

Ausência de Percolação no Ponto Crítico em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$

Sérgio Felipe Abreu de Britto Bastos

Orientador: Prof. Glauco Valle da Silva Coelho



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Métodos Estatísticos

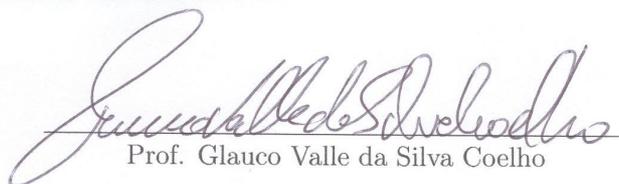
2017

Ausência de Percolação no Ponto Crítico em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$

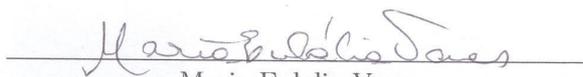
Sérgio Felipe Abreu de Britto Bastos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

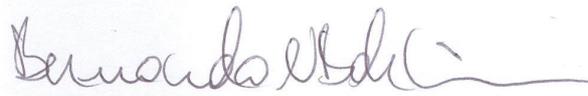
Aprovada por:



Prof. Glauco Valle da Silva Coelho
Instituto de Matemática - UFRJ - Orientador.



Maria Eulalia Vares
Instituto de Matemática - UFRJ.



Bernardo Nunes Borges de Lima
Departamento de Matemática - UFMG.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2017

CIP - Catalogação na Publicação

B327a Bastos, Sérgio Felipe Abreu de Britto
Ausência de Percolação no ponto crítico em
 $Z^2 \times \{0,1\}$ / Sérgio Felipe Abreu de Britto Bastos. -
Rio de Janeiro, 2017.
68 f.

Orientador: Glauco Valle da Silva Coelho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Estatística, 2017.

1. Percolação em lajes. 2. Transição de fase. 3.
Ponto crítico. I. Coelho, Glauco Valle da Silva ,
orient. II. Título.

“Ecce ancilla Domini. Fiat mihi secundum verbum tuum.”

Lc 1, 38.

“Totus tuus ego sum, o Mariæ, et omnia mea tua sunt.”

Agradecimentos

Primeiro a Deus, pelo dom da minha vida, por me conceder as graças de concluir este Mestrado, a Virgem Maria pela sua poderosa intercessão e proteção.

À minha mãe por toda a paciência e sacrifícios que fez para me criar e me dar todo o necessário para que não faltasse nada aos meus estudos. Aos meus irmãos Sérgio Henrique e Guilherme, pelo apoio e paciência, em meio aos momentos de estresse devido aos meus estudos. À minha prima Natália por sempre estar ao meu lado, mesmo estando longe, mas sempre presente de alguma forma, lendo os meus desafabos e desesperos. E aos demais familiares pelo apoio e incentivo.

Ao professor Glauco, que aceitou me orientar ainda no meu primeiro ano de Mestrado. Muito obrigado pela paciência para me explicar as coisas que aprendi neste trabalho e também pelas muitas correções na teoria e escrita matemática.

Aos professores Bernardo e Maria Eulalia, por aceitarem participar da minha banca e por todas as sugestões feitas para o aperfeiçoamento deste trabalho. Um especial agradecimento ao professor Bernardo pois foi graças ao senhor que me encontrei na Percolação.

A todos os professores do Departamento de Métodos Estatísticos da UFRJ que de alguma forma ajudaram em minha formação acadêmica.

Como não mencionar os amigos. Primeiro os mais distantes fisicamente, Allon e Raphael, obrigado pelo incentivo e as orações. Aos amigos de Magé e agregado, Carol, Sandra, Marcinha e Augusto. Muito obrigado pelo apoio, incentivo, orações e por simplesmente me ouvir quando não entendia algumas coisas de Matemática ou Estatística.

Aos amigos da UERJ, Aline, Midiã, Tarcício e Mônica pelo apoio que me deram quando estudamos juntos, aos momentos que rimos, estudamos, nos divertimos. Tudo foi mais fácil pois vocês estavam lá para me apoiar e incentivar.

Aos amigos da UFF. Menciono os que estiveram mais próximos nesta etapa de Mestrado: Andressa, Daiane, Laiz, Larissa e Paola. Agradeço a atenção que me deram nos momentos em que precisei, tanto pessoal quanto profissional.

Aos meus colegas da pós-graduação Andressa, Angel, Carlos, Daniela, Erika, Estelina, Jocely, Lucas, Marcos, Maria Gabriela, Mariana, Pamela, Rafael Erbisti, Vanessa, Viviana pela amizade e paciência nesses 2 anos. Agradeço ao pequeno grupo de probabilidade Leonel, Cristel, Mariela e Rafael Santos e em especial aos dois últimos que tanto me ajudaram a entender algumas disciplinas no Mestrado.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Agradeço à CAPES pela bolsa de Mestrado concedida.

Resumo

De forma geral, Percolação consiste no estudo de conectividade em grafos aleatórios. Um evento de interesse, por exemplo, é a existência de aglomerados infinitos e o objetivo pode ser o cálculo de sua probabilidade. Atualmente, temos uma vasta literatura sobre o assunto. Este trabalho trata do ambiente em \mathbb{Z}^d utilizando a rede reticulada quadrada, além de apresentar resultados e definições importantes da literatura tal como modelo de percolação em elos, sítios e lajes, o teorema da existência e unicidade do aglomerado infinito e a proposição que relaciona modelos de percolação em elos e sítios.

Na área de percolação, existem alguns problemas em aberto, como a existência do aglomerado infinito em \mathbb{Z}^d , para $3 \leq d \leq 18$, considerando a probabilidade do elo (ou sítio) estar aberto igual ao que chamamos de ponto crítico, denotado por p_c . Este ponto crítico é o parâmetro de transição de fase, o qual separa o espaço de parâmetros entre existência ou não de aglomerados infinitos.

O objetivo da dissertação é apresentar, de forma acessível e autocontida, o resultado do artigo de Damron, Newman e Sidoravicius em [9] de 2015, que trata da ausência de percolação no ponto crítico considerando o modelo definido na laje com dois níveis, isto é, $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$. Apresentamos, também, um outro resultado da literatura, o artigo de Duminil-Copin, Sidoravicius e Tassion em [10] de 2016, que discute a ausência de percolação no ponto crítico considerando o modelo definido na laje com N níveis, sendo N um número natural, ou seja, $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Palavras-Chaves: percolação em sítios, percolação em elos, percolação em lajes, percolação crítica, transição de fase.

Abstract

In general, Percolation consists of the study of connectivity in random graphs. An event of interest, for example, is the existence of infinite clusters and the goal may be to calculate its probability. We currently have a vast literature on the subject. This work deals with the environment in \mathbb{Z}^d using the square grid, in addition to presenting important results and definitions of the literature such as percolation model in bonds, sites and slabs, the existence and uniqueness theorem of the infinite cluster and the proposition that relates percolation models in bonds and sites.

In the percolation area, there are some open problems, such as the existence of the infinite cluster in \mathbb{Z}^d , for $3 \leq d \leq 18$, considering the probability that the bond (or site) is open equal to what we call the critical point, denoted by p_c . This critical point is the phase transition parameter, which separates the parameter space between the existence of infinite clusters or not.

The aim of the dissertation is to present, in an accessible and self-contained way, the result of the Damron, Newman and Sidoravicius article in [9] of 2015, which deals with the absence percolation at the critical point considering the model defined in the slab with two levels, that is, $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$. We also present another result of the literature, the Duminil-Copin, Sidoravicius and Tassion article in [10] of 2016, which discusses the absence percolation at the critical point considering the model defined in the slab with N levels, where N is a natural number, that is, $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Keywords: site percolation, bond percolation, slab percolation, critical percolation, phase transition.

Sumário

1	Introdução	1
2	Definições dos Modelos	4
2.1	Percolação em Elos em \mathbb{Z}^d	4
2.2	Percolação em Sítios em \mathbb{Z}^d	5
2.3	Percolação em Lajes	7
2.4	Relação entre as Percolações em Sítios e Elos	8
3	Resultados Importantes	21
4	Percolação em Elos em \mathbb{Z}^2	33
5	Ausência de Percolação no Ponto Crítico na Laje	41
5.1	Estimativas tipo RSW e a Prova do Teorema 8	43
5.2	Construção do caminho mais à esquerda	60
	Referências Bibliográficas	66

Lista de Figuras

2.1	Caminho γ no grafo \mathcal{G}	9
2.2	Caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$	9
2.3	Caminho γ no grafo \mathcal{G} (linha contínua em negrito). A linha tracejada é um possível caminho autoevitável em γ . O vértice em vermelho refere-se aos vértices v_2 e v_6 que coincidem	10
2.4	Caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ (linha contínua em negrito). Os elos coloridos são \tilde{e}_3 (laranja), \tilde{e}_7 (cinza), $\tilde{e}_{2,6}$ (vermelho), $\tilde{e}_{2,7}$ (verde), $\tilde{e}_{3,6}$ (roxo) e $\tilde{e}_{3,7}$ (azul)	10
2.5	Caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$	11
2.6	Caminho γ no grafo \mathcal{G} . Os elos e_3^* e e_7^* (em azul) representam um <i>loop</i> , isto é, os elos e_3 e e_7 são “visitados” mais de uma vez. Os vértices v_2, v_3, v_6, v_7 e v_{10} (em vermelho) também são “visitados” mais de uma vez e estes vértices coincidem com outros vértices do caminho γ	11
2.7	Uma representação para o caso 2.i) na rede quadrada em \mathbb{Z}^2 . Em vermelho temos o caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo de cobertura. Em negrito temos o caminho γ no grafo original. Os sítios representados em azul com o símbolo \times estão no grafo de cobertura. $\varphi^{-1}(\tilde{v}_i)$ representa o elo no caminho γ no grafo original relacionado ao vértice \tilde{v}_i	14

2.8	Uma representação para o caso 2.ii) na rede quadrada em \mathbb{Z}^2 . Em vermelho temos o caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo de cobertura. Em negrito temos o caminho γ no grafo original. Os sítios representados em azul com o símbolo \times estão no grafo de cobertura. $\varphi^{-1}(\tilde{v}_i)$ representa o elo no caminho γ no grafo original relacionado ao vértice \tilde{v}_i . Observe que o elo $\varphi^{-1}(\tilde{v}_2)$ não pertence ao caminho γ	14
2.9	Aglomerado W (em negrito) no grafo \mathcal{G} . No destaque em azul vemos o elo g que não pertence ao aglomerado W com uma de suas extremidades pertencente ao aglomerado W representado pelo vértice em vermelho o qual pertence ao aglomerado W	16
2.10	Aglomerado \tilde{W} (em negrito) no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$. A marca \times (em vermelho) representa o vértice $\tilde{v}(g)$ no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ corresponde ao elo g do grafo \mathcal{G} , o qual não pertence ao aglomerado \tilde{W} e é adjacente aos vértices em azul do aglomerado \tilde{W}	16
2.11	Grafo com diagonais nos quadrados alternados	18
2.12	Grafo $\tilde{\mathcal{G}}$	18
2.13	Representação do grafo \mathcal{G} e seus respectivos elos	19
2.14	Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ do grafo \mathcal{G} e seus respectivos vértices	19
2.15	Representação do grafo \mathcal{G} e um trecho do aglomerado aberto infinito (em azul)	19
2.16	Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ do grafo \mathcal{G} e um trecho do aglomerado aberto infinito (em vermelho)	19
2.17	Representação do Grafo \mathcal{H}	20
2.18	Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{H}}$	20
2.19	Representação do Grafo \mathcal{D}	20
2.20	Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{D}}$	20
4.1	Rede bidimensional \mathbb{Z}^2 (linha contínua) e sua dual \mathbb{Z}_*^2 (linha tracejada) .	34
4.2	Representação de e e e_* , sendo e um elo da rede usual \mathbb{Z}^2 e e_* um elo da rede dual \mathbb{Z}_*^2	35

4.3	Os sítios a e b estão em aglomerados abertos infinitos em $\mathbb{Z}^2 \setminus B_N$ e os sítios x e y estão em aglomerados fechados infinitos de $\mathbb{Z}_*^2 \setminus B_N^*$. Um dos seguintes casos podem ocorrer: (Imagem à esquerda) se houver um único aglomerado aberto infinito, então existe um caminho aberto γ ligando a a b , e então os aglomerados fechados em x e y são disjuntos; (Imagem à direita) se houver um único aglomerado fechado infinito, então existe um caminho fechado γ^* ligando x a y , e então os aglomerados abertos infinitos em a e b são disjuntos	37
4.4	Ilustração do fato de que se não há caminhos abertos atravessando S_n da esquerda para a direita, então há um caminho fechado cruzando S_n^* de cima para baixo.	39
5.1	Uma representação dos eventos A_1, A_2, A_3, B_1 e B_2 na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 . Interligando esses caminhos garantimos a ocorrência do evento $ED(4k, k)$	44
5.2	O evento $ED(4k, k, (0, k))$ existe um cruzamento da esquerda para a direita na translação por $(0, k)$ do retângulo $B(4k, k)$ de dimensões $8k$ por $2k$, este retângulo transladado por $(0, k)$ é apresentado em branco. O evento $ED(4k, k, (0, -k))$ existe um cruzamento da esquerda para a direita na translação por $(0, -k)$ do retângulo $B(4k, k)$ de dimensões $8k$ por $2k$, este retângulo transladado por $(0, -k)$ é apresentado hachurado	46
5.3	Representação dos eventos E_k , para k par e ímpar	47
5.4	Representação das caixas S_1, S_2 e S_3 na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2	49
5.5	Representação das caixas S_1, S_2 e S_3 na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 , da fita mais à esquerda R e de sua reflexão em torno de T_3 denotada por \tilde{R} . A fita U mais abaixo também é representada. As definições dos lados das caixas L_i, R_i, T_i e B_i , para $i = 1, 2, 3$. Na figura somente o lado direito R_2 da caixa S_2 e o lado de cima T_3 da caixa S_3 estão representados	50
5.6	Uma representação do evento F_n	51
5.7	Uma representação do evento G_n	51
5.8	Uma representação do evento H_n	52
5.9	Representação da caixa de dimensões $4n$ por $2n$ na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 . Os eventos A_1, A_2 e B_1 estão ilustrados também na projeção	52

5.10	Representação do anel $Ann(m, n) = B(n) \setminus B(m)$ e do circuito aberto ao redor da origem \mathcal{A}_n na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 . O ponto no centro da figura é a origem	57
5.11	Representação dos anéis Ann_j	59
5.12	Representação da curva de Jordan $C_{\tilde{\gamma}}$ (curva em negrito) em \mathbb{R}^2 . A parte hachurada é o interior da curva e a parte em branco é o exterior	62
5.13	Considere as fitas R e \hat{R} (já projetadas em \mathbb{Z}^2). Nas fitas R e \hat{R} , a linha em azul representa os sítios abertos em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ que estão no nível 1, a linha em preto representa os sítios abertos em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ que estão no nível 0, e o sítio em vermelho é onde tem a mudança de nível (do nível 1 ao nível 0), isto é, os sítios nos níveis 1 e 0 da laje localizados na projeção em vermelho tem que estar ambos abertos	64

Capítulo 1

Introdução

O modelo de Percolação foi definido inicialmente na década de 50, por Broadbent em 1954 no artigo [5] e Broadbent e Hammersley em 1957 no artigo [6]. O exemplo clássico é o movimento de um fluido em um meio poroso, cujo exemplo mais básico é o café. A água quente é o fluido e o meio poroso é o pó do café, onde percolar significa que o fluido conseguiu percorrer o meio poroso e o modelo de percolação são os caminhos encontrados por ele neste meio.

Como ilustração dos problemas básicos de percolação, utilizaremos a rede reticulada quadrada em \mathbb{Z}^d , com $d > 0$, onde pode-se modelar o problema considerando a Percolação em Elos (ou arestas) e em Sítios (ou vértices).

Na Percolação em Elos, todos os sítios são considerados abertos e cada elo tem probabilidade p de estar aberto e probabilidade $1 - p$ de estar fechado. Analogamente, na Percolação em Sítios, todos os elos são considerados abertos e um sítio tem probabilidade p de estar aberto e probabilidade $1 - p$ de estar fechado. Nos dois tipos de Percolação citados anteriormente, considera-se os estados dos Elos na primeira (e dos Sítios na segunda) independentes. Nestes casos o modelo de percolação consiste na coleção de caminhos conectando elos/sítios abertos e vizinhos no reticulado.

Generalizações destes modelos podem ser propostas, como o modelo em que tanto os elos quanto os sítios podem estar abertos ou fechados com certa probabilidade p . Outra proposta é a probabilidade do elo estar aberto depender do estado do elo e a probabilidade do sítio estar aberto depender do estado do sítio. Percolação nesses modelos é o estudo de conectividade entre sítios por caminhos abertos. É possível mostrar matematicamente que a Percolação em Sítios é mais geral que a Percolação em Elos através de uma transformação que relaciona os sítios de um modelo com os elos de outro.

Intuitivamente, podemos considerar os seguintes exemplos: para o modelo de *Percolação em Elos*, considere que temos uma rede de canos, esses representando os elos, onde cada cano tem probabilidade p de estar aberto e probabilidade $1 - p$ de estar fechado. Se injetarmos água em um determinado cano, estamos interessados em saber qual é a probabilidade da água chegar em um outro cano da nossa rede. E mais ainda, estamos interessados em calcular a probabilidade de haver uma ligação de canos abertos *infinita* por onde esta água irá passar; para o modelo de *Percolação em Sítios*, considere uma floresta onde cada árvore será o sítio do modelo e tem probabilidade p de estar suscetível a contrair uma doença e tem probabilidade $1 - p$ de não estar suscetível a contrair a mesma. Considerando que uma árvore está infectada, ela transmite a doença às árvores vizinhas a ela que são suscetíveis de contrair a mesma. E estas suscetíveis que foram infectadas passam a doença a seus vizinhos propensos. Estamos interessados em calcular a probabilidade de termos uma região de infinitas árvores infectadas. E mais ainda, estamos interessados em calcular a probabilidade de haver infinitas árvores infectadas.

