,4.5,4.5)); par(mar=c(0,0,0,0)); plot.new()
text(0.5, 0.5, "Jogo dos Discos", cex=1.5, font=2); par(mar=c(3, 3, 0, 1))
plot(1, xlim=c(0, d+l),ylim=c(0, d+l), type="n", xlab="", ylab="",
axes = FALSE); rect(r,r,l+r,l+r,col = "gray97",lwd=2); rect(d,d,l,l,
col = "gray87",lty=0); bd=par("usr"); rect(c(l/2,l/2+d), c(bd[3],bd[3]),
c(l/2,l/2+d), c(r/4,r/4), lty=3); axis(1, r+18*l/40, "2r=", font=3, tcl=0,
cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0),pos=0); axis(1, r+24*l/40,d, font=3, tcl=0,
cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=0); arrows(c(l/2,l/2+d),c(0,0),
```

```

c(l/2+d,l/2), c(0,0), col= "blue", length=0.08, lwd=2); axis(2, r+17*l/40, "l =",
font=3, tcl=0, cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=0); axis(2, r+23*l/40, l,
font=3, cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0), tcl=0, pos=0); rect(c(bd[1], bd[1]),
c(r,r+l), c(r,r), c(r,r+l), lty=3); arrows(c(0,0),c(r,r+l),c(0,0),c(r+l,r),
col= "blue", length = 0.08, lwd=2); points(x[j], y[j], pch=20, cex=1, col="red")
lines(px,py,col="red"); plot(1, type="n", ylim=c(0,l), xlim=c(0,l),
axes=FALSE, xlab="", ylab=""); rect(0, 0, l, l, col="gray97"); rect(r, r, l-r, l-r,
col="gray87", lty=0); axis(2,c(0,r,l-r,l),pos=0,cex.axis=1.5,font=3)
axis(1,c(0,r,l-r,l),pos=0, font=3, cex.axis=1.5) ; if (Apagar==não) {
points(xs-r,ys-r,pch=20, cex=1.2, col="red") ; points(xi-r, yi-r, pch=1,
cex=1.2, col = "blue"); } else { ; if(x[j]>d & x[j]<l & y[j]>d & y[j]<l){
points(x[j]-r, y[j]-r, pch=20, cex=1.2,col="red")
} else { ; points(x[j]-r, y[j]-r, pch = 1, cex=1.2,col="blue");}; }
par(mar=c(3, 3, 0, 1)); if(j<=5000){ plot(Pf, ylim=c(P-0.1*P, P+0.1*P),
xlab="Número de Lançamentos", ylab = "Probabilidade", type = "l",
mgp=c(2,0.5,0), cex.lab=1.1, font.lab=3); } else { ; if(j<=20000){ plot(Pf,
ylim = c(P-0.04*P, P+0.04*P), xlab = "Número de Lançamentos",
ylab="Probabilidade", type="l", mgp = c(2, 0.5, 0), cex.lab=1.1, font.lab=3)
} else { ; plot(Pf, ylim = c(P-0.008*P, P+0.008*P), ylab="Probabilidade",
xlab="Número de Lançamentos", type="l", mgp=c(2,0.5,0), cex.lab=1.1,
font.lab=3); }; }; abline(h = P, lty = 2, col = "red")
legend("topright", legend = expression("P"), lty = 2, bty = "n", cex=1.1)
legend("bottomright", legend= expression("Pf"), lty=1,bty = "n",cex = 1.1)
if (intervalo>0){ t=intervalo*1000000; for (q in 1:t){ ; ; }
}
# FIM dos lançamentos
# FIM DA SIMULAÇÃO

# RESULTADOS DA SIMULAÇÃO
discos=data.frame(Pf); write.table(discos,"discos.txt")

```

## PROGRAMA A5 - AGULHA DE BUFFON

```
# FUNÇÃO PARA ESTIMAR O VALOR DE PI - AGULHA DE BUFFON
```

```
rm(list=ls(all=TRUE)) # remove todos os objetos
sim=SIM=TRUE          # validação da resposta sim
não=nao=NÃO=NAO=FALSE # validação da resposta não
```

```
# DADOS DE ENTRADA
```

```
# Alterar conforme o interesse
```

```
l = 24          # comprimento da agulha
d = 30          # distância entre as retas
intervalo=0     # tempo entre uma simulação e outra
nmax=200000     # número máximo de lançamentos
Apagar = sim    # sim ou não
                # sim = apagar a simulação anterior
                # não = não apagar a simulação anterior
```

```
# VALORES INICIAIS DA SIMULAÇÃO
```

```
# Não alterar
```

```
x=y=x0=y0=phi=Pi=xs=xi=ys=w=yi=erro=ctr=NULL; Pi0=erro0=NA
```

```
# INÍCIO DA SIMULAÇÃO
```

```
for(j in 1:nmax){          # INÍCIO dos lançamentos
  phi=c(phi, runif(1, 0, pi)); ctr=c(ctr, runif(1, 0, 0.5*d))
  x=c(x, runif(1, d/2, 3*d/2)); y=c(y, sample(c(0.5*d+ctr[j], 1.5*d-ctr[j]), 1))
  if(ctr[j]<=0.5 * l * sin(phi[j])){xs=c(xs,phi[j]); ys=c(ys,ctr[j]); w=c(w,1)
} else { xi=c(xi,phi[j]); yi=c(yi,ctr[j]); w=c(w,0);}; if(sum(w)>0){
  erro=c(erro,Pi[j]-pi); Pi=c(Pi,2*1*j/(d*sum(w)));} else {erro=c(erro,erro0);
  Pi=c(Pi,Pi0);}
}
```

```
layout(matrix(c(1,2,4,1,3,4),nrow = 3),height=c(1,5,4)); par(mar=c(0,0,0,0))
plot.new(); text(0.5, 0.5, "Simulação da Agulha de Buffon", cex=1.5, font=2)
par(mar=c(3, 3, 0, 1)); plot(1, xlim=c(0,2*d),ylim = c(0,2*d), type = "n",
  xlab = "", ylab = "", axes = FALSE); rect(0,0.5*d,2*d,1.5*d,col = "gray95",
  lty=0); rect(c(0,0),c(0.5*d,1.5*d),c(2*d,2*d),c(0.5*d,1.5*d),lwd=2)
arrows(c(d-l/2,d+l/2),c(0,0),c(d+l/2,d-l/2),c(0,0),col="blue", length=0.08,
  lwd=2); bd = par("usr"); arrows(c(bd[1]/2,bd[1]/2),c(0.5*d,1.5*d),
  c(bd[1]/2,bd[1]/2),c(1.5*d,0.5*d),col="blue", length=0.08,lwd=2)
rect(c(d-l/2,d+l/2),c(bd[1],bd[1]),c(d-l/2,d+l/2),c(d/12,d/12),lty=3)
rect(c(bd[1],bd[1]),c(0.5*d,1.5*d),c(0,0),c(0.5*d,1.5*d),lty=3)
```