Nos exemplos acima, a “ligação” no primeiro e a “região” no segundo são noções intuitivas do que é conhecido como *aglomerado*. Segundo Kesten [20], a principal questão na Teoria de Percolação é relativa à distribuição da variável aleatória *tamanho do aglomerado* contendo um determinado sítio, a qual pode ser entendida como o número de elos (sítios) no aglomerado na Percolação em Elos (Sítios), em particular na sua dependência com os estados (aberto ou fechado) dos elos e sítios. Em especial, deseja-se calcular as probabilidades de existir um aglomerado infinito no modelo considerado. Quando o tamanho do aglomerado é infinito, dizemos que o sistema percola com probabilidade p . Considerando $p = 0$, a probabilidade de percolação é igual a zero, isto é, não haverá nenhum elo (ou sítio) aberto e, portanto, não haverá aglomerado infinito; se $p = 1$, a probabilidade de percolação é igual a um, ou seja, todos os elos (ou sítios) estarão abertos e assim toda a rede reticulada estará aberta e teremos com certeza um aglomerado infinito. Conforme a probabilidade p cresce, espera-se que a probabilidade de haver um aglomerado infinito aumente ou permaneça a mesma. Isto de fato ocorre e existe um valor limite, que denotaremos por p_c , onde a probabilidade de percolar deixa de ser zero para $p > p_c$ e passa a ser um valor positivo. Ao valor p_c damos o nome de ponto crítico ou probabilidade crítica.

Para $d = 2$ ou $d \geq 19$ a probabilidade de percolação no ponto crítico em \mathbb{Z}^d para qualquer tipo de rede (quadrada, triangular, hexagonal, etc) é igual a zero, este é um resultado conhecido na literatura e pode ser encontrado em [16], [17] e [21]. Investigações

no sentido de demonstrar, para o caso em que $3 \leq d \leq 18$, qual é o comportamento da probabilidade de percolação no ponto crítico em \mathbb{Z}^d para qualquer tipo de rede é uma das linhas de investigação importantes atualmente na área de Percolação. Nesse sentido, no artigo de Damron, Newman e Sidoravicius em [9] os autores investigaram o que ocorre quando consideramos a Percolação de Sítios em Lajes para $d = 3$ com dois níveis, isto é, $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$. Os autores mostraram que não ocorre percolação no ponto crítico considerando o cenário descrito, o que pode ser visto como uma primeira evidência e um passo inicial para uma generalização deste resultado em \mathbb{Z}^3 para a percolação de sítios. Neste mesmo sentido, no artigo de Duminil-Copin, Sidoravicius e Tassion em [10] os autores fazem uma demonstração mais geral da apresentada no artigo [9] na tentativa de generalizar o resultado de não percolação no ponto crítico em \mathbb{Z}^3 , para isso eles consideram a Percolação de Elos em Lajes para $d = 3$ com N níveis, isto é, $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N - 1\}$, com $N \geq 1$, mostrando que não há percolação no ponto crítico no cenário anterior para a percolação em elos.

O objetivo da dissertação é apresentar toda a problemática descrita acima com rigor matemático e os resultados dos artigos citados apresentando no final a prova para o resultado do artigo de Damron, Newman e Sidoravicius em [9] de forma acessível e autocontida.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, definimos o modelo de Percolação em Elos e Sítios em \mathbb{Z}^d e o modelo de Percolação na Laje. Dedicamos a esse capítulo a definição de grafo e alguns termos relacionados para assim na Seção 2.4, provarmos que a Percolação em Sítios é mais geral que a Percolação em Elos. No Capítulo 3, apresentamos os resultados da literatura sobre percolação que serão utilizados nos capítulos seguintes. No Capítulo 4, provamos a ausência de percolação no ponto crítico no modelo de Percolação em Elos em \mathbb{Z}^2 e calculamos explicitamente que o valor do ponto crítico neste caso é $\frac{1}{2}$. No Capítulo 5, tratamos exclusivamente do modelo de Percolação na Laje e demonstramos os resultados do artigo de Damron, Newman e Sidoravicius em [9] o qual trata da ausência de percolação no ponto crítico considerando duas lajes com o modelo de Percolação em Sítios. Além disso enunciamos o resultado da ausência de percolação no ponto crítico considerando N lajes o qual é apresentado no artigo de Duminil-Copin, Sidoravicius e Tassion em [10] considerando o modelo de Percolação em Elos.

Capítulo 2

Definições dos Modelos

Considere um grafo \mathcal{G} , o qual é formado por um conjunto de sítios denotado por V e um conjunto de elos denotado por $E \subset V \times V$, com a hipótese de que \mathcal{G} é conexo, isto é, todos os pares de sítios estão ligados por um caminho de elos.

Neste Capítulo, apresentamos alguns conceitos, notações e resultados referentes ao modelo de Percolação em Elos e Sítios quando $V = \mathbb{Z}^d$. Quando $V = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N-1\}$, chamamos de modelo de Percolação em Lajes. Nos três tipos de modelos citados E , coincide com o conjunto de elos conectando vizinhos próximos. Na Seção 2.4, explicamos noções da Teoria de Grafos utilizando alguns exemplos e a proposição que transforma um problema da Percolação em Elos em um problema da Percolação em Sítios.

2.1 Percolação em Elos em \mathbb{Z}^d

No grafo \mathcal{G} , para $V = \mathbb{Z}^d$ e $E = \mathbb{E}^d = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ e } \|x - y\|_1 = 1\}$, onde $\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$, sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$. Seja $\mathcal{X} := \{X_e, e \in \mathbb{E}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição comum de Bernoulli com parâmetro $p \in [0, 1]$, isto é,

$$P_E(X_e = 1) = p \text{ e } P_E(X_e = 0) = 1 - p,$$

sendo que $\{X_e = 1\}$ é o evento em que o elo e está aberto e $\{X_e = 0\}$ é o evento em que o elo e está fechado. P_E é a medida de probabilidade associada a \mathcal{X} .

De maneira mais formal, o espaço amostral é $\Omega_E = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, cujos elementos são da forma $\omega = \{\omega(e) : e \in \mathbb{E}^d\}$ é também chamado de *espaço de configurações*, sendo que $\omega(e) = 1$ indica que o elo e está aberto e $\omega(e) = 0$ corresponde ao elo e está fechado; a σ -álgebra \mathcal{F}_E em Ω_E é a gerada pelos conjuntos cilíndricos de Ω_E , isto é, $\Gamma \subset \Omega_E$ é cilíndrico se existem $n \geq 1$, $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{E}^d$ e $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ tal que

$$\Gamma = \{\omega \in \Omega_E : \omega(e_1) = b_1, \omega(e_2) = b_2, \dots, \omega(e_n) = b_n\}.$$

Seja $\omega \in \Omega_E$. O caminho γ em \mathcal{G} será a sequência $\gamma = (v_0, e_1 = e, \dots, e_\nu, v_\nu)$ em \mathcal{G} sendo v_0, v_1, \dots, v_ν os vértices em \mathcal{G} e e_1, e_2, \dots, e_ν os elos em \mathcal{G} tal que o elo e_{i+1} tem os vértices v_i e v_{i+1} em suas extremidades, para $i = 1, 2, \dots, \nu$. Chamamos v_0 e v_ν , respectivamente, o vértice inicial e final do caminho γ e dizemos que γ é um caminho de v_0 até v_ν . O caminho γ será considerado aberto quando todos os elos e sítios dele estão abertos. O *aglomerado aberto* $C_e = C(e, \omega)$ no elo e é a união de todos os elos e sítios que pertencem a algum caminho aberto $\gamma = (v_0, e_1 = e, \dots, e_\nu, v_\nu)$ em \mathcal{G} , com $e_1 = e$, e_1, \dots, e_ν são os elos do grafo \mathcal{G} e v_0, \dots, v_ν são vértices de \mathcal{G} , onde todos os e_i são abertos, tais que e_{i+1} é um elo cujas extremidades são os vértices v_i e v_{i+1} , com v_0 (v_ν) são os vértices inicial (final) do caminho γ . Dizemos que um aglomerado é infinito se ele tem um caminho com infinitos elos abertos. Vamos denotar $|C_e|$ a variável aleatória *tamanho do aglomerado* que contém o elo e , a qual conta o número de elos abertos do aglomerado C_e .

2.2 Percolação em Sítios em \mathbb{Z}^d

No grafo \mathcal{G} , para $V = \mathbb{Z}^d$ e $E = \mathbb{E}^d = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ e } \|x - y\|_1 = 1\}$, onde $\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$, sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$. Seja $\mathcal{Y} := \{Y_v, v \in \mathbb{Z}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição comum de Bernoulli com parâmetro $p \in [0, 1]$, isto é,

$$P_V(Y_v = 1) = p \text{ e } P_V(Y_v = 0) = 1 - p,$$

sendo que $\{Y_v = 1\}$ é o evento em que o sítio v está aberto e $\{Y_v = 0\}$ é o evento em que o sítio v está fechado. P_V é a medida de probabilidade associada a \mathcal{Y} , ou seja, P_V é a medida produto em Ω_V cujas marginais têm distribuição Bernoulli de parâmetro p .

De maneira mais formal, o espaço amostral é $\Omega_V = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, cujos elementos são da forma $\omega = \{\omega(v) : v \in \mathbb{Z}^d\}$, é também chamado de *espaço de configurações*, sendo que $\omega(v) = 1$ indica que o sítio v está aberto e $\omega(v) = 0$ corresponde ao sítio v está fechado; a σ -álgebra \mathcal{F}_V em Ω_V é a gerada pelos conjuntos cilíndricos de Ω_V , isto é, $\Gamma \subset \Omega_V$ é cilíndrico se existem $n \geq 1$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^d$ e $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ tal que

$$\Gamma = \{\omega : \omega(v_1) = b_1, \omega(v_2) = b_2, \dots, \omega(v_n) = b_n\}.$$

Seja $\omega \in \Omega_V$. Um *aglomerado aberto* é uma coleção maximal de sítios abertos conectados por caminhos entre vizinhos. Denotamos o aglomerado no sítio x do grafo \mathcal{G} por $C_x = C(x, \omega)$. Se o sítio x é fechado, então $C_x = \emptyset$. Se o sítio x é aberto e todos os seus vizinhos são fechados, então $C_x = \{x\}$. Dizemos que um aglomerado é infinito se ele tem infinitos sítios abertos. Vamos denotar $|C_x|$ a variável aleatória *tamanho do aglomerado* que contém o sítio x , a qual conta o número de sítios abertos de C_x . Denotaremos por C_0 e $|C_0|$ respectivamente o aglomerado que contém a origem e o tamanho do aglomerado da origem.

Denotaremos $\{x \leftrightarrow y\}$ o evento x está conectado a y por um caminho aberto. Para todo $\omega \in \Omega_V$, $\{x \leftrightarrow y\}$ é uma relação de equivalência, isto é, para quaisquer sítios $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ valem as seguintes propriedades *i)* reflexividade: $\{x \leftrightarrow x\}$; *ii)* simetria: $\{x \leftrightarrow y\} \Rightarrow \{y \leftrightarrow x\}$; *iii)* transitividade: $\{x \leftrightarrow y\}$ e $\{y \leftrightarrow z\} \Rightarrow \{x \leftrightarrow z\}$.

É fácil notar que

$$C_x(\omega) = C_y(\omega),$$

se e somente se $x \leftrightarrow y$ na configuração $\omega \in \Omega_V$.

Na Teoria de Percolação, queremos saber em quais condições existe uma probabilidade positiva de existir um aglomerado infinito. Quando isso acontece, dizemos que o modelo percola. A principal questão em Percolação consiste em encontrar a distribuição de $|C_x|$, em particular determinar sua dependência com respeito à p .

Para tal finalidade, vamos definir as funções $\theta_E(\cdot)$ e $\theta_V(\cdot)$, as quais podem ser entendidas como a probabilidade de percolação considerando a Percolação em Elos e em Sítios, respectivamente.

Definição 1. [*Função Percolação*]

- *Percolação em Elos*

$$\begin{aligned}\theta_E : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ p &\longmapsto P_E(|C_0| = +\infty),\end{aligned}$$

ou ainda, podemos escrever

$$\theta_E(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_E(|C_0| = n).$$

- *Percolação em Sítios*

$$\begin{aligned}\theta_V : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ p &\longmapsto P_V(|C_0| = +\infty),\end{aligned}$$

ou ainda, podemos escrever

$$\theta_V(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_V(|C_0| = n).$$

2.3 Percolação em Lajes

O Artigo de Damron, Newman e Sidoravicius [9], no qual esta dissertação se baseia, trata de percolação em sítios em três dimensões, em um grafo $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, o qual é conhecido na literatura por Percolação em Lajes (ou Níveis).

Definição 2. [*Grafo em Laje*]

Para $d \geq 2$, denotamos um Grafo em Laje por $G_N = (V_N, E_N)$, onde $V_N = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N-1\}^{d-2}$ é o conjunto de sítios (ou vértices) e E_N é o conjunto de todos os pares de vértices em V_N (os elos ou arestas) com a distância Euclidiana igual a um.

Dois sítios são ditos vizinhos se tem distância Euclidiana igual a um.

A Definição 2 apresenta a forma mais geral para a Percolação em Laje, porém o nosso objetivo será utilizar esta definição para o caso em que $d = 3$ e $N = 2$ tendo assim duas lajes (ou níveis) no grafo. O grafo caracterizado com duas lajes é discutido no artigo de Damron, Newman e Sidoravicius [9] onde apresenta a ausência de percolação considerando

o modelo nos sítios. Apresentamos este resultado no Capítulo 5. No artigo de Duminil-Copin, Sidoravicius e Tassion em [10] é feita a extensão do resultado da ausência de percolação na laje com N níveis considerando o modelo nos elos. Na Seção ?? utilizamos a Definição 2 geral, considerando a laje com N níveis, $d = 3$ e apresentamos o resultado desta extensão.

No Artigo de Damron, Newman e Sidoravicius [9], é definida a chamada *Propriedade Sanduíche* para o grafo em laje G_N , a qual considera que se dois caminhos em G_N tem a característica de que suas projeções em \mathbb{Z}^2 tem interseção não vazia, então eles devem se encontrar em G_N . Neste artigo esta propriedade é válida para $d = 3$ e $N = 2$. No mesmo afirma-se que a propriedade sanduíche ainda é válida para o caso em que $d = 3$ e $N = 3$ porém considera a periodicidade no grafo, isto é, um sítio que esteja na laje 2 pode se conectar diretamente a um sítio da laje 0 sem passar pela laje 1.

2.4 Relação entre as Percolações em Sítios e Elos

Conforme já foi mencionado, a Percolação em Sítios é mais geral que a Percolação em Elos, isto significa que todo problema de Percolação em Elos pode ser transformado em um problema de Percolação em Sítios. A recíproca não é verdadeira. Nesta Seção iremos apresentar a Proposição 1 que relaciona estes dois tipos de percolação e usaremos a notação apresentada nas Seções 2.1 e 2.2.

Antes da Definição 3, considere a seguinte distinção de caminhos. O caminho aberto $\gamma = (v_0, e_1 = e, \dots, e_\nu, v_\nu)$ em \mathcal{G} é dito *autoevitável* se todos os seus vértices são distintos. Quando um caminho não tiver vértices distintos, chamá-lo-emos de caminho não autoevitável. Todo caminho que é não autoevitável pode ser transformado em um caminho autoevitável e isto é feito removendo os *loops* do caminho.

Definição 3. [*Grafo de Cobertura*]

Seja $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ é um grafo de cobertura para \mathcal{G}

- (i) se existe uma relação 1-1 com o conjunto de elos do grafo \mathcal{G} e o conjunto de vértices do grafo $\tilde{\mathcal{G}}$;
- (ii) se $\tilde{v}_1 \neq \tilde{v}_2$ são dois vértices de $\tilde{\mathcal{G}}$ correspondendo aos elos e_1 e e_2 de \mathcal{G} , respectivamente, então existe somente um elo de $\tilde{\mathcal{G}}$ entre \tilde{v}_1 e \tilde{v}_2 , se e somente se, e_1 e e_2 tem somente uma extremidade em comum, onde $e_1, e_2 \in E$.

Assim temos que existe $\varphi : E \rightarrow \tilde{V}$ é uma bijeção tal que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) \in \tilde{E}$ se e somente se e_1 e e_2 possuem um vértice em comum.

Com respeito à Definição 3, considere os Exemplos 1, 2 e 3 a seguir.

Exemplo 1. Considere um caminho no grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ como na Figura 2.1 e sua respectiva imagem no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ como na Figura 2.2.

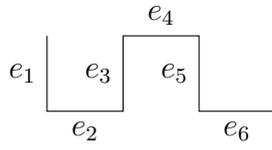


Figura 2.1: Caminho γ no grafo \mathcal{G}

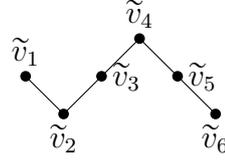


Figura 2.2: Caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$

Note que para cada aresta e_i do caminho γ no grafo \mathcal{G} (Figura 2.1), temos o seu respectivo vértice correspondente \tilde{v}_i no caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (Figura 2.2), conforme apresentado na Definição 3. Os vértices \tilde{v}_{i-1} e \tilde{v}_i estão conectados pois os seus elos correspondentes e_{i-1} e e_i tem somente uma extremidade em comum, como mostram as Figuras 2.1 e 2.2. Note que neste exemplo temos um caminho aberto autoevitável em \mathcal{G} que gera um caminho aberto autoevitável em $\tilde{\mathcal{G}}$. Isto sempre ocorre pois um caminho γ em \mathcal{G} que não repete vértices também não repete elos e assim os vértices do caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ relacionados aos elos de γ também serão distintos, logo a imagem $\tilde{\gamma}$ do caminho γ no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ é autoevitável.

Para o Exemplo 2 considere $\gamma = (v_0, e_1, \dots, e_V, v_V)$ um caminho aberto não autoevitável em \mathcal{G} tal que para cada elo e_i suas extremidades sejam os vértices v_{i-1} e v_i para $i = 1, 2, \dots, V$ e seja \tilde{v}_i o vértice de $\tilde{\mathcal{G}}$ correspondente a e_i . Então existe um elo \tilde{e}_i em $\tilde{\mathcal{G}}$ entre \tilde{v}_{i-1} e \tilde{v}_i , pois e_{i-1} e e_i tem uma de suas extremidades em comum no vértice v_{i-1} . Além disso, existe pelo menos um elo $\tilde{e}_{i,j}$ em $\tilde{\mathcal{G}}$ entre \tilde{v}_i^* e \tilde{v}_j^* , com $\tilde{v}_i^* = \tilde{v}_i$ e $\tilde{v}_j^* = \tilde{v}_j$, pois e_i e e_j tem uma de suas extremidades em comum. Como a função φ da Definição 3 é injetiva, $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_V, \tilde{v}_V)$ é um caminho não autoevitável em $\tilde{\mathcal{G}}$. Se os vértices \tilde{v}_i 's de $\tilde{\mathcal{G}}$ são escolhidos como pontos em e_i de \mathcal{G} , então $\tilde{\gamma}$ começa como um ponto em e_1 e termina como um ponto em e_V . Veja o Exemplo 2 abaixo para uma exemplificação do que foi descrito anteriormente.

Exemplo 2. Considere o caminho $\gamma = (v_0, e_1, \dots, e_8, v_8)$ no grafo \mathcal{G} (Figura 2.3) e a respectiva imagem no caminho $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_8, \tilde{v}_8)$ em $\tilde{\mathcal{G}}$ (Figura 2.4).

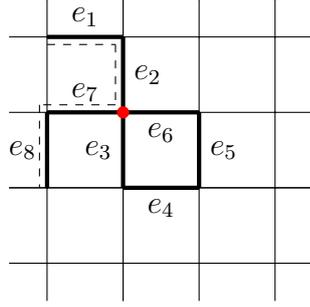


Figura 2.3: Caminho γ no grafo \mathcal{G} (linha cont'nuua em negrito). A linha tracejada e' um poss'ivel caminho autoevit'avel em γ . O v'ertice em vermelho refere-se aos v'ertices v_2 e v_6 que coincidem

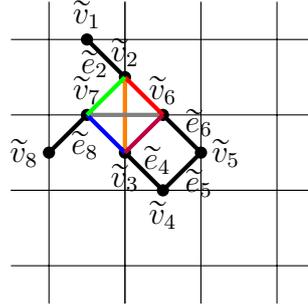


Figura 2.4: Caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ (linha cont'nuua em negrito). Os elos coloridos s'ao \tilde{e}_3 (laranja), \tilde{e}_7 (cinza), $\tilde{e}_{2,6}$ (vermelho), $\tilde{e}_{2,7}$ (verde), $\tilde{e}_{3,6}$ (roxo) e $\tilde{e}_{3,7}$ (azul)

Veja na Figura 2.3 que no caminho γ cada elo e_i tem como extremidade os v'ertices v_{i-1} e v_i , para $i = 1, 2, \dots, 8$. Al'em disso, note que γ e' um caminho n'ao autoevit'avel pois os v'ertices v_2 e v_6 coincidem (em vermelho na figura). Na Figura 2.4, os elos coloridos do caminho $\tilde{\gamma}$ s'ao \tilde{e}_3 (laranja), \tilde{e}_7 (cinza), $\tilde{e}_{2,6}$ (vermelho), $\tilde{e}_{2,7}$ (verde), $\tilde{e}_{3,6}$ (roxo) e $\tilde{e}_{3,7}$ (azul). Conforme o coment'ario anterior a este exemplo, o elo $\tilde{e}_{2,6}$ tem nas suas extremidades os v'ertices \tilde{v}_2^* e \tilde{v}_6^* , o elo $\tilde{e}_{2,7}$ tem nas suas extremidades os v'ertices \tilde{v}_2^* e \tilde{v}_7^* , o elo $\tilde{e}_{3,6}$ tem nas suas extremidades os v'ertices \tilde{v}_3^* e \tilde{v}_6^* e o elo $\tilde{e}_{3,7}$ tem nas suas extremidades os v'ertices \tilde{v}_3^* e \tilde{v}_7^* . Note, tamb'em, que o "cruzamento" dos elos \tilde{e}_3 e \tilde{e}_7 n'ao "gera" um novo v'ertice.

Como j'a mencionado, todo caminho n'ao autoevit'avel pode ser transformado em um caminho autoevit'avel, sendo assim a linha tracejada na Figura 2.3 representa um caminho autoevit'avel no grafo \mathcal{G} . Se os v'ertices \tilde{v}_i 's de $\tilde{\mathcal{G}}$ s'ao escolhidos como pontos em e_i de \mathcal{G} , ent'ao $\tilde{\gamma}$ come'ca em \tilde{v}_1 como um ponto em e_1 e termina em \tilde{v}_8 como um ponto em e_8 . Este exemplo mostra que quando em \mathcal{G} temos um caminho aberto n'ao autoevit'avel, em $\tilde{\mathcal{G}}$ n'ao necessariamente teremos um caminho correspondente aberto n'ao autoevit'avel.

Exemplo 3. Considere o caminho $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_{10}, \tilde{v}_{10})$ no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ como na Figura 2.5 e o caminho $\gamma = (v_0, e_1, \dots, e_{10}, v_{10})$ em $\mathcal{G} = (V, E)$, o grafo

coberto por $\tilde{\mathcal{G}}$ como na Figura 2.6.

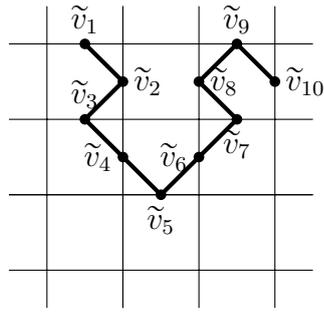


Figura 2.5: Caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$

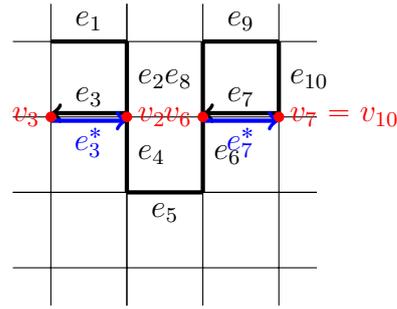


Figura 2.6: Caminho γ no grafo \mathcal{G} . Os elos e_3^* e e_7^* (em azul) representam um *loop*, isto é, os elos e_3 e e_7 são “visitados” mais de uma vez. Os vértices v_2, v_3, v_6, v_7 e v_{10} (em vermelho) também são “visitados” mais de uma vez e estes vértices coincidem com outros vértices do caminho γ

Veja que o caminho $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_{10}, \tilde{v}_{10})$ no grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ na Figura 2.5 é um caminho autoevitável uma vez que todos os seus vértices são distintos. O caminho $\gamma = (v_0, e_1, \dots, e_{10}, v_{10})$ no grafo \mathcal{G} obtido a partir do caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ na Figura 2.6 tem os elos e_3 e e_7 “visitados” duas vezes. Representamos este fato pelos elos e_3^* e e_7^* (em azul na figura) cujos vértices são v_2^* e v_3^* para o elo e_3^* e v_6^* e v_7^* para o elo e_7^* . Veja que os vértices v_7 e v_{10} coincidem, além disso os vértices $v_i = v_i^*$ também coincidem, para $i = 2, 3, 6, 7$.

Observe que os vértices v_2, v_6, v_7 e v_{10} são “visitados” mais de uma vez, isto é, seguindo a ordem estabelecida em $\tilde{\gamma}$, o elo e_3 é percorrido no sentido do vértice v_2 para v_3 (em preto na Figura 2.6) e do vértice v_3 para v_2 (em azul na Figura 2.6). O mesmo ocorre no elo e_7 , ou seja, ele é percorrido no sentido do vértice v_6 para v_7 (em azul na Figura 2.6) e do vértice v_7 para v_6 (em preto na Figura 2.6). Os ditos dois sentidos nos elos e_3 e e_7 é uma caracterização de um *loop*, assim como um vértice ser “visitado” mais de uma vez. Por estes motivos, o caminho γ é não autoevitável. Este exemplo mostra que quando temos um caminho autoevitável no grafo de cobertura não necessariamente encontramos

um caminho autoevitável em um grafo “coberto” pelo grafo de cobertura.

A partir da Definição 3 e dos Exemplos 1, 2 e 3, podemos concluir e resumir os seguintes fatos:

- (i) Se temos um caminho autoevitável em \mathcal{G} , então temos um caminho autoevitável em $\tilde{\mathcal{G}}$ (Exemplo 1); (Lembrando que isto vale pois um caminho em \mathcal{G} com vértices distintos seus elos também não se repetem.)
- (ii) Se temos um caminho que é não autoevitável em um grafo, então conseguimos construir um caminho autoevitável, bastando para isto retirar os *loops* (Exemplo 2);
- (iii) Se temos um caminho que é não autoevitável em \mathcal{G} , então não necessariamente temos um caminho correspondente que é não autoevitável em $\tilde{\mathcal{G}}$ (Exemplo 2);
- (iv) Se temos um caminho autoevitável no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$, então não necessariamente geramos um caminho autoevitável no grafo \mathcal{G} (Exemplo 3).

Estas relações entre \mathcal{G} e $\tilde{\mathcal{G}}$ são a base para mostrar a equivalência entre a Percolação em Elos em \mathcal{G} e a Percolação em Sítios em $\tilde{\mathcal{G}}$.

No que segue na Proposição 1, todos os elementos da cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ terão o til em cima. Denotamos por $\tilde{v}(e)$ o vértice de $\tilde{\mathcal{G}}$ associado ao elo e de \mathcal{G} .

Proposição 1. *Seja \mathcal{G} um grafo e $\tilde{\mathcal{G}}$ o seu respectivo grafo de cobertura. Defina o mapeamento*

$$\begin{aligned} \phi : \Omega_E &\longrightarrow \tilde{\Omega}_{\tilde{V}} \\ \omega &\longmapsto \tilde{\omega} \end{aligned}$$

tal que

$$\phi(\omega(e)) = \tilde{\omega}(\tilde{v}(e)), \quad e \in E, \tilde{v}(e) \in \tilde{V} \text{ e } \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{V}}. \quad (2.1)$$

Como ϕ é uma função injetiva com imagem em $\tilde{\Omega}_{\tilde{V}}$, o conjunto das configurações dos vértices do grafo $\tilde{\mathcal{G}}$, e para qualquer $e \in E$, $\omega = \omega(e) \in \Omega_E$,

$$f \in C(e, \omega) \text{ se e somente se } \tilde{v}(f) \in \tilde{C}(\tilde{v}(e), \phi(\omega)), \text{ com } \tilde{v}(e) \in \tilde{V} \text{ e } \phi(\omega) \in \tilde{\Omega}_{\tilde{V}}. \quad (2.2)$$

Além disso, se definimos $\tilde{P}_{\tilde{V}}$ por

$$\tilde{P}_{\tilde{V}} = \prod_{\tilde{v} \in \tilde{V}} \tilde{\mu}_{\tilde{v}} \quad (2.3)$$

onde

$$\tilde{\mu}_{\tilde{v}}(\tilde{\omega}(\tilde{v}) = 1) = \mu_e(\omega(e) = 1) = p(e) \quad (2.4)$$

sempre que $\tilde{v} = \tilde{v}(e)$, então para todo $n \leq \infty$

$$\tilde{P}_{\tilde{v}}(|\tilde{C}(\tilde{v}(e))| = n) = P_E(|C(e, \omega)| = n). \quad (2.5)$$

A Equação (2.2) diz que um elo f está no aglomerado aberto no grafo \mathcal{G} passando pelo elo e dada a configuração ω se e somente se o vértice $\tilde{v}(f)$ relacionado ao elo f no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ pertence ao aglomerado aberto passando pelo vértice $\tilde{v}(e)$ relacionado ao elo e também em $\tilde{\mathcal{G}}$ dada a configuração $\phi(\omega)$ definida na Equação (2.1). Para mostrar isso, vamos utilizar a Definição 3 de grafo de cobertura e a função ϕ .

A Equação (2.5) garante a equivalência entre a Percolação em Elos em um grafo \mathcal{G} e a Percolação em Sítios no grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$. Para prová-la, vamos utilizar os aglomerados W em \mathcal{G} e \tilde{W} em $\tilde{\mathcal{G}}$, os quais são definidos na demonstração abaixo, além de utilizar a Definição 3 e as Equações (2.3) e (2.4).

Demonstração.

Para esta demonstração, seguimos de perto o que é feito em [20].

Para mostrar o resultado da Equação (2.2), vamos provar os dois sentidos da implicação desta equação.

(\Rightarrow) em (2.2)

Considere o elo $f \in C(e, \omega)$, se e somente se, existe um caminho $\gamma = (v_0, e_1, \dots, e_V, v_V)$ autoevitável em \mathcal{G} com $\omega(e_i) = 1$ e $e_1 = e$, $e_V = f$, para todo $i = 1, \dots, V$. Para qualquer caminho γ autoevitável, a imagem dele $\tilde{\gamma}$ no grafo de cobertura também é autoevitável, logo terá V vértices distintos. Defina o caminho $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}_1, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_V, \tilde{v}_V)$ com $\tilde{v}_i = \tilde{v}(e_i)$ associado ao caminho γ . Então pela Equação (2.1) temos que

$$\phi(\omega(e_i)) = \tilde{\omega}(\tilde{v}(e_i)) = 1,$$

pois $\omega(e_i) = 1$ para todo $i = 1, \dots, V$ e pela Definição 3 de grafo de cobertura. Então $f \in C(e, \omega)$ implica $\tilde{v}(e) \leftrightarrow \tilde{v}(f)$, ou seja,

$$\tilde{v}(f) \in \tilde{C}(\tilde{v}(e), \phi(\omega)).$$

(\Leftarrow) em (2.2)

Considere o vértice $\tilde{v}(f) \in \tilde{C}(\tilde{v}(e), \phi(\omega))$, se e somente se, existe um caminho $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}_1, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_V, \tilde{v}_V)$ em $\tilde{\mathcal{G}}$ um caminho autoevitável com $\tilde{\omega}(\tilde{v}(e_i)) = 1$ para todo $i = 1, \dots, V$, os vértices $\tilde{v}_1 = \tilde{v}(e)$ e $\tilde{v}_V = \tilde{v}(f)$. Nosso objetivo é construir um caminho $\gamma = (v_0, e_1, \dots, e_N, v_N)$ tal que $e_1 = \varphi^{-1}(\tilde{v}_1)$ e $e_N = \varphi^{-1}(\tilde{v}_V)$, sendo $\varphi^{-1}(\cdot)$ a função inversa da aplicação $\varphi(\cdot)$ apresentada na Definição 3 sobre grafo de cobertura. Construimos esse caminho necessariamente da seguinte forma:

- 1) Escolhemos $e_1 = \varphi^{-1}(\tilde{v}_1)$ e v_0 como o vértice adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_1)$ que não é adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_2)$ e v_1 como o vértice que é adjacente a ambos $\varphi^{-1}(\tilde{v}_1)$ e $\varphi^{-1}(\tilde{v}_2)$.
- 2) Para escolher e_2 e v_2 consideramos dois casos:

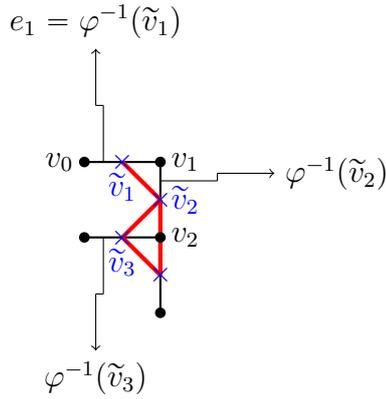


Figura 2.7: Uma representação para o caso 2.i) na rede quadrada em \mathbb{Z}^2 . Em vermelho temos o caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo de cobertura. Em negrito temos o caminho γ no grafo original. Os sítios representados em azul com o símbolo \times estão no grafo de cobertura. $\varphi^{-1}(\tilde{v}_i)$ representa o elo no caminho γ no grafo original relacionado ao vértice \tilde{v}_i

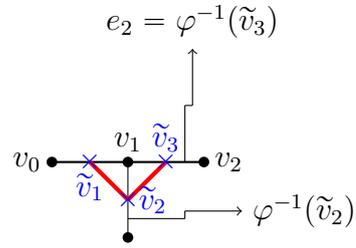


Figura 2.8: Uma representação para o caso 2.ii) na rede quadrada em \mathbb{Z}^2 . Em vermelho temos o caminho $\tilde{\gamma}$ no grafo de cobertura. Em negrito temos o caminho γ no grafo original. Os sítios representados em azul com o símbolo \times estão no grafo de cobertura. $\varphi^{-1}(\tilde{v}_i)$ representa o elo no caminho γ no grafo original relacionado ao vértice \tilde{v}_i . Observe que o elo $\varphi^{-1}(\tilde{v}_2)$ não pertence ao caminho γ

i) v_1 não é adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_3)$:

neste caso escolhemos v_2 como o vértice adjacente a ambos $\varphi^{-1}(\tilde{v}_2)$ e $\varphi^{-1}(\tilde{v}_3)$ e $e_2 = \varphi^{-1}(\tilde{v}_2)$, veja Figura 2.7.

ii) v_1 é adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_3)$:

neste caso escolhemos v_2 como o outro vértice adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_3)$ e $e_2 = \varphi^{-1}(\tilde{v}_3)$ e assim o caminho γ não passa pela aresta $\varphi^{-1}(\tilde{v}_2)$, logo $N < V$, veja Figura 2.8.

3) Continuamos recursivamente o procedimento acima. Após k etapas teremos um caminho autoevitável $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$.

Se $e_k = \varphi^{-1}(\tilde{v}_V)$, então $N = k$ e terminamos.