```

axis(1,0.90*d,"l =",font=3,tcl=0,cex.axis=1.3,mgp=c(0, 0.6, 0),pos=0)
axis(1, 1.1*d, l, font=3, tcl=0, cex.axis=1.3, mgp=c(0, 0.6, 0),pos=0)
axis(2, 1.1*d,d , font = 3, tcl=0, cex.axis=1.3, mgp=c(0,0.6,0),pos=bd[1]/2)
axis(2,0.9*d, "d =",font=3, tcl=0, cex.axis=1.3, mgp=c(0, 0.6, 0),pos=bd[1]/2)
xx=seq(0, pi, length=500); segments(x[j]-1/2*cos(phi[j]), y[j]-1/2*sin(phi[j]),
x[j]+1/2*cos(phi[j]), y[j]+ 1/2*sin(phi[j]), col= "red")
yy=0.5 * 1 * sin(xx); plot(xx, yy, type="h", ylim=c(0,0.5*d), axes=FALSE,
xlab="", ylab="", col="gray87"); rect(0,0,pi,d/2); axis(1, c(0,pi), pos=0,
c(0,expression(pi)), cex.axis=1.3, font=3); axis(2, c(0,d/4,d/2), c(0,d/4,d/2),
pos=0, cex.axis=1.3,font=3); lines(xx, yy, type = "l"); if (Apagar==não) {
points(xs,ys,pch=20,cex=1.2,col="red"); points(xi,yi,pch=1,cex=1.2,col="blue")
} else {; if(ctr[j]<=0.5 * 1 * sin(phi[j])) {; points(phi[j], ctr[j], pch = 20,
cex=1.2, col = "red"); } else {; points(phi[j], ctr[j], pch=1,cex=1.2,col="blue")
};}; text(2.5, max(yy), expression(y==frac(1, 2)*sin(theta)), cex = 1.2)
par(mar=c(3, 3, 0, 1)); if(j<5000){; plot(Pi, ylim = c(2.8, 3.48),
xlab = "Número de Lançamentos",ylab = "", mgp = c(2, 0.6, 0),cex.lab=1.2,
font.lab=3, type="l"); } else {; if(j<20000){; plot(Pi, ylim = c(3.05, 3.23),
xlab = "Número de Lançamentos",ylab="", mgp = c(2, 0.6, 0),cex.lab=1.2,
font.lab=3, type="l"); } else {; plot(Pi, ylim = c(3.12, 3.16),
xlab = "Número de Lançamentos",ylab = "", mgp = c(2, 0.6, 0),cex.lab=1.2,
font.lab=3, type="l"); }; }; abline(h=pi,lty=2, col="red"); legend("topright",
legend=expression(pi), lty = 2, col = "red", bty = "n", cex = 1.2)
legend("bottomright", legend = expression(hat(pi)), lty = 1, col = "black",
bty="n", cex=1.2); if (intervalo>0){; t=intervalo*1000000; for (q in 1:t){; }; }
} # FIM dos lançamentos
# FIM DA SIMULAÇÃO

# RESULTADOS DA SIMULAÇÃO
buffon=data.frame(Pi,erro); write.table(buffon,"buffon.txt")

```

## PROGRAMA A6 - LANÇAMENTO DE DARDOS

```
# SIMULAÇÃO PARA ESTIMAR A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO  
# LANÇAMENTO DE DARDOS
```

```
rm(list=ls(all=TRUE))          # remove todos os objetos  
sim=SIM=Sim=TRUE              # validação da resposta sim  
não=nao=NÃO=NAO=Nao=Não=FALSE # validação da resposta não
```

```
# DADOS DE ENTRADA
```

```
# Alterar conforme o interesse
```

```
r1 = 10          # distância entre as retas  
r2 = 5          # raio da moeda  
intervalo=0     # tempo entre uma simulação e outra  
nmax=200000    # número máximo de lançamentos  
Apagar=sim     # sim ou não  
              # sim = apaga a simulação anterior  
              # não = não apaga a simulação anterior
```

```
# VALORES INICIAIS DA SIMULAÇÃO
```

```
# Não alterar
```

```
yp=w=xp=xs=ys=xi=yi=Pf=NULL; phi=seq(0,2*pi,0.005);  
x1=r1+r1*cos(phi);y1=r1+r1*sin(phi); x2=r1+r2*cos(phi); y2=r1+r2*sin(phi)  
P=r2^2/r1^2          # probabilidade geométrica
```

```
# INÍCIO DA SIMULAÇÃO
```

```
for(j in 1:nmax){          # INÍCIO dos arremessos  
m=0; while (m<1){; x=runif(1,0,2*r1); y=runif(1,0,2*r1)  
ymax1=r1+sqrt(r1^2-(x-r1)^2); ymin1=r1-sqrt(r1^2-(x-r1)^2)  
if(y<ymin1 & y>ymin1){; m=1 ; xp=c(xp,x); yp=c(yp,y); ;}  
  
if(xp[j]>r1-r2 & xp[j]<r1+r2) {; ymax2=r1+sqrt(r2^2-(xp[j]-r1)^2)  
ymin2=r1-sqrt(r2^2-(xp[j]-r1)^2); if(yp[j]<ymax2 & yp[j]>ymin2) {;  
xs=c(xs,xp[j])  
ys=c(ys,yp[j]); w=c(w,1); } else {; xi=c(xi,xp[j]); yi=c(yi,yp[j]); w=c(w,0);}  
} else {; xi=c(xi,xp[j]); yi=c(yi,yp[j]); w=c(w,0); }  
Pf=c(Pf,sum(w)/j)
```