Se $e_k = \varphi^{-1}(\tilde{v}_\ell)$ para $\ell < V$ então consideramos três casos:

i) Se $\ell < V - 1$ e v_k não é adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_{\ell+2})$:

neste caso escolhemos v_{k+1} como o vértice adjacente a ambos $\varphi^{-1}(\tilde{v}_{\ell+1})$ e $\varphi^{-1}(\tilde{v}_{\ell+2})$ e $e_{k+1} = \varphi^{-1}(\tilde{v}_{\ell+1})$.

ii) Se $\ell < V - 1$ e v_k é adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_{\ell+2})$:

neste caso escolhemos v_{k+1} como o outro vértice adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_{\ell+2})$ e $e_{k+1} = \varphi^{-1}(\tilde{v}_{\ell+2})$.

iii) Se $\ell = V - 1$:

neste caso $e_{k+1} = \varphi^{-1}(\tilde{v}_V)$ e v_{k+1} é o outro vértice adjacente a $\varphi^{-1}(\tilde{v}_V)$.

Então, pela Equação (2.1) e o fato de ϕ ser uma função injetiva (logo invertível), temos que $\phi^{-1} : \tilde{\Omega}_{\tilde{V}} \longrightarrow \Omega_E$ e

$$\phi^{-1}(\tilde{\omega}(\tilde{v}(e_i))) = \omega(e_i) = 1,$$

pois $\tilde{\omega}(\tilde{v}(e_i)) = 1$ para todo $i = 1, \dots, N$ e pela Definição 3 de grafo de cobertura. Então $\tilde{v}(f) \in \tilde{C}(\tilde{v}(e), \phi(\omega))$ implica $e \leftrightarrow f$, ou seja,

$$f \in C(e_1, \omega) = C(e, \omega),$$

porque $f \in C(e_1, \omega)$ está no mesmo caminho γ .

E isto prova a Equação (2.2).

Agora vamos provar a Equação (2.5). Para isso defina W como uma união finita de n elos distintos de \mathcal{G} contendo o elo e e tal que para cada elo f de W exista um caminho

$\gamma = (v_0, e_1, \dots, e_V, v_V)$ não autoevitável em \mathcal{G} onde $e_1 = e$, $e_V = f$. Então $C(e, \omega) = W$ ocorre, se e somente se,

$$\omega(f) = 1 \ \forall f \in W, \quad \text{mas } \omega(g) = 0, \quad \text{para todos os elos } g \text{ de } \mathcal{G} \setminus W \quad (2.6)$$

que compartilham uma extremidade em comum com elos de W .

Com efeito, a primeira condição para a Equação (2.6) diz que para cada elo em W pertence ao aglomerado $C(e, \omega)$, enquanto que o segundo requisito diz que todo elo f de W é aberto e qualquer outro elo g de \mathcal{G} com uma extremidade em W é fechado, mas não pertencendo a W . Agora considere \widetilde{W} como a união de todos os vértices $\tilde{v}(f)$, $f \in W$, e de todos os elos de $\widetilde{\mathcal{G}}$ entre quaisquer dois vértices. Assim, $\widetilde{W} \subset \widetilde{\mathcal{G}}$ e \widetilde{W} contém exatamente n vértices distintos $\tilde{v}(f)$, $f \in W$, incluindo é claro $\tilde{v}(e)$. Além disso $\widetilde{C}(\tilde{v}(e), \tilde{\omega}) = \widetilde{W}$, se e somente se, $\tilde{\omega}(\tilde{a}) = 1$ para todo $\tilde{a} \in \widetilde{W}$, mas $\tilde{\omega}(\tilde{b}) = 0$ para todos os vértices $\tilde{b} \in \widetilde{\mathcal{G}}$ que são adjacentes a um vértice em \widetilde{W} , mas não pertencem a \widetilde{W} .

É fácil ver que g tem uma extremidade em W mas não pertence a W , se e somente se, $\tilde{v}(g)$ é adjacente a algum vértice de \widetilde{W} , mas $\tilde{v}(g) \notin \widetilde{W}$. Veja as Figuras 2.9 e 2.10 abaixo para uma exemplificação do que foi descrito anteriormente.

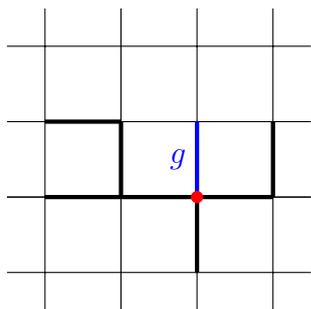


Figura 2.9: Aglomerado W (em negrito) no grafo \mathcal{G} . No destaque em azul vemos o elo g que não pertence ao aglomerado W com uma de suas extremidades pertencente ao aglomerado W representado pelo vértice em vermelho o qual pertence ao aglomerado W

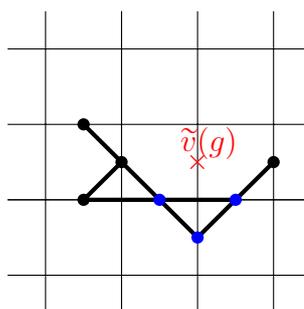


Figura 2.10: Aglomerado \widetilde{W} (em negrito) no grafo de cobertura $\widetilde{\mathcal{G}}$. A marca \times (em vermelho) representa o vértice $\tilde{v}(g)$ no grafo de cobertura $\widetilde{\mathcal{G}}$ correspondente ao elo g do grafo \mathcal{G} , o qual não pertence ao aglomerado \widetilde{W} e é adjacente aos vértices em azul do aglomerado \widetilde{W}

A partir disso obtemos

$$P_E(C(e, \omega) = W) = \tilde{P}_{\tilde{V}}(\tilde{C}(\tilde{v}(e, \omega)) = \tilde{W}) \quad (2.7)$$

considerando $\tilde{P}_{\tilde{V}}$ como definido nas Equações (2.3) e (2.4). Mas

$$\{|C(e, \omega)| = n\} = \bigcup_{|W|=n} \{C(e, \omega) = W\} \quad (2.8)$$

com a união na Equação (2.8) sendo sobre todos os aglomerados W do tipo considerado acima e contendo n elos. Analogamente

$$\{|\tilde{C}(\tilde{v}(e), \omega)| = n\} = \bigcup_{|\tilde{W}|=n} \{\tilde{C}(\tilde{v}(e), \omega) = \tilde{W}\} \quad (2.9)$$

com a união na Equação (2.9) sendo sobre todos os aglomerados \tilde{W} do tipo considerado acima e contendo n elos e para cada \tilde{W} na Equação (2.9) sendo a imagem única de W na Equação (2.8). Isso é facilmente verificado utilizando a Definição 3 de grafo de cobertura que associa cada elo em W a um único vértice em \tilde{W} . Assim, a Equação (2.5) segue diretamente das Equações (2.7), (2.8) e (2.9). ■

Exemplo 4. *Vamos considerar o exemplo abaixo, o qual será relacionado com a Definição 3 e a Proposição 1.*

Considere o grafo \mathcal{G} como a rede quadrada em \mathbb{Z}^2 . Neste grafo, dois vértices $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^2$, com $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ são adjacentes ou vizinhos se e somente se

$$\|x - y\|_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1. \quad (2.10)$$

Para a Percolação em Elos na rede quadrada em \mathbb{Z}^2 queremos encontrar o seu grafo de cobertura, para isso vamos adicionar diagonais a quadrados alternados do grafo \mathcal{G} , como podemos observar na Figura 2.11 abaixo.

De maneira mais formal, dois vértices $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ do grafo à esquerda são ditos vizinhos se eles satisfazem a Equação (2.10) ou a Equação (2.11)

$$|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 1 \text{ e } x_1 + x_2 \text{ é ímpar ou } x_1 - x_2 \text{ é par.} \quad (2.11)$$

Obtemos o grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ como na Figura 2.12 a partir de uma translação no sistema de coordenadas apresentado na Figura 2.11 pelo vetor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, rotacionando em 45° e alterando a escala pelo fator $\sqrt{2}$.

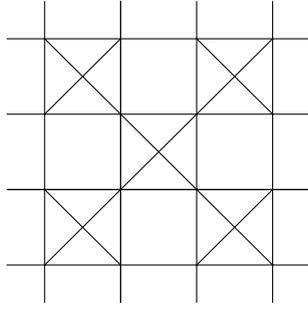


Figura 2.11: Grafo com diagonais nos quadrados alternados

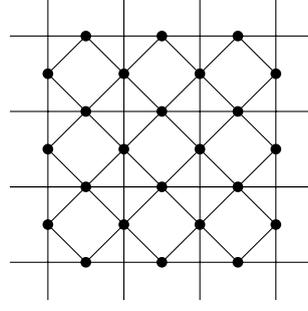


Figura 2.12: Grafo $\tilde{\mathcal{G}}$

Os vértices de $\tilde{\mathcal{G}}$ estão localizados nos pontos $(x + \frac{1}{2}, y)$ e $(x, y + \frac{1}{2})$, com $x, y \in \mathbb{Z}$. Dois vértices $\tilde{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\tilde{v}_2 = (x_2, y_2)$ do grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ são vizinhos se e somente se

$$x_1 = x_2, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \text{ e } |y_1 - y_2| = 1 \quad (2.12)$$

ou

$$y_1 = y_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \text{ e } |x_1 - x_2| = 1 \quad (2.13)$$

ou

$$|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

A Figura 2.13 abaixo mostra uma representação do grafo \mathcal{G} na rede quadrada em \mathbb{Z}^2 e na Figura 2.14 o respectivo grafo de cobertura de \mathcal{G} , denotado por $\tilde{\mathcal{G}}$. Os elos e_1, e_2, e_3 e e_4 do grafo \mathcal{G} estão representados na Figura 2.13 e em destaque em ambas figuras abaixo. Nas Figuras 2.13 e 2.14, temos a correspondência 1 a 1 garantida pela função ϕ da Proposição 1 sendo os elos de \mathcal{G} e_1, e_2, e_3 e e_4 relacionados por ϕ aos vértices de $\tilde{\mathcal{G}}$ $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ e \tilde{v}_4 , respectivamente.

Como descrito na representação do grafo $\tilde{\mathcal{G}}$, o conjunto dos vértices vizinhos a \tilde{v}_2 (em vermelho na Figura 2.14) é $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_3, \tilde{v}_5, \tilde{v}_6, \tilde{v}_8, \tilde{v}_9\}$ (em azul na Figura 2.14), sendo os vértices $\{\tilde{v}_6, \tilde{v}_9\}$ devido a Equação (2.12), $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_3, \tilde{v}_5, \tilde{v}_8\}$ pela Equação (2.14). E, por exemplo, o vértice \tilde{v}_5 é vizinho do vértice \tilde{v}_1 em virtude da Equação (2.13).

Além disso, observe que a Proposição 1 garante a equivalência da Percolação em Elos em um grafo \mathcal{G} com a Percolação em Sítios no seu respectivo grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$, isto é, se desejamos calcular a probabilidade de encontrar um aglomerado infinito em \mathcal{G} utilizando o modelo de Percolação em Elos, conseguimos construir um grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ no qual calculamos a probabilidade de encontrar um aglomerado infinito utilizando o

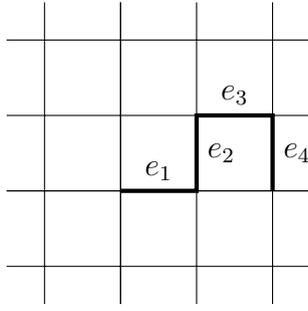


Figura 2.13: Representação do grafo \mathcal{G} e seus respectivos elos

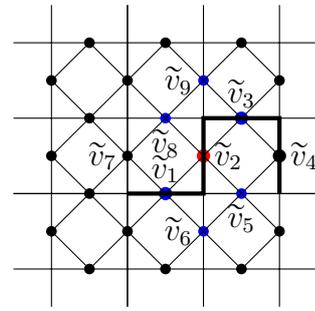


Figura 2.14: Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ do grafo \mathcal{G} e seus respectivos vértices

modelo de Percolação em Sítios. Desse modo, se em $\tilde{\mathcal{G}}$ conseguimos encontrar que a probabilidade de percolar é positiva, necessariamente a probabilidade de percolação em \mathcal{G} também é maior que zero. Neste sentido o modelo de Percolação em Sítios é mais geral que o modelo de Percolação em Elos.

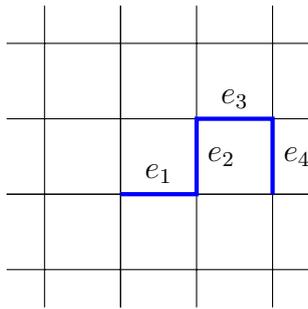


Figura 2.15: Representação do grafo \mathcal{G} e um trecho do aglomerado aberto infinito (em azul)

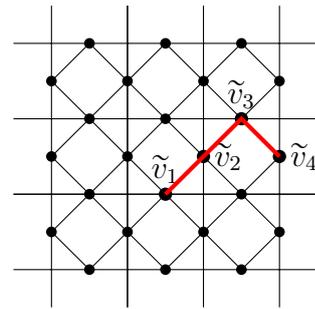


Figura 2.16: Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ do grafo \mathcal{G} e um trecho do aglomerado aberto infinito (em vermelho)

A Figura 2.15 mostra um trecho do aglomerado aberto infinito em \mathcal{G} e conforme a Definição 3 sobre grafo de cobertura e a Proposição 1 temos que dados os elos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ em \mathcal{G} que estão conectados por caminho aberto tendo em comum uma única extremidade, os seus respectivos vértices $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\}$ em $\tilde{\mathcal{G}}$ também estão conectados por um caminho aberto conforme mostra na Figura 2.16. Portando, todo problema de Percolação em Elos pode ser transformado, utilizando o método proposto, em um problema de Percolação em

Sítios.

Observe que pela construção apresentada não podemos utilizar um procedimento similar para transladar um problema de Percolação em Sítios em um grafo \mathcal{G} para um problema de Percolação em Elos em outro grafo, porque \mathcal{G} pode não ser um grafo de cobertura de qualquer outro grafo. Por exemplo, considere o grafo \mathcal{H} onde qualquer dos seus vértices tem pelo menos três elos distintos e_1, e_2, e_3 encontrando-se nele, veja a Figura 2.17, então os vértices do grafo $\tilde{\mathcal{H}}$ relacionados aos elos citados são $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$, respectivamente, o qual formam os vértices de um triângulo em $\tilde{\mathcal{H}}$, observe a Figura 2.18. Portanto, o grafo \mathcal{G} como a rede quadrada \mathbb{Z}^2 , o qual não tem triângulos, não é um grafo de cobertura.

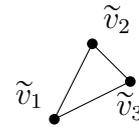
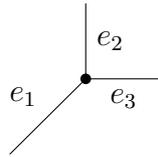


Figura 2.17: Representação do Grafo \mathcal{H}

Figura 2.18: Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{H}}$

Se não temos três elos conectados a um único vértice, então em \mathbb{Z}^2 só podemos ter um grafo \mathcal{D} como o da Figura 2.19, cujo grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{D}}$ é da mesma forma conforme mostra a Figura 2.20

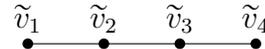


Figura 2.19: Representação do Grafo \mathcal{D}

Figura 2.20: Representação do grafo de cobertura $\tilde{\mathcal{D}}$

Capítulo 3

Resultados Importantes

Os resultados que são apresentados neste capítulo podem ser aplicados para um modelo de Percolação em elos ou sítios, fazendo as devidas adaptações. Por simplicidade de notação, iremos denotar a função percolação da Definição 1 simplesmente por $\theta(\cdot)$. E o grafo considerado nas demonstrações é $\mathcal{G} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. As medidas de probabilidade P_E e P_V associadas respectivamente a \mathcal{X} e \mathcal{Y} são denotadas por P_p , sendo p a probabilidade do elo (sítio) estar aberto. E o valor esperado com respeito à P_p será E_p . O espaço amostral será denotado por Ω podendo se referir ao Ω_E ou ao Ω_V . As σ -álgebras \mathcal{F}_E e \mathcal{F}_V são denotadas por \mathcal{F} .

Definição 4. [*Probabilidade Crítica*]

$$p_c = \sup\{p \in [0, 1] \text{ tal que } \theta(p) = 0\}.$$

A Definição 4 não nos deve levar a concluir que o ponto crítico é o mesmo considerando tanto a Percolação em Elos quanto a Percolação em Sítios. A Tabela 3.1 abaixo mostra exatamente o contrário. Ela pode ser encontrada no livro de Stauffer e Aharony em [1]. A não ser pelos valores em negrito na Tabela 3.1, todos os demais são estimados. Na literatura, no artigo de Essam e Skypes [12] de 1964, encontra-se uma demonstração para estes valores exatos, assim como no livro de Grimmet [15] e no artigo de Kesten [21] de 1980 podem ser encontradas a prova que $p_c = \frac{1}{2}$ considerando a Percolação em Elos em \mathbb{Z}^2 na rede quadrada. Apresentamos esse resultado no Capítulo 4.

Teorema 1. *Se $d \geq 2$ então $p_c \in (0, 1)$.*

A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em Grimmet [15] e este Teorema

Tabela 3.1: Valores estimados e exatos (em negrito) para a Probabilidade Crítica p_c nos modelos de Percolação em Sítios e em Elos em diferentes tipos de redes regulares

Rede	Sítio	Elo
Hexagonal	0,6962	0,65271 ¹
Quadrada	0,592746	0,5
Triangular	0,5	0,34729 ²
Diamante	0,43	0,388
Cúbica	0,3116	0,2488
BCC	0,246	0,1803
FCC	0,198	0,119
Hipercubo $d = 4$	0,197	0,1601
Hipercubo $d = 5$	0,141	0,1182
Hipercubo $d = 6$	0,107	0,0942
Hipercubo $d = 7$	0,089	0,0787

¹ Valor exato $p_c = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right)$

² Valor exato $p_c = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right)$

estabelece a existência de um valor de probabilidade crítico (Definição 4), que divide o intervalo $[0, 1]$ em três fases conforme a seguinte definição.

Definição 5. Para $d \geq 2$,

- (i) Se $p < p_c$, fase subcrítica (*ausência de percolação*, $\theta(p) = 0$);
- (ii) Se $p = p_c$, fase crítica (*parâmetro de transição de fase*);
- (iii) Se $p > p_c$, fase supercrítica (*percolação quase certamente*, $\theta(p) > 0$).

As fases subcrítica e supercrítica são fortemente marcadas pela característica de que na primeira não existe um aglomerado infinito, enquanto na segunda, Harris no artigo [19] em 1960, mostrou que com probabilidade um existe um único aglomerado infinito. Este resultado é apresentado no presente texto no Teorema 5.

Na fase subcrítica, além de apresentar a característica da ausência de percolação, isto é, não encontramos um aglomerado aberto infinito nela, o Teorema 2 abaixo mostra outra característica importante: o decaimento exponencial da chamada cauda do aglomerado

aberto que contém a origem. Esse resultado foi mostrado por Menshikov no artigo [22] em 1986 de forma independente de Aizenman e Barsky no artigo [2] em 1987 utilizando argumentos distintos.

Definimos Q_n a bola de raio n com centro na origem em \mathbb{Z}^d , isto é,

$$Q_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq n\}.$$

Considere também o evento existe um caminho aberto ligando a origem até ∂Q_n (a fronteira de Q_n), denotado por $\{\mathbf{0} \leftrightarrow \partial Q_n\}$, sendo $\mathbf{0}$ a origem de \mathbb{Z}^d .

Teorema 2. *Se $p < p_c$, então existe $\psi(p) > 0$ tal que*

$$P_p(\mathbf{0} \leftrightarrow \partial Q_n) < e^{-n\psi(p)},$$

para todo n .

O Teorema 2 será utilizado em uma demonstração do Capítulo 4. Uma versão análoga a essa pode ser usada substituindo a bola Q_n de raio n por uma caixa de lado $2n$ centrada na origem que é mostrada na Definição 9. Uma demonstração para o Teorema 2 pode ser encontrada no Grimmet [15] nos Capítulos 5 (Seção 5.2) e 6 (Seção 6.1).

Teorema 3. *Se $d = 2$ ou $d \geq 19$, $\theta(p_c) = 0$.*

O Teorema 3 foi provado por Hara e Slade nos artigos [17] em 1989, [18] em 1994 e no artigo de Hara em [16] em 1990, o qual é uma extensão da demonstração já apresentada por Kesten no artigo [21] em 1980 considerando a Percolação em Elos na rede quadrada em \mathbb{Z}^2 , ou seja, para $d = 2$. Eles mostraram que a probabilidade de percolação considerando o ponto crítico é igual a zero. No caso para $d \geq 19$ foi utilizado a expansão em laço desenvolvida no artigo de Brydges e Spencer em [7] de 1985 e nos próprios artigos de 1990 de Hara [16] e de 1994 de Hara e Slade [18].

Ainda é um problema em aberto na Teoria de Percolação qual é o valor $\theta(p_c)$ quando $3 \leq d \leq 18$. Conjectura-se que $\theta(p_c) = 0$ para todo d .

Exemplo 5 (Caso $d = 1$). *Para $d = 1$, queremos calcular a probabilidade da origem estar em um aglomerado infinito, isto é, a origem pode estar ligada ao infinito pela direita ou pela esquerda. Logo, se ela está ligada ao infinito pelo lado direito, por exemplo, isto significa necessariamente que a origem está ligada até o número inteiro n , assim temos a seguinte inclusão de eventos*

$$\{|C_0| = \infty\} \subset \{|C_0| \geq 2n\} \subset \{0 \leftrightarrow -n\} \cup \{0 \leftrightarrow n\}.$$

Agora calculando as probabilidades destes eventos acontecerem temos que

$$\begin{aligned} P_p(|C_0| = \infty) = \theta(p) &\leq P_p(\{0 \leftrightarrow -n\} \cup \{0 \leftrightarrow n\}) \\ &\leq P_p(0 \leftrightarrow -n) + P_p(0 \leftrightarrow n) = 2p^n, \end{aligned}$$

quando $p \in (0, 1)$ e $n \rightarrow \infty$ temos que $2p^n \rightarrow 0$. Assim temos $\theta(p) \leq 0$, e então, $\theta(p) = 0$, para todo $p \in (0, 1)$. Portanto, a função $\theta(p)$ deixa de ser zero somente quando $p = 1$, de onde concluímos que para $d = 1$ $p_c = 1$. Isto significa que o sistema somente percola se a probabilidade do elo (sítio) estar aberto é igual a um, ou seja, todos os elos (sítios) na reta devem estar abertos.

Proposição 2. $\theta(p) > 0$ se e somente se $P_p(\exists x : |C_x| = +\infty) = 1$.

Para a demonstração da Proposição 2, precisamos de um resultado auxiliar conhecido na literatura por *Lei 0-1 de Kolmogorov* que enunciamos no Lema 1 abaixo. Vamos introduzir uma notação própria que é necessária para melhor compreensão do Lema 1. Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e considere $\mathcal{F}'_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias a partir de n a qual é a menor σ -álgebra mensurável com respeito a todas as variáveis aleatórias X_m , $m \geq n$. Seja $\tau = \bigcap_n \mathcal{F}'_n$ a σ -álgebra caudal. Intuitivamente, o evento $A \in \tau$ se e somente se modificando um número finito de valores não afeta na ocorrência do evento, ou seja, o evento A só depende das variáveis aleatórias X_n, X_{n+1}, \dots . Uma prova para o Lema 1 pode ser encontrada no livro do Durrett [11]. Existe uma versão para este resultado substituindo a sequência de variáveis aleatórias independentes por uma sequência de eventos independentes.

Lema 1 (Lei 0-1 de Kolmogorov). *Se as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots são independentes, τ é a σ -álgebra caudal e o evento $A \in \tau$, então $P_p(A) = 0$ ou 1.*

Demonstração.[Proposição 2]

Para esta prova vamos fazer os dois sentidos da implicação.

(\Leftarrow)

Vamos fazer este sentido da implicação utilizando a contrapositiva da proposição. Assim, suponha que $\theta(p) = 0$. A seguinte inclusão de eventos é válida

$$\{\exists x : |C_x| = +\infty\} = \left\{ \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} |C_x| = +\infty \right\},$$

de onde obtemos as desigualdades a seguir utilizando as propriedades da medida de probabilidade

$$\begin{aligned}
P_p(\exists x : |C_x| = +\infty) &\leq P_p\left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} |C_x| = +\infty\right) \\
&\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p(|C_x| = +\infty) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \theta(p) = 0,
\end{aligned}$$

sendo a primeira igualdade em virtude do sistema ser invariante por translação e assim a probabilidade de termos um aglomerado infinito que passe pelo sítio x ($P_p(|C_x| = +\infty)$) é a mesma que a probabilidade de termos um aglomerado infinito que passe pela origem ($\theta(p) = P_p(|C_0| = +\infty)$). A segunda igualdade segue direto da hipótese que $\theta(p) = 0$.

Logo $P_p(\exists x : |C_x| = +\infty) = 0$.

Assim fica provado que se $P_p(\exists x : |C_x| = +\infty) = 1$ então $\theta(p) > 0$.

(\Rightarrow)

O evento $\{\exists x : |C_x| = +\infty\}$ é invariante por translação como evento da sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\{X_e\}_{e \in \mathbb{E}^d}$. Pela Lei 0-1 de Kolmogorov (Lema 1) temos que

$$P_p(\exists x : |C_x| = +\infty) = 0 \text{ ou } 1.$$

Como $0 < \theta(p) \leq P_p(\exists x : |C_x| = +\infty)$, temos que $P_p(\exists x : |C_x| = +\infty) = 1$. ■

A Proposição 2 mostra que quando estamos na fase supercrítica conseguimos garantir a existência do aglomerado infinito com probabilidade 1.

As Definições 6 e 7 abaixo estabelecem o conhecido *Modelo Padrão*, muito utilizado nas demonstrações dos resultados de Percolação pois permite acoplar modelos para diferentes valores de p , onde a primeira refere-se à Percolação em Elos e a segunda em Sítios.

Definição 6. *Seja $\mathcal{Z} := \{Z_e, e \in \mathbb{E}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Uniforme em $[0, 1]$. Denotaremos por \mathbb{P} a medida de probabilidade neste modelo, a qual é a medida produto com marginais uniformes no intervalo $[0, 1]$. O conjunto $\tilde{\Omega}_E = [0, 1]^{\mathbb{E}^d}$.*

Um elo $e \in \mathbb{E}^d$ é dito p -aberto se $Z_e < p$, e p -fechado caso $Z_e \geq p$.

Definição 7. *Seja $\mathcal{U} := \{U_v, v \in \mathbb{Z}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Uniforme em $[0, 1]$. Denotaremos por $\tilde{\mathbb{P}}$ a medida de probabilidade neste modelo, a qual é a medida produto com marginais uniformes no intervalo $[0, 1]$. O conjunto $\tilde{\Omega}_V = [0, 1]^{\mathbb{Z}^d}$.*

Um sítio $v \in \mathbb{Z}^d$ é dito p -aberto se $U_v < p$, e p -fechado caso $U_v \geq p$.

A seguir, apresentamos duas características importantes sobre a função $\theta(p)$.

Lema 2. *A função $\theta(p)$ é não-decrescente em p .*

Demonstração.

Faremos a prova considerando a Percolação em Elos. (Para o modelo em Sítios a prova é análoga).

Fixe $p_1 < p_2$ e seja C_{p_1} o aglomerado da origem como no Modelo Padrão em \mathbb{Z}^d com elos p_1 -abertos. Temos que $\theta(p_1) = \mathbb{P}(|C_{p_1}| = \infty)$. Analogamente definimos C_{p_2} o aglomerado da origem como no Modelo Padrão em \mathbb{Z}^d com elos p_2 -abertos. Assim, pela Definição 6 temos que todo elo p_1 -aberto é um elo p_2 -aberto de onde temos a inclusão $C_{p_1} \subset C_{p_2}$, portanto segue a desigualdade abaixo pela monotonicidade da medida de probabilidade

$$\theta(p_1) = \mathbb{P}(|C_{p_1}| = \infty) \leq \mathbb{P}(|C_{p_2}| = \infty) = \theta(p_2).$$

■

Lema 3. *A função $\theta(p)$ é não-decrescente em d .*

Demonstração.

Faremos a prova considerando a Percolação em Elos. (Para o modelo em Sítios a prova é análoga).

Considere C o aglomerado em \mathbb{Z}^d contendo a origem, e defina \hat{C} o aglomerado em \mathbb{Z}^{d+1} contendo a origem cujos elos abertos são apenas os elos abertos de C e os demais elos são fechados. Assim,

$$\theta(p) := \theta(p, d) = \mathbb{P}_{p,d}(|C| = \infty) \leq \mathbb{P}_{p,d+1}(|\hat{C}| = \infty) = \theta(p, d + 1).$$

■

Os resultados que são apresentados a seguir consideram *eventos crescentes* e *variáveis aleatórias crescentes*, que definimos abaixo. Para a Definição 8 considere a ordem parcial: dados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ tais que $\omega_1 \leq \omega_2$, se e somente se, $\omega_1(e) \leq \omega_2(e)$ para todo $e \in \mathbb{E}^d$, isto é, todo elo aberto na configuração ω_1 também é um elo aberto na configuração ω_2 . De modo análogo podemos entender este conceito trocando e por $v \in \mathbb{Z}^d$ na Percolação em Sítios.

Definição 8.

- (i) Uma variável aleatória X é dita *crescente* se for crescente na ordem parcial estabelecida anteriormente, isto é, dados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ quaisquer tais que $\omega_1 \leq \omega_2$, então $X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$;
- (ii) Seja \mathcal{F} uma σ -álgebra. Um evento $A \in \mathcal{F}$ é dito *crescente* se \mathbf{I}_A , a função indicadora de A , for crescente.

Em outras palavras, a Definição 8 diz que se temos um evento crescente A sempre que dada a configuração dos elos (ou sítios) do evento A , ao abrirmos mais elos (ou sítios) nesta configuração, o evento A continua ocorrendo.

A desigualdade de FKG, apresentada no Teorema 4, foi provada por Fortuin, Kasteleyn e Ginibre no artigo [14] em 1971. Ela é muito utilizada nas demonstrações dos resultados em Teoria de Percolação. FKG estabelece uma correlação positiva entre variáveis aleatórias crescentes.

Teorema 4. [Desigualdade de FKG]

- (i) Sejam X e Y variáveis aleatórias crescentes tais que $E_p(X^2) < \infty$ e $E_p(Y^2) < \infty$. Então,

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y),$$

ou seja, X e Y são positivamente correlacionadas com respeito à medida de probabilidade P_p .

- (ii) Sejam $A, B \in \mathcal{F}$ eventos crescentes. Então,

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

O Teorema 4 também é válido considerando X e Y variáveis aleatórias decrescentes e os eventos A e B decrescentes. Considerando X uma variável aleatória crescente e Y uma

variável aleatória decrescente e os eventos A crescente e B decrescente, a desigualdade de FKG também é válida porém agora com a desigualdade no outro sentido. Além disso o Teorema 4 pode ser generalizado para uma sequência de variáveis aleatórias crescentes (ou uma sequência de eventos crescentes) de tamanho n , bastando para isto utilizar Indução Matemática e o fato de que a interseção de variáveis aleatórias (eventos) crescentes é uma variável aleatória crescente (um evento crescente).

O Corolário 1, conhecido na literatura por Truque da Raiz Quadrada, foi provado pela primeira vez por Cox e Durrett no artigo [8] de 1988. Esse resultado será utilizado na prova do Teorema 6 além de ser um exemplo de aplicação da desigualdade de FKG.

Corolário 1. *[Truque da Raiz Quadrada]*

Sejam A_1, A_2, \dots, A_m eventos crescentes em \mathcal{F} e todos com a mesma probabilidade, isto é, $P_p(A_1) = P_p(A_2) = \dots = P_p(A_m)$, então

$$P_p(A_1) \geq 1 - \left[1 - P_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \right]^{\frac{1}{m}}.$$

Demonstração.

Sejam A_1, A_2, \dots, A_m eventos crescentes em \mathcal{F} e todos com a mesma probabilidade, isto é, $P_p(A_1) = P_p(A_2) = \dots = P_p(A_m)$, queremos mostrar que

$$P_p(A_1) \geq 1 - \left[1 - P_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \right]^{\frac{1}{m}}.$$

De fato, usando recursivamente FKG temos que

$$P_p \left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c \right) \geq \prod_{i=1}^m P_p(A_i^c),$$

pois $A_1^c, A_2^c, \dots, A_m^c$ são eventos decrescentes.

Assim,

$$\begin{aligned} 1 - P_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) &= P_p \left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c \right) \\ &\geq \prod_{i=1}^m P_p(A_i^c) \\ &= \prod_{i=1}^m [1 - P_p(A_i)], \text{ como } P_p(A_i) = P_p(A_1), \forall i = 1, 2, \dots, m \\ &= \prod_{i=1}^m [1 - P_p(A_1)] \\ &= [1 - P_p(A_1)]^m. \end{aligned}$$

Logo, $P_p(A_1) \geq 1 - \left[1 - P_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \right]^{\frac{1}{m}}$. ■

Teorema 5. [*Unicidade do Aglomerado Infinito*]

Se p é tal que $\theta(p) > 0$, então

$$P_p(\text{existe exatamente um aglomerado aberto infinito}) = 1.$$

O Teorema 5 garante que quando $p > p_c$, ou seja, considerando a fase supercrítica onde temos $\theta(p) > 0$, não somente existe o aglomerado infinito (resultado que é garantido pela Proposição 2), mas ele existe e é único. Este resultado foi provado inicialmente por Aizenman, Kesten e Newman nos artigos [3] e [4] em 1987.

Proposição 3.

(i) A função $\theta(p)$ é contínua à esquerda no intervalo $(p_c, 1]$;

(ii) A função $\theta(p)$ é contínua à direita.

Como consequência direta da Proposição 3 temos que a função $\theta(p)$ é uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, se e somente se, $\theta(p_c) = 0$. Além disso, o resultado (i) na Proposição 3 procede de imediato do Teorema 5.

Definição 9. [*Caixas e Retângulos*]

1. Uma caixa de lado $2n$ com centro na origem é o subconjunto de \mathbb{Z}^d da forma

$$B(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\| \leq n\} = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d.$$

2. Um retângulo de lados $2n$ por $2m$ com centro na origem é o subconjunto de \mathbb{Z}^2 da forma

$$B(n, m) = ([-n, n] \times [-m, m]) \cap \mathbb{Z}^2.$$

Definimos o evento $ED(n)$ existe um cruzamento da esquerda para a direita na caixa $B(n)$ sempre que houver um caminho aberto dentro de $B(n)$ que ligue um sítio da face esquerda de $B(n)$ (denotada por $F_E(n) = \{x \in \partial B(n) : x_1 = -n\}$) a um sítio da face direita de $B(n)$ (denotada por $F_D(n) = \{x \in \partial B(n) : x_1 = n\}$), sendo $\partial B(n)$ representando a fronteira da caixa $B(n)$. Consideramos o evento $ED(n, m)$ existe um cruzamento da esquerda para a direita no retângulo $B(n, m)$ sempre que houver um caminho

aberto dentro de $B(n, m)$ que ligue um sítio da face esquerda de $B(n, m)$ (denotada por $F_E(n, m) = \{x \in \partial B(n, m) : x_1 = -n\}$) a um sítio da face direita de $B(n, m)$ (denotada por $F_D(n, m) = \{x \in \partial B(n, m) : x_1 = n\}$), sendo $\partial B(n, m)$ representando a fronteira do retângulo $B(n, m)$. Denotamos $ED(n, m, x)$ existe um cruzamento da esquerda para a direita na translação por x do retângulo $B(n, m)$ que é o retângulo com lados de tamanho $2n$ e $2m$ centrado em x após a translação.