```
layout(matrix(c(1,2,4,1,3,4),nrow=3),height=c(1,4.5,4.5)); par(mar=c(0,0,0,0))  
plot.new(); text(0.5,0.5,"Lançamento de dardos", cex=1.5, font=2)  
par(mar=c(3, 3, 0, 1)); plot(1, xlim=c(0, 2 * r1), ylim=c(0, 2 * r1), type="n",
```

```

xlab="", ylab="", axes=FALSE); lines(x1, y1, type="l"); lines(x2, y2,
type="l"); bd=par("usr"); arrows(c(0,2*r1), c(bd[1]/2,bd[1]/2), c(2*r1,0),
c(bd[1]/2,bd[1]/2),length=0.08,lwd=2,col="blue"); rect(0,bd[1],0,-bd[1],
lty=3); rect(2*r1, bd[1], 2*r1, -bd[1], lty=3); axis(1, 7*r1/8,"r1=", font=3,
tcl=0, cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=bd[1]/2); axis(1, 9*r1/8,r1,
font=3, tcl=0, cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=bd[1]/2)
arrows(c(bd[1]/2,bd[1]/2),c(r1-r2,r1+r2),c(bd[1]/2,bd[1]/2),c(r1+r2,
r1-r2),length=0.08, lwd=2,col="blue"); rect(bd[1], r1-r2, -bd[1], r1-r2, lty=3)
rect(bd[1],r1+r2,-bd[1],r1+r2,lty=3); axis(2, 7*r1/8,"r2 =", font=3, tcl=0,
cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=bd[1]/2); axis(2, 9*r1/8,r2, font=3,
tcl=0, cex.axis=1.5, mgp=c(0, 0.6, 0), pos=bd[1]/2); arrows(xp[j]-r1/4,
yp[j]-r1/4, xp[j],yp[j], length=0.1,lwd=2, col="red"); plot(1, xlim=c(0, 2*r1),
ylim=c(0, 2 * r1), type = "n", xlab="",ylab="", axes=FALSE); lines(x1,
y1, type="l"); lines(x2, y2, type="l"); axis(1,c(0,r1/2,r1,3*r1/2,2*r1),
font=3,cex.axis=1.5); axis(2,c(0,r1/2,r1,3*r1/2,2*r1), font=3, cex.axis=1.5)
if (Apagar==não) {; points(xs, ys, pch = 20, cex=1.2,col = "red")
points(xi, yi, pch=1,cex=1.2,col = "blue"); } else {; if(w[j]==1){
points(xp[j], yp[j], pch = 20, cex=1.2, col = "red"); } else {
points(xp[j], yp[j], pch = 1, cex=1.2,col = "blue"); };}
par(mar=c(3, 3, 0, 1)); if(j<=5000){; plot(Pf, ylim=c(P-0.2*P, P+0.2*P),
xlab = "Número de Arremessos", ylab = "Probabilidade", type = "l",
mgp = c(2, 0.6, 0),cex.lab=1.2,,font.lab=3); } else {; if(j<=50000){
plot(Pf, ylim = c(P-0.05*P, P+0.05*P), xlab = "Número de Arremessos",
ylab="Probabilidade", type="l", mgp=c(2, 0.6, 0),cex.lab=1.2,font.lab=3)
} else {;plot(Pf,ylim=c(P-0.01*P,P+0.01*P),xlab="Número de Arremessos",
ylab="Probabilidade", type="l", mgp=c(2, 0.6, 0),cex.lab=1.2,font.lab=3)
}; }; abline(h = P, lty = 2, col = "red"); legend("topright",
legend=expression("P"), lty=2, bty="n",cex = 1.2); legend("bottomright",
legend = expression("Pf"), lty = 1,bty = "n",cex = 1.2)
if (intervalo>0){; t=intervalo*1000000; for (q in 1:t){ ; }; }
} # FIM dos lançamentos
# FIM DA SIMULAÇÃO