Proposição 4. *Se $\theta(p) > 0$ na percolação em elos em \mathbb{Z}^d , então*

$$P_p(ED(n)) \rightarrow 1,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Na demonstração da Proposição 4, construímos caixas concêntricas que tem suas faces conectadas; encontramos dois aglomerados infinitos disjuntos e assim utilizamos o Teorema 5 da Unicidade do Aglomerado Infinito. Além disso, mostramos a relação entre os eventos $ED(n)$ e encontramos um cruzamento da esquerda para a direita em uma caixa de lado $2n$ com o auxílio de uma caixa menor de lado $2m$. O resultado da Proposição 4 é válido também para a Percolação em sítios.

Um resultado parecido com a Proposição 4 considerando o modelo de Percolação em Lajes com dois níveis será apresentado no capítulo 5 e sua demonstração é muito parecida com a apresentada abaixo neste capítulo. A diferença é que para provarmos o resultado na laje devemos considerar a propriedade sanduíche definida na Seção 2.3 e a Proposição 6 apresentada no capítulo 5.

Demonstração.

Seguimos de perto a prova feita em Grimmet [15] (Teorema 8.97).

Defina UF o evento em que algum sítio da caixa $B(m)$ de lado $2m$ em \mathbb{Z}^d esteja em algum aglomerado infinito. Como $\theta(p) > 0$ por hipótese, então pelo Teorema 5 existe um aglomerado infinito quase certamente. Assim, para $\varepsilon > 0$ fixo podemos escolher m suficientemente grande tal que

$$P_p(UF) \geq 1 - \varepsilon. \tag{3.1}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq m$. Denotamos F_1, F_2, \dots, F_{2d} as faces da caixa $B(n)$. Se UF ocorre, então o evento algum vértice de $B(m)$ está conectado por um caminho aberto a alguma face F_i de $B(n)$, que denotamos por $\{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\}$, também ocorre.

Logo

$$UF \subset \bigcup_{i=1}^{2d} \{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\}. \quad (3.2)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} P_p(UF) &\leq P_p\left(\bigcup_{i=1}^{2d} \{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\}\right) \\ 1 - P_p(UF) &\geq 1 - P_p\left(\bigcup_{i=1}^{2d} \{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\}\right)^c \\ &= P_p\left(\bigcap_{i=1}^{2d} \{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\}^c\right) \\ &\geq \prod_{i=1}^{2d} P_p(\{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\}^c) \\ &= \prod_{i=1}^{2d} (1 - P_p(\{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\})) \\ &= [1 - P_p(\{B(m) \leftrightarrow F \text{ em } B(n)\})]^{2d}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde a primeira desigualdade é por causa da Equação (3.2) e pela monotonicidade da medida de probabilidade, a terceira é por FKG e pelo fato dos $2d$ eventos da forma $\{B(m) \leftrightarrow F_i \text{ em } B(n)\}^c$ serem decrescentes e a última igualdade devido a estes eventos terem a mesma probabilidade (pela invariância do modelo de percolação em \mathbb{Z}^d) e para qualquer face F de $B(n)$.

Das Desigualdades (3.1) e (3.3) temos

$$\begin{aligned} [1 - P_p(\{B(m) \leftrightarrow F \text{ em } B(n)\})]^{2d} &\leq 1 - P_p(UF) \leq \varepsilon \\ 1 - P_p(\{B(m) \leftrightarrow F \text{ em } B(n)\}) &\leq \sqrt[2d]{\varepsilon} \\ P_p(\{B(m) \leftrightarrow F \text{ em } B(n)\}) &\geq 1 - \sqrt[2d]{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Considere os conjuntos $F_E(n) = \{x \in \partial B(n) : x_1 = -n\}$ a face esquerda de $B(n)$ e $F_D(n) = \{x \in \partial B(n) : x_1 = n\}$ a face direita de $B(n)$, onde $\partial B(n)$ representa a fronteira da caixa $B(n)$. Denotamos o evento existe um aglomerado aberto ligando um sítio na face esquerda de $B(n)$ a um sítio na face direita de $B(n)$ por

$$\Gamma_{n,m} = \{F_E(n) \leftrightarrow B(m) \leftrightarrow F_D(n)\} = \{B(m) \leftrightarrow F_E(n) \text{ em } B(n)\} \cap \{B(m) \leftrightarrow F_D(n) \text{ em } B(n)\}.$$

Utilizando a desigualdade de FKG e a Equação (3.4) temos que

$$P_p(\Gamma_{n,m}) \geq (1 - \sqrt[2d]{\varepsilon})^2. \quad (3.5)$$

Definimos $A_{m,n}$ o evento existem dois sítios em $\partial B(m)$ em dois aglomerados disjuntos, ambos tocando $\partial B(n)$. Note que $A_{m,n} \supset A_{m,n+1}$, ou seja, se conseguimos encontrar dois sítios em $\partial B(m)$ em dois aglomerados disjuntos, ambos tocando $\partial B(n+1)$, necessariamente estes dois aglomerados disjuntos tocam $\partial B(n)$; e quando $n \rightarrow \infty$ $A_{m,n} \downarrow A_m$, onde A_m é o evento existem dois vértices na $\partial B(m)$ que pertencem a dois aglomerados abertos infinitos disjuntos. Portanto,

$$P_p(A_{m,n}) \rightarrow P_p(A_m) = 0, \quad (3.6)$$

quando $n \rightarrow \infty$ e esta probabilidade é zero pelo Teorema 5 que enuncia a unicidade do aglomerado infinito.

Observe que das Equações (3.5) e (3.6) obtemos a seguinte inclusão de eventos

$$\Gamma_{n,m} \subset ED(n) \cup A_{m,n}.$$

Sendo assim, utilizando as propriedades da medida de probabilidade temos que

$$\begin{aligned} P_p(\Gamma_{n,m}) &\leq P_p(ED(n) \cup A_{m,n}) \\ &\leq P_p(ED(n)) + P_p(A_{m,n}), \\ P_p(ED(n)) &\geq P_p(\Gamma_{n,m}) - P_p(A_{m,n}), \text{ quando } n \rightarrow \infty \\ P_p(ED(n)) &\geq (1 - \sqrt[2d]{\varepsilon})^2 - 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\liminf_{n \rightarrow \infty} P_p(ED(n)) \geq (1 - \sqrt[2d]{\varepsilon})^2$, e como ε é arbitrário segue o resultado. ■

Capítulo 4

Percolação em Elos em \mathbb{Z}^2

O modelo de Percolação em Elos em \mathbb{Z}^2 foi um dos primeiros cujo problema da ausência de percolação no ponto crítico foi solucionado. No que segue neste Capítulo, considere o Modelo de Percolação em Elos definido na Seção 2.1, considerando $d = 2$. Os resultados contidos aqui também são válidos para o modelo de Percolação em Sítios fazendo algumas adaptações.

O Teorema 6 calcula de forma exata o valor do ponto crítico quando consideramos o modelo de Percolação em Elos em \mathbb{Z}^2 , além disso ele garante que a probabilidade de encontrarmos um aglomerado infinito é zero considerando a probabilidade do elo estar aberto igual ao p_c .

Teorema 6. *Para $d = 2$,*

$$p_c = \frac{1}{2} \quad e \quad \theta(p_c) = 0.$$

Para demonstrar o Teorema 6, vamos enunciar dois lemas que dividem o resultado em duas partes de forma que unindo seus resultados temos como conclusão o Teorema 6. O Lema 4 foi demonstrado pela primeira vez por Harris [19] em 1960 e o Lema 5 por Kesten [21] em 1980.

Lema 4. *Para $d = 2$, $\theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.*

Lema 5. *Para $d = 2$, $p_c \leq \frac{1}{2}$.*

Para a demonstração dos Lemas 4 e 5, precisamos definir a chamada rede bidimensional dual de \mathbb{Z}^2 denotada por

$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

onde \mathbb{Z}_*^2 é a rede dual que consiste em um deslocamento por $\frac{1}{2}$ unidade em cada coordenada, representada na Figura 4.1 pela linha tracejada e a rede usual em \mathbb{Z}^2 pela linha contínua.

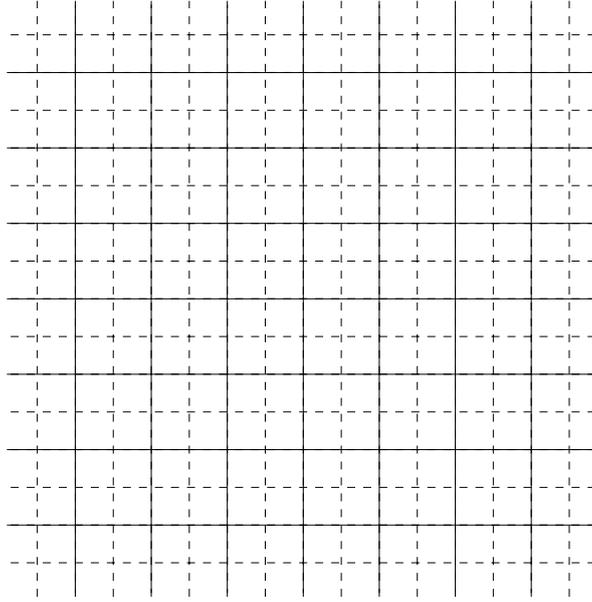


Figura 4.1: Rede bidimensional \mathbb{Z}^2 (linha contínua) e sua dual \mathbb{Z}_*^2 (linha tracejada)

Veja que existe uma relação 1 a 1 com a configuração dos elos em \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}_*^2 , isto é, seja e um elo em \mathbb{Z}^2 e e_* o elo correspondente a e no dual \mathbb{Z}_*^2 e defina $\psi : \Omega \rightarrow \Omega_*$ tal que $\omega_*(e_*) = \psi(\omega(e)) = 1 - \omega(e)$, onde $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ e $\Omega_* = \{0, 1\}^{\mathbb{E}_*^2}$ que são os espaços de todas as possíveis configurações para os elos em \mathbb{Z}^2 e em \mathbb{Z}_*^2 , respectivamente. A Figura 4.2 mostra uma representação de um elo e em \mathbb{Z}^2 e o seu correspondente e_* em \mathbb{Z}_*^2 . A função ψ definida mostra a relação entre a configuração de um elo em \mathbb{Z}^2 e seu correspondente elo no dual, ou seja, se o elo e em \mathbb{Z}^2 está aberto ($\omega(e) = 1$), implica necessariamente que o elo e_* correspondente a ele no dual esteja fechado ($\omega_*(e_*) = 0$); essa é uma característica importante que será utilizada nas demonstrações que seguem.

Considere \mathcal{G} um subgrafo de \mathbb{Z}^2 , denotamos $\Delta\mathcal{G}$ aos elos da fronteira de \mathcal{G} definida como sendo o conjunto de elos de \mathbb{Z}^2 que não estão no interior do grafo \mathcal{G} mas que pelo menos um de seus vértices pertencem a \mathcal{G} . A Proposição 5 é crucial para a demonstração do Teorema 6. Denotamos $\Sigma(\mathcal{G})$ o circuito em \mathbb{Z}^2 (o mesmo pode ser definido em \mathbb{Z}^d) como uma sequência $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n, e_n, v_0$ de vértices e elos tais que $v_0, e_0, \dots, e_{n-1}, v_n$ é um caminho com $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$ e $e_n = (v_n, v_0)$. O tamanho

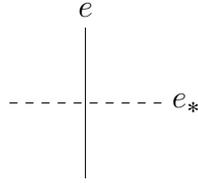


Figura 4.2: Representação de e e e_* , sendo e um elo da rede usual \mathbb{Z}^2 e e_* um elo da rede dual \mathbb{Z}_*^2

de um circuito é o número de vértices ou elos por ele percorrido contendo possíveis repetições. Uma demonstração para a Proposição 5 pode ser encontrada no livro do Kesten [20] no Apêndice. No livro do Grimmet [15] no Capítulo 11 (Seção 11.2) é apresentado o enunciado desta proposição e uma explicação intuitiva do motivo pelo qual ela é verdadeira sem todo o rigor matemático necessário.

Proposição 5. *Seja \mathcal{G} um subgrafo conexo finito de \mathbb{Z}^2 . Então existe um único circuito aberto $\Sigma(\mathcal{G})$ em \mathbb{Z}_*^2 contendo \mathcal{G} em seu interior e com a propriedade de que todos os elos do circuito $\Sigma(\mathcal{G})$ atravessam um elo de $\Delta\mathcal{G}$.*

Demonstração. [Lema 4]

Seguimos o argumento de Zhang em um trabalho de 1988 não publicado.

Suponha por absurdo que

$$\theta\left(\frac{1}{2}\right) > 0. \quad (4.1)$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e definimos A_n^e o evento de que algum sítio do lado esquerdo do quadrado de lados n , $B_n = [0, n]^2$, está em um aglomerado aberto infinito de $\mathbb{Z}^2 \setminus B_n$. Analogamente considere A_n^d, A_n^c e A_n^b trocando lado esquerdo por lado direito, lado de cima e lado de baixo, respectivamente.

Da Equação (4.1) e do Teorema 5 segue que

$$P_{\frac{1}{2}}(\text{existir um aglomerado aberto infinito}) = 1,$$

de onde concluímos que

$$P_{\frac{1}{2}}(A_n^e \cup A_n^d \cup A_n^c \cup A_n^b) \rightarrow 1, \quad (4.2)$$

quando $n \rightarrow \infty$ e onde a união na Equação (4.10) significa que algum sítio do quadrado B_n pertence a um aglomerado aberto infinito.

Note que $P_{\frac{1}{2}}(A_n^e) = P_{\frac{1}{2}}(A_n^d) = P_{\frac{1}{2}}(A_n^c) = P_{\frac{1}{2}}(A_n^b)$ e os eventos A_n^u , para $u \in \{e, d, c, b\}$ são crescentes, vamos utilizar o Truque da Raiz Quadrada (Corolário 1) de onde obtemos que para $u \in \{e, d, c, b\}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_{\frac{1}{2}}(A_n^u) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt[4]{1 - P_{\frac{1}{2}}(A_n^e \cup A_n^d \cup A_n^c \cup A_n^b)} = 1 - \sqrt[4]{1 - 1} = 1.$$

Como $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_{\frac{1}{2}}(A_n^u) \leq 1$ para todo n e $u \in \{e, d, c, b\}$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\frac{1}{2}}(A_n^u) = 1.$$

Escolhemos um valor $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$P_{\frac{1}{2}}(A_N^u) > \frac{7}{8}, \quad (4.3)$$

para $u \in \{e, d, c, b\}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos na rede dual \mathbb{Z}_*^2 , $A_n^{*,e}$ o evento de que algum sítio do lado esquerdo do quadrado $B_n^* = [0, n]^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ esteja em um aglomerado fechado infinito de $\mathbb{Z}_*^2 \setminus B_n^*$. Analogamente considere $A_n^{*,d}$, $A_n^{*,c}$ e $A_n^{*,b}$ trocando lado esquerdo por lado direito, lado de cima e lado de baixo, respectivamente.

Temos que

$$P_{\frac{1}{2}}(A_N^{*,u}) > \frac{7}{8}, \quad (4.4)$$

para $u \in \{e, d, c, b\}$.

Vamos denotar por A o evento em que algum sítio dos lados esquerdo e direito de B_N estão ligados cada um a um aglomerado aberto infinito em $\mathbb{Z}^2 \setminus B_N$ e algum sítio dos lados de cima e de baixo de B_N^* estão ligados cada um a um aglomerado fechado infinito no dual $\mathbb{Z}_*^2 \setminus B_N^*$, ou seja,

$$A = A_N^e \cap A_N^d \cap A_N^{*,c} \cap A_N^{*,b},$$

observe a Figura 4.3 para uma ilustração do evento A .

Observe que se o evento A ocorre então em $\mathbb{Z}^2 \setminus B_N$ contém dois aglomerados abertos infinitos disjuntos (A_N^e, A_N^d) , uma vez que esses aglomerados estão separados pelos dois aglomerados fechados infinitos disjuntos $(A_N^{*,c}, A_N^{*,b})$ em $\mathbb{Z}_*^2 \setminus B_N^*$. Desse modo, qualquer caminho aberto γ que ligue os dois aglomerados abertos A_N^e e A_N^d necessariamente deve passar no interior de B_N . Analogamente, os dois aglomerados abertos A_N^e e A_N^d bloqueiam a conexão por fora do quadrado B_N^* dos dois aglomerados fechados infinitos $A_N^{*,c}$ e $A_N^{*,b}$, assim sendo, eles devem se conectar por um caminho fechado γ^* no interior de B_N^* . Mas

observe que se ambos os caminhos γ e γ^* existem, eles obrigatoriamente se encontram no interior de B_N e B_N^* , o que nunca pode ocorrer devido à dualidade entre \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}_*^2 . Além disso, pelo Teorema 5 da unicidade do aglomerado infinito em \mathbb{Z}^2 , temos que o caminho γ existe quase certamente. Desse modo na rede dual \mathbb{Z}_*^2 irá existir dois ou mais aglomerados fechados infinitos. Portanto, temos que

$$P_{\frac{1}{2}}(A) = 0. \quad (4.5)$$

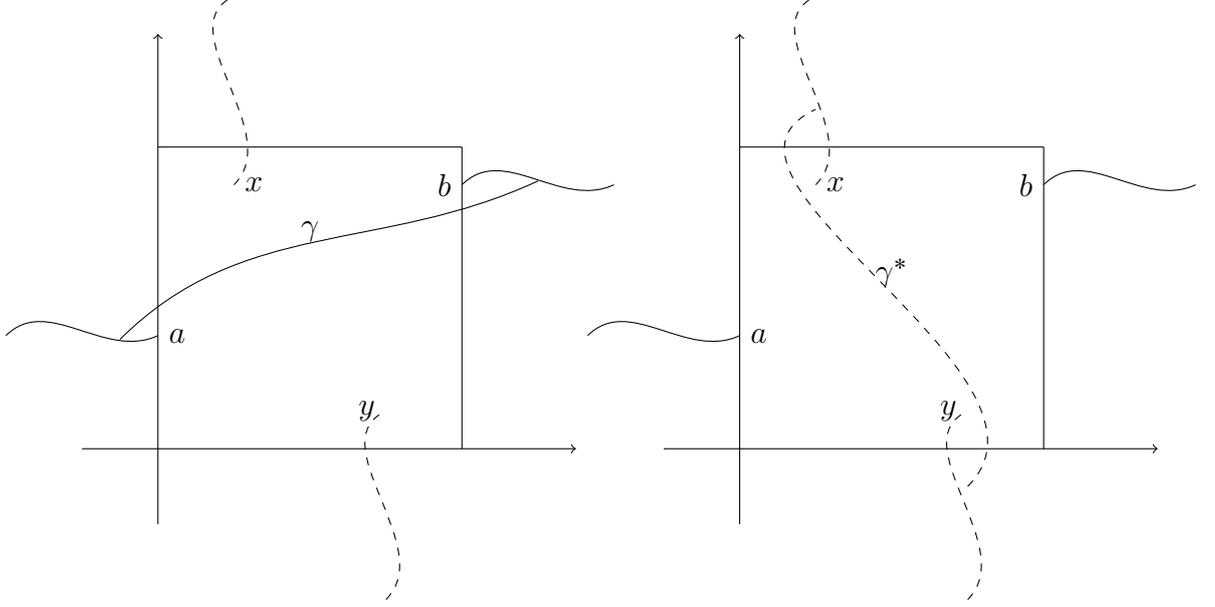


Figura 4.3: Os sítios a e b estão em aglomerados abertos infinitos em $\mathbb{Z}^2 \setminus B_N$ e os sítios x e y estão em aglomerados fechados infinitos de $\mathbb{Z}_*^2 \setminus B_N^*$. Um dos seguintes casos podem ocorrer: (Imagem à esquerda) se houver um único aglomerado aberto infinito, então existe um caminho aberto γ ligando a a b , e então os aglomerados fechados em x e y são disjuntos; (Imagem à direita) se houver um único aglomerado fechado infinito, então existe um caminho fechado γ^* ligando x a y , e então os aglomerados abertos infinitos em a e b são disjuntos

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}}(A^c) &= P_{\frac{1}{2}}[(A_N^e \cap A_N^d \cap A_N^{*,c} \cap A_N^{*,b})^c] \\ &= P_{\frac{1}{2}}[(A_N^e)^c \cup (A_N^d)^c \cup (A_N^{*,c})^c \cup (A_N^{*,b})^c] \\ &\leq P_{\frac{1}{2}}[(A_N^e)^c] + P_{\frac{1}{2}}[(A_N^d)^c] + P_{\frac{1}{2}}[(A_N^{*,c})^c] + P_{\frac{1}{2}}[(A_N^{*,b})^c] \\ &\leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é uma propriedade da medida de probabilidade e a segunda é por causa das Equações (4.3) e (4.4). Logo, $P_{\frac{1}{2}}(A) \geq \frac{1}{2}$, o que contradiz a Equação (4.5), e assim concluímos que $\theta(\frac{1}{2}) = 0$. ■

Demonstração. [Lema 5]

Considere os seguintes conjuntos de sítios em \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}_*^2 , respectivamente

$$\begin{aligned}\Lambda_n &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x_1 \leq n+1, 0 \leq x_2 \leq n\} \\ \Lambda_n^* &= \{x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x_1 \leq n, -1 \leq x_2 \leq n\},\end{aligned}$$

os conjuntos de elos em \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}_*^2 , respectivamente

$$G_n = \{(x, \tilde{x}) : x, \tilde{x} \in \Lambda_n, \|x - \tilde{x}\|_1 = 1\},$$

com exceção aos elos $u, v \in \mathbb{Z}^2$, tais que $u_1 = v_1 = 0$ ou $u_1 = v_1 = n+1$, para $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, ou seja, G_n é o conjunto de elos entre vizinhos próximos para sítios em Λ_n ;

$$G_n^* = \{(x^*, \tilde{x}^*) : x^*, \tilde{x}^* \in \Lambda_n^*, \|x^* - \tilde{x}^*\|_1 = 1\},$$

com exceção aos elos $u, v \in \mathbb{Z}_*^2$, tais que $u_2, v_2 = -\frac{1}{2}$ ou $u_2, v_2 = n + \frac{1}{2}$, para $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, ou seja, G_n^* é o conjunto de elos entre vizinhos próximos para sítios em Λ_n^* ; e os subgrafos

$$\begin{aligned}S_n &= \Lambda_n \cup G_n \\ S_n^* &= \Lambda_n^* \cup G_n^*.\end{aligned}$$

Denotamos os eventos A_n : existe um caminho aberto em S_n ligando um vértice do seu lado esquerdo a um vértice do seu lado direito e A_n^* : existe um caminho fechado em S_n^* ligando um vértice do seu lado de baixo a um vértice do seu lado de cima.

Temos que

$$A_n \cap A_n^* = \emptyset, \tag{4.6}$$

pois não pode existir um cruzamento entre um caminho aberto em S_n com um caminho fechado em S_n^* devido a dualidade entre \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}_*^2 .

Por outro lado

$$A_n \cup A_n^* = \Omega, \tag{4.7}$$

isto é, A_n ou A_n^* deve ocorrer e ambos formam uma partição em Ω .

De fato, suponha que A_n não ocorre. Definimos D o conjunto de sítios de S_n que estão conectados a sua face esquerda por um caminho aberto. Por uma variante da Proposição 5, existe um caminho fechado em \mathbb{Z}_*^2 cruzando S_n^* de cima para baixo e que cruza somente um dos elos de \mathbb{Z}^2 contidos na fronteira de D . Desse modo tal caminho será fechado e A_n^* ocorre (veja Figura 4.3).

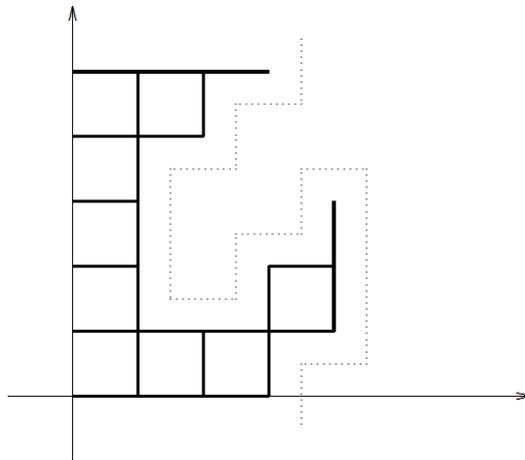


Figura 4.4: Ilustração do fato de que se não há caminhos abertos atravessando S_n da esquerda para a direita, então há um caminho fechado cruzando S_n^* de cima para baixo.

Das Equações (4.6) e (4.7) temos que

$$P_p(A_n) + P_p(A_n^*) = 1. \quad (4.8)$$

Observe que $P_p(A_n^*) = P_{1-p}(A_n)$, visto que S_n^* é isomorfo a S_n e os elos em S_n^* são fechados com probabilidade $1 - p$. Logo

$$P_p(A_n) + P_{1-p}(A_n) = 1,$$

e em particular

$$P_{\frac{1}{2}}(A_n) = \frac{1}{2}, \quad (4.9)$$

para todo n . Veja que o resultado da Equação (4.9) independe do valor de n e não foi utilizado o limite quando n tende ao infinito para obtê-lo.

Suponha por absurdo que $p_c > \frac{1}{2}$. Assim, $p = \frac{1}{2}$ pertence a fase subcrítica onde a probabilidade de um aglomerado que liga a origem até um vértice na linha $L_n = \{(n, k) :$

$k \in \mathbb{Z}$ decai exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, se $p_c > \frac{1}{2}$, então existe $\psi > 0$ tal que

$$P_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0} \leftrightarrow L_n) \leq e^{-n\psi}, \quad (4.10)$$

para todo n , onde na Equação (4.10) utilizamos o Teorema 2. Dessa forma

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}}(A_n) &\leq P_{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{k=0}^n \{(0, k) \leftrightarrow L_n\}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^n P_{\frac{1}{2}}((0, k) \leftrightarrow L_n) \\ &\leq (n+1)e^{-n\psi} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Sendo a primeira desigualdade devido $A_n \subset \bigcup_{k=0}^n \{(0, k) \leftrightarrow L_n\}$, a segunda pela subaditividade da medida de probabilidade e a última por causa da Equação (4.10) e ao fato de somarmos $(n+1)$ vezes um valor constante. Assim, $P_{\frac{1}{2}}(A_n) = 0$ o que é uma contradição com $P_{\frac{1}{2}}(A_n) = \frac{1}{2}$ apresentado na Equação (4.9). Portanto, $p_c \leq \frac{1}{2}$ e, desse modo, provamos o resultado. ■

Comentário: Uma diferença entre os Capítulos 4 e 5 é que no Capítulo 4 consideramos a Percolação em Elos em \mathbb{Z}^2 e provamos primeiro que a probabilidade de encontramos um aglomerado infinito considerando os elos abertos com probabilidade $\frac{1}{2}$ é igual a zero e depois mostramos que o valor do ponto crítico é $\frac{1}{2}$. Enquanto no Capítulo 5 consideramos a Percolação em Lajes em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ e vamos discutir um método que prova a ausência de percolação no ponto crítico independente do verdadeiro valor dele.

Capítulo 5

Ausência de Percolação no Ponto Crítico na Laje

Neste capítulo expomos os resultados do artigo de Damron, Newman e Sidoravicius [9] de 2015. Este artigo trata do caso em que $d = 3$, $N = 2$ e do problema da ausência de Percolação no ponto crítico, ou seja, na fase crítica, considerando o conjunto de vértices definidos em $V = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, conforme a Seção 2.3. A Seção 5.1 é dedicada para a prova do Teorema 8 juntamente com resultados auxiliares. Na Seção 5.2 fazemos uma discussão sobre a construção dos caminhos mais à esquerda que são utilizados nas demonstrações. Ao final comentamos o resultado mais geral que é uma extensão do resultado do Teorema 7. Este resultado foi provado no artigo de Duminil-Copin, Sidoravicius e Tassion em [10] de 2016, isto é, ele demonstra a ausência de percolação na laje com N níveis considerando o modelo Bernoulli.

Teorema 7. *Não existe percolação de sítios no ponto crítico em $G = (V, E)$, com $V = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, isto é,*

$$\theta(p_c) = 0.$$

Para provar o Teorema 7 precisamos dos resultados abaixo.

Teorema 8. *Para $G = (V, E)$, com $V = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para $p \in (0, 1)$, se existe n tal que*

$$P_p(ED(n)) > 1 - \varepsilon, \tag{5.1}$$

então $\theta(p) > 0$.

A prova do Teorema 8 está apresentada na Seção 5.1 que é toda dedicada a esta demonstração juntamente com resultados auxiliares.

Teorema 9. *Na Percolação em Sítios, se $\theta(p) > 0$ e $G = (V, E)$, com $V = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, então*

$$P_p(ED(n)) \rightarrow 1,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração.[Teorema 9]

Este resultado segue direto do já provado na Proposição 4, utilizando o argumento da unicidade do aglomerado infinito, a propriedade sanduíche e a Proposição 6 a seguir. ■

A seguir apresentamos a demonstração para o Teorema 7, utilizando os resultados enunciados nesta Seção.

Demonstração.[Teorema 7]

Seja p tal que $\theta(p) > 0$, então pelo Teorema 9 temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(ED(n)) = 1.$$

Agora fixe ε como no Teorema 8. Assim, pela definição de limite, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$P_p(ED(N)) > 1 - \varepsilon.$$

Pela continuidade da família de medidas $(P_p)_{0 < p < 1}$ com respeito a p , para todo $p' < p$ com p' próximo de p temos que

$$P_{p'}(ED(N)) > 1 - \varepsilon.$$

Portanto, pelo Teorema 8 temos que

$$\theta(p') > 0.$$

Suponha por absurdo que $\theta(p_c) > 0$. Pelo argumento acima existe $p_1 < p_c$ tal que

$$\theta(p_1) > 0.$$

Isto é uma contradição visto que pela Definição 5 temos que para todo $p < p_c$ $\theta(p) = 0$.

Concluimos assim que $\theta(p_c) = 0$. ■

A continuidade citada acima pode ser explicada considerando ν_p uma medida em $\{0, 1\}^{\Gamma_N}$, onde $\Gamma_N = [-N, N] \times [-N, N] \times \{0, 1\}$ e para $E \subset \{0, 1\}^{\Gamma_N}$

$$\max_E |\nu_p(E) - \nu_{p'}(E)| \rightarrow 0,$$

quando $p' \rightarrow p$. Mais explicitamente temos que a medida ν_p é a medida produto em $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}}$ cujas marginais têm distribuição Bernoulli com parâmetro p , ou seja, a medida ν_p é a restrição da medida P_p a Γ_N . Daí,

$$\begin{aligned} \nu_p(E) &= \sum_{\omega \in E} \nu_p(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in E} \prod_{\substack{\omega(x)=1 \\ x \in \Gamma_N}} p \prod_{\substack{\omega(x)=0 \\ x \in \Gamma_N}} (1-p) \\ &= p^{\#\{x \in \Gamma_N : \omega(x)=1\}} (1-p)^{\#\{x \in \Gamma_N : \omega(x)=0\}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Observe que a Equação 5.2 é um polinômio em p o qual é uma função contínua e assim se explica a continuidade da família de medidas $(P_p)_{0 < p < 1}$.

Note que toda a argumentação feita para a apresentação da prova do resultado do Teorema 7 não depende de conhecermos o valor exato de p_c , ou seja, a demonstração é válida independente de qual seja este valor.

5.1 Estimativas tipo RSW e a Prova do Teorema 8

Não conseguimos fazer estimativas de cruzamentos esquerda-direita em quadrados diretamente de forma a obter o Teorema 8. Para a prova deste Teorema usaremos um resultado análogo porém considerando cruzamentos esquerda-direita em retângulos.

Proposição 6. *Para $p \in (0, 1)$, se existe n tal que*

$$P_p(ED(2n, n)) \geq \frac{49}{50}, \tag{5.3}$$

em $G = (V, E)$, com $V = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ então $\theta(p) > 0$.

A demonstração desta proposição é relativamente simples diferentemente da prova do Teorema 8, por mais surpreendente que possa parecer, pois há um favorecimento da geometria do conjunto onde definimos os cruzamentos esquerda-direita. Assim, após provar a Proposição 6 o restante desta seção é dedicado a usá-la para obter o Teorema 8.

Demonstração.[Proposição 6]

Vamos provar por Indução Matemática que para cada $m \geq 1$, temos que

$$P_p(ED(2^{m+1}n, 2^m n)^c) \leq \frac{1}{2^m} P_p(ED(2n, n)^c). \quad (5.4)$$

Caso base: $m = 1$.

Seja $n \geq 1$, fixemos k definimos os eventos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(\{-4k\} \times [-k, k] \times \{0, 1\}) \leftrightarrow (\{0\} \times [-k, k] \times \{0, 1\})\} \\ A_2 &= \{(\{-2k\} \times [-k, k] \times \{0, 1\}) \leftrightarrow (\{2k\} \times [-k, k] \times \{0, 1\})\} \\ A_3 &= \{(\{0\} \times [-k, k] \times \{0, 1\}) \leftrightarrow (\{4k\} \times [-k, k] \times \{0, 1\})\} \\ B_1 &= \{([-2k, 0] \times \{k\} \times \{0, 1\}) \leftrightarrow ([-2k, 0] \times \{-k\} \times \{0, 1\})\} \\ B_2 &= \{([0, 2k] \times \{k\} \times \{0, 1\}) \leftrightarrow ([0, 2k] \times \{-k\} \times \{0, 1\})\}, \end{aligned}$$

veja a Figura 5.1 para uma ilustração desses eventos.

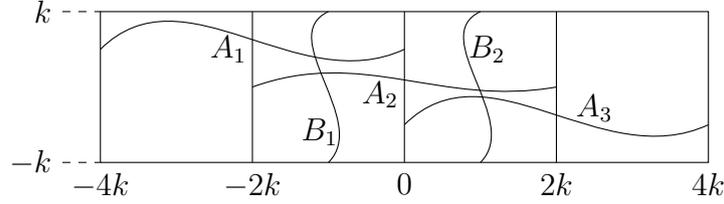


Figura 5.1: Uma representação dos eventos A_1, A_2, A_3, B_1 e B_2 na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 . Interligando esses caminhos garantimos a ocorrência do evento $ED(4k, k)$

Note que os eventos A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 e $ED(4k, k)$ são crescentes e que

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_1 \cap B_2 \subset ED(4k, k). \quad (5.5)$$

Assim utilizando a Desigualdade de FKG (Teorema 4), construindo caminhos que conectam-se e usando a propriedade sanduíche definida na Seção 2.3 obtemos,

$$\begin{aligned} P_p(ED(4k, k)) &\geq P_p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_1 \cap B_2) \\ &\geq P_p(A_1)P_p(A_2)P_p(A_3)P_p(B_1)P_p(B_2) \\ &= (P_p(ED(2k, k)))^3 P_p(B_1)P_p(B_2) \\ &\geq [P_p(ED(2k, k))]^5, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde a primeira desigualdade é devido a Equação (5.5), a segunda é por causa de FKG e a terceira pois $P_p(B_1) \geq P_p(ED(2k, k))$ e $P_p(B_2) \geq P_p(ED(2k, k))$ em virtude do cruzamento no quadrado de lado $2k$ ser “mais fácil” que o cruzamento no retângulo de lados $4k$ por $2k$. A igualdade é porque os eventos A_1, A_2, A_3 caracterizam o mesmo evento, isto é, $ED(2k, k)$, logo $P_p(A_j) = P_p(ED(2k, k))$, para $j = 1, 2, 3$. Da Equação (5.6) obtemos

$$P_p(ED(4k, k))^c \leq 1 - [P_p(ED(2k, k))]^5. \quad (5.7)$$

Pela independência nos elos de retângulos disjuntos,

$$ED(4k, 2k)^c \subset ED(4k, k, (0, k))^c \cap ED(4k, k, (0, -k))^c,$$

sendo $ED(4k, k, (0, k))^c$ e $ED(4k, k, (0, -k))^c$ notações para mostrar que o retângulo de lados $8k$ por $2k$ centrado na origem foi transladado por $(0, k)$ e $(0, -k)$, respectivamente. Veja a Figura 5.2. E pela invariância por translação no modelo de percolação temos que $P_p(ED(4k, k, (0, k))^c) = P_p(ED(4k, k, (0, -k))^c) = P_p(ED(4k, k)^c)$, assim temos que

$$P_p(ED(4k, 2k)^c) \leq [P_p(ED(4k, k)^c)]^2. \quad (5.8)$$

Pelas Equações (5.7) e (5.8) temos que

$$P_p((ED(4k, 2k))^c) \leq [1 - [P_p(ED(2k, k))]^5]^2. \quad (5.9)$$

Para $x \in [0, 1]$, temos que $(1 - x^5)^2 \leq 25(1 - x)^2$, então para $x \in [\frac{49}{50}, 1]$, é válido que $(1 - x^5)^2 \leq \frac{1}{2}(1 - x)$. Substituindo $x = P_p(ED(2k, k))$, vemos que as Equações (5.9) e (5.3) implicam

$$\begin{aligned} P_p((ED(4k, 2k))^c) &\leq \frac{1}{2}[1 - P_p(ED(2k, k))] \\ &= \frac{1}{2}P_p(ED(2k, k)^c). \end{aligned} \quad (5.10)$$

E assim fica provado o caso base.