# RESULTADOS DA SIMULAÇÃO
dardos=data.frame(Pf); write.table(dardos,"dardos.txt")

```

**ANEXO B**

**Página**

TABELA 1B Dados obtidos por meio do Quincux, com 22 fileiras de pregos.....168

TABELA 1B Dados obtidos por meio do Quincux, com 22 fileiras de pregos.

R \ D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	0	0	0	4	5	13	5	15	22	29	30	25	24	26	18	17	10	9	5	5	1	1	1
2	0	2	2	2	5	10	15	14	18	19	24	22	35	27	8	17	22	10	5	5	1	2	0
3	0	2	3	2	8	9	6	21	26	29	34	18	29	23	11	10	12	9	4	4	3	1	1
4	0	0	1	3	3	8	4	14	17	25	28	29	31	28	24	14	18	9	3	5	0	0	1
5	0	1	1	4	5	1	8	19	15	23	23	32	31	29	24	12	16	3	3	10	3	2	0
6	0	0	0	3	3	9	13	15	16	23	28	28	34	31	13	16	16	8	1	2	3	2	1
7	1	2	2	4	2	7	3	15	17	19	27	35	35	22	16	16	15	11	6	7	1	2	0
8	0	0	1	3	3	8	6	19	16	24	25	26	29	21	19	20	18	12	7	5	0	1	2
9	2	2	1	3	6	6	2	13	16	16	23	34	35	34	27	14	13	6	6	3	2	1	0
10	0	0	1	5	5	8	6	19	19	24	22	35	29	27	29	5	16	8	3	2	0	1	1
11	0	1	2	3	1	9	6	15	25	18	20	31	29	25	19	14	20	11	6	6	2	2	0
12	0	1	1	4	4	6	5	16	12	25	29	29	29	18	30	15	20	11	5	3	2	0	0
13	0	2	3	3	2	10	15	5	26	22	24	29	25	23	25	14	13	10	5	8	1	0	0
14	0	1	0	6	7	9	14	11	18	20	21	34	29	24	19	16	17	9	3	3	3	0	1
15	0	0	1	1	3	12	9	13	21	26	25	30	33	27	12	17	10	10	5	5	3	1	1
16	1	0	2	2	9	12	6	14	19	20	25	30	34	34	15	8	14	10	4	4	1	0	1
17	1	0	1	3	4	7	7	14	21	26	30	28	30	19	21	22	16	3	8	3	0	1	0
18	0	0	1	5	6	10	6	21	20	24	19	28	34	28	20	14	14	6	5	3	1	0	0
19	0	0	2	7	3	11	9	19	20	24	20	24	34	24	20	18	14	8	5	3	0	0	0
20	0	0	0	10	5	8	12	14	17	20	21	27	34	34	16	16	14	5	5	4	3	0	0
21	0	0	1	2	3	14	8	13	19	21	27	33	33	25	16	7	19	5	5	6	5	2	1
22	2	0	1	0	5	10	8	14	20	17	28	35	35	24	16	17	13	8	7	1	1	3	0
23	0	1	1	3	4	5	15	17	23	19	18	25	28	27	19	13	19	13	7	7	1	0	0
24	0	0	0	4	4	9	13	8	20	27	35	28	35	19	8	15	16	8	12	2	1	1	0
25	0	0	2	2	5	10	13	14	17	15	23	24	34	23	21	18	16	14	3	7	2	1	1
26	1	1	2	2	4	5	11	21	9	17	29	31	32	22	27	18	14	7	5	3	2	1	1
27	0	0	1	1	2	10	14	11	21	29	29	31	25	27	21	13	15	5	3	3	4	0	0
28	0	1	2	5	3	11	9	6	20	23	26	34	33	28	18	14	11	11	5	3	1	1	0
29	0	0	1	6	2	15	4	20	12	19	34	32	34	30	15	10	13	8	5	4	0	1	0
30	0	1	1	2	3	11	13	22	21	20	25	35	31	25	20	12	9	9	2	2	1	0	0