Na Equação (5.10) substitua $k = 2^{m-1}n$, onde obtemos

$$P_p((ED(2^{m+1}n, 2^m n))^c) \leq \frac{1}{2}P_p(ED(2^m n, 2^{m-1}n)^c). \quad (5.11)$$

Hipótese de Indução:

$$P_p(ED(2^m n, 2^{m-1}n)^c) \leq \frac{1}{2^{m-1}}P_p(ED(2n, n)^c).$$

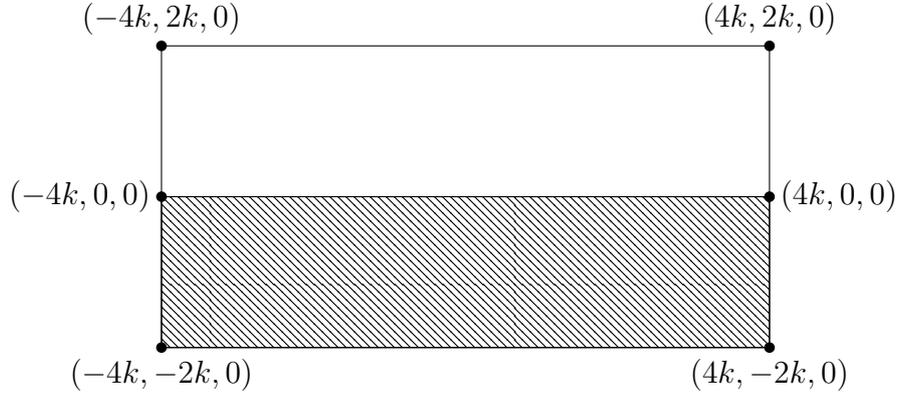


Figura 5.2: O evento $ED(4k, k, (0, k))$ existe um cruzamento da esquerda para a direita na translação por $(0, k)$ do retângulo $B(4k, k)$ de dimensões $8k$ por $2k$, este retângulo transladado por $(0, k)$ é apresentado em branco. O evento $ED(4k, k, (0, -k))$ existe um cruzamento da esquerda para a direita na translação por $(0, -k)$ do retângulo $B(4k, k)$ de dimensões $8k$ por $2k$, este retângulo transladado por $(0, -k)$ é apresentado hachurado

Observe que a Equação (5.11) implica

$$\begin{aligned}
 P_p(ED(2^{m+1}n, 2^m n)^c) &\leq \frac{1}{2} P_p(ED(2^m n, 2^{m-1} n)^c) \\
 &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{m-1}} (P_p(ED(2n, n)^c)) \\
 &= \frac{1}{2^m} (P_p(ED(2n, n)^c)),
 \end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade foi utilizada a Hipótese de Indução. E assim concluímos a prova por indução.

Agora que temos a Equação 5.4 podemos concluir a prova da Proposição 6. Considere o paralelepípedo $B_0 = [0, 2n] \times [0, n] \times \{0, 1\}$ e para $k \geq 1$,

$$B_k = \begin{cases} [0, 2^k n] \times [0, 2^{k+1} n] \times \{0, 1\}, & \text{para } k \text{ ímpar} \\ [0, 2^{k+1} n] \times [0, 2^k n] \times \{0, 1\}, & \text{para } k \text{ par.} \end{cases}$$

Para $k \geq 0$ e k ímpar, defina o evento E_k em B_k

$$E_k = \{([0, 2^k n] \times \{0\} \times \{0, 1\}) \leftrightarrow ([0, 2^k n] \times \{2^{k+1} n\} \times \{0, 1\})\},$$

isto é, existe um aglomerado aberto que liga um sítio da face da frente de B_k a um sítio da face de trás de B_k . E para k par, defina o evento E_k em B_k

$$E_k = \{(\{0\} \times [0, 2^k n] \times \{0, 1\}) \leftrightarrow (\{2^{k+1} n\} \times [0, 2^k n] \times \{0, 1\})\},$$

ou seja, existe um aglomerado aberto que liga um sítio da face esquerda de B_k a um sítio da face direita de B_k , veja Figura 5.3 para ver esses eventos.

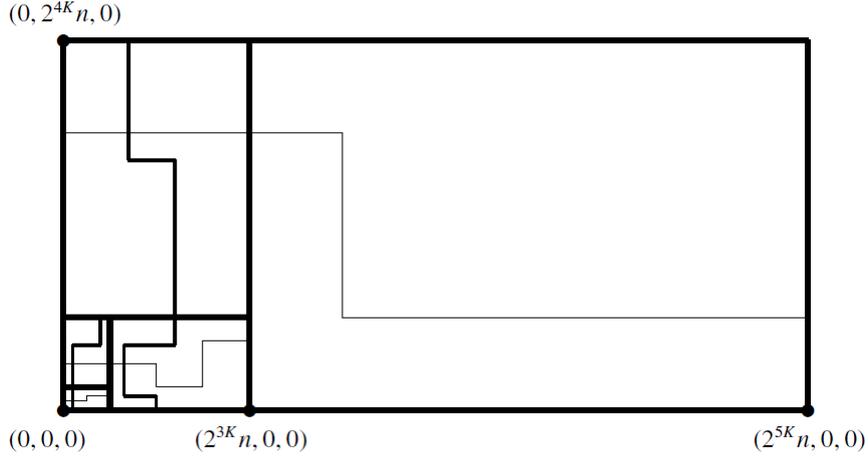


Figura 5.3: Representação dos eventos E_k , para k par e ímpar

Como $P_p(E_k^c)$ decai exponencialmente em k pela Equação (5.4), isto é,

$$P_p(E_k^c) \leq \frac{1}{2^k} P_p(ED(2n, n)^c),$$

assim, calculando as séries infinitas

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_p(E_k^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} P_p(ED(2n, n)^c) < \infty,$$

então pelo Lema de Borel-Cantelli,

$$P_p(E_k^c \text{ i. v.}) = 0.$$

Logo,

$$P_p(E_k \text{ ocorre para todo } k \text{ suficientemente grande}) = 1.$$

Daí, pela propriedade sanduíche definida na Seção 2.3, se E_k ocorre para todo $k > k_0$, k_0 par, obtemos um aglomerado aberto infinito usando os cruzamentos de baixo para cima e da esquerda para direita nas caixas B_k que necessariamente se intersectam, logo

$$P_p(\text{Existe um aglomerado infinito}) = 1.$$

Assim, $\theta(p) > 0$.

■

Lembrando que o objetivo desta Seção é provar o Teorema 8, ou seja, se existe $\varepsilon > 0$ tal que a probabilidade de encontrarmos um cruzamento esquerda-direita em uma caixa em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ é tão próxima de 1, então o sistema percola. Temos duas dificuldades principais que distingue o caso no plano \mathbb{Z}^2 com o caso na laje $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, na qual utilizamos a propriedade sanduíche.

Primeira, quando tentamos encontrar conexões entre caminhos na laje, não é suficiente que suas projeções em \mathbb{Z}^2 se conectem. De fato, as projeções de dois sítios não adjacentes na laje, usando a propriedade sanduíche podemos encontrar que suas projeções sejam adjacentes em \mathbb{Z}^2 . Por esta razão vamos “forçar” essas conexões supondo percolação e garantindo o cruzamento esquerda-direita em paralelepípedos na laje de tal forma que a probabilidade desses cruzamentos dependam de uma constante (Proposição 7). Porém isto nos leva ao segundo problema pois com esta dependência da constante dificulta a convergência dessa probabilidade de cruzamento para 1 (Proposição 8).

Proposição 7 (Cota fraca de RSW). *Suponha que $\theta(p) > 0$. Então existe $c_0 > 0$ tal que para todo n ,*

$$P_p(ED(2n, n)) \geq c_0.$$

Demonstração.[Proposição 7]

Considere as seguintes caixas

$$\begin{aligned} S_1 &= [0, n] \times [0, n] \times \{0, 1\} \\ S_2 &= \left[\frac{n}{2}, \frac{3n}{2} \right] \times [0, n] \times \{0, 1\} \\ S_3 &= \left[\frac{n}{2}, n \right] \times \left[0, \frac{n}{2} \right] \times \{0, 1\}. \end{aligned}$$

A Figura 5.4 abaixo mostra somente as caixas S_1, S_2 e S_3 na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 .

Vamos denotar respectivamente os lados esquerdo, direito, de cima e de baixo de S_1 por

$$\begin{aligned} L_1 &= \{0\} \times [0, n] \times \{0, 1\}, \\ R_1 &= \{n\} \times [0, n] \times \{0, 1\}, \\ T_1 &= [0, n] \times \{n\} \times \{0, 1\}, \\ B_1 &= [0, n] \times \{0\} \times \{0, 1\}. \end{aligned}$$

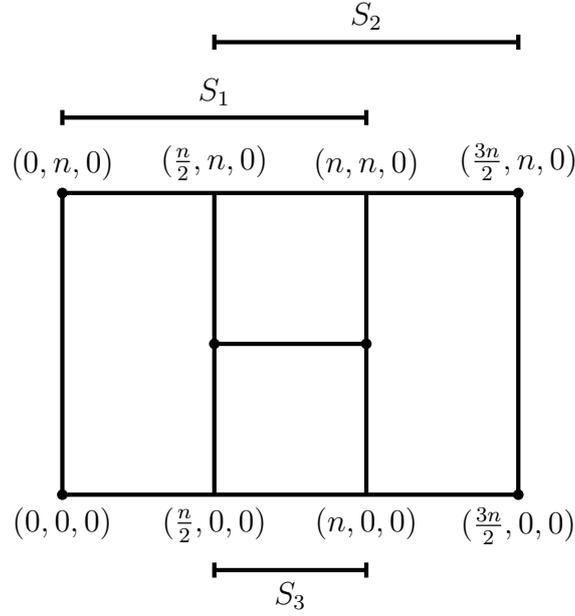


Figura 5.4: Representação das caixas S_1, S_2 e S_3 na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2

Similarmente definimos L_i, R_i, T_i e B_i , para $i = 2, 3$. Veja a Figura 5.5 para uma ilustração destas definições.

Definimos F_n o evento em que existe um aglomerado aberto que ligue T_3 a B_3 conectado por um caminho aberto até R_2 ; G_n o evento em que existe um aglomerado aberto que ligue T_3 a B_3 conectado por um caminho aberto até L_1 ; H_n o evento em que existe um aglomerado aberto que ligue L_3 a R_3 . Veja as Figuras 5.6, 5.7, 5.8 para uma representação destes eventos.

Considere também os eventos

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left\{ (\{0\} \times [0, 2n] \times \{0, 1\}) \leftrightarrow \left(\left\{ \frac{3n}{2} \right\} \times [0, 2n] \times \{0, 1\} \right) \right\} \\
 A_2 &= \left\{ (\{n\} \times [0, 2n] \times \{0, 1\}) \leftrightarrow (\{4n\} \times [0, 2n] \times \{0, 1\}) \right\} \\
 B_1 &= \left\{ \left(\left[2n, \frac{3n}{2} \right] \times \{0\} \times \{0, 1\} \right) \leftrightarrow \left(\left[2n, \frac{3n}{2} \right] \times \{2n\} \times \{0, 1\} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Note que $P_p(A_1) = P_p(A_2) = P_p(ED(\frac{3n}{2}, n))$, pela invariância no modelo de percolação. Veja a Figura 5.9 para uma representação dos eventos A_1, A_2 e B_1 .

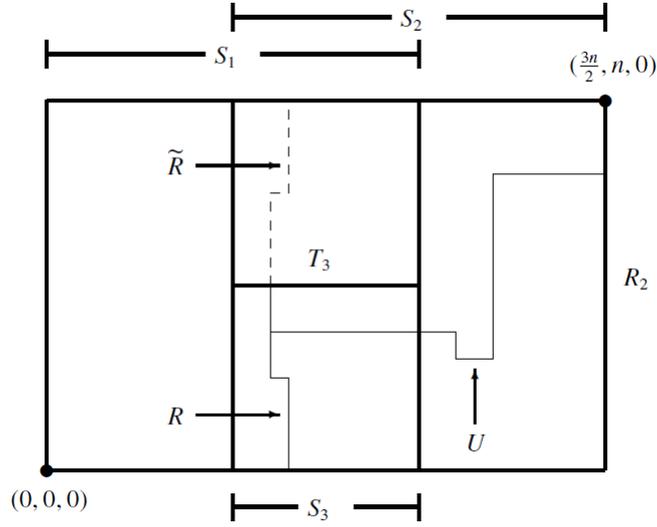


Figura 5.5: Representação das caixas S_1, S_2 e S_3 na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 , da fita mais à esquerda R e de sua reflexão em torno de T_3 denotada por \tilde{R} . A fita U mais abaixo também é representada. As definições dos lados das caixas L_i, R_i, T_i e B_i , para $i = 1, 2, 3$. Na figura somente o lado direito R_2 da caixa S_2 e o lado de cima T_3 da caixa S_3 estão representados

Observe que $ED(2n, n) \supset (A_1 \cap A_2 \cap B_1)$, logo,

$$\begin{aligned}
P_p(ED(2n, n)) &\geq P_p(A_1 \cap A_2 \cap B_1) \\
&\geq P_p(A_1)P_p(A_2)P_p(B_1) \\
&= \left[P_p \left(ED \left(\frac{3n}{2}, n \right) \right) \right]^2 P_p(B_1) \\
&\geq \left[P_p \left(ED \left(\frac{3n}{2}, n \right) \right) \right]^3, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é por FKG e a última é porque é “mais difícil” ocorrer o evento $ED(\frac{3n}{2}, n)$ do que o evento B_1 devido as dimensões das caixas onde estão definidos, isto é, $B_1 \supset ED(\frac{3n}{2}, n)$.

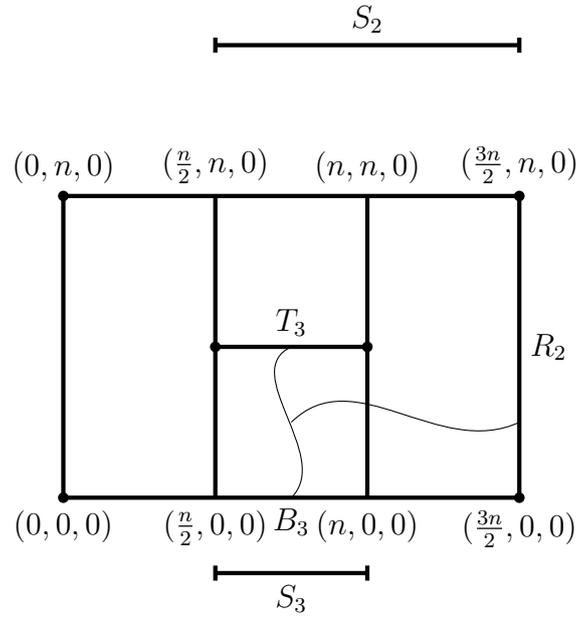


Figura 5.6: Uma representação do evento F_n

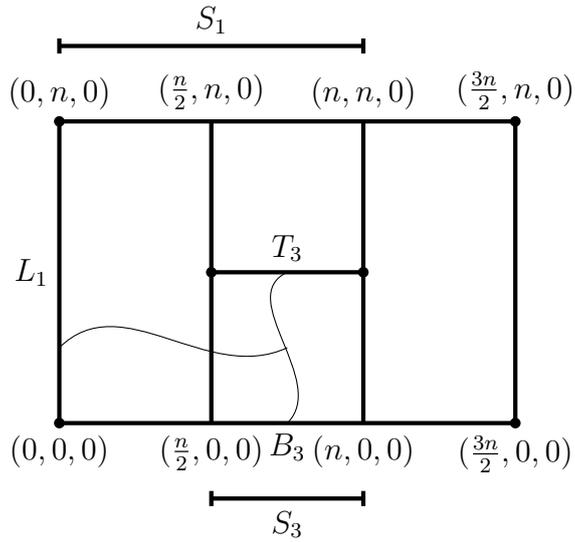


Figura 5.7: Uma representação do evento G_n

Veja que $ED\left(\frac{3n}{2}, n\right) \supset (F_n \cap G_n \cap H_n)$, e pela propriedade sanduíche temos que

$$\begin{aligned}
 P_p\left(ED\left(\frac{3n}{2}, n\right)\right) &\geq P_p(F_n \cap G_n \cap H_n) \\
 &\geq P_p(F_n)P_p(G_n)P_p(H_n) \\
 &= [P_p(F_n)]^2 P_p(H_n) \\
 &= {}^5 [P_p(F_n)]^2 P_p\left(ED\left(\frac{n}{2}\right)\right),
 \end{aligned}$$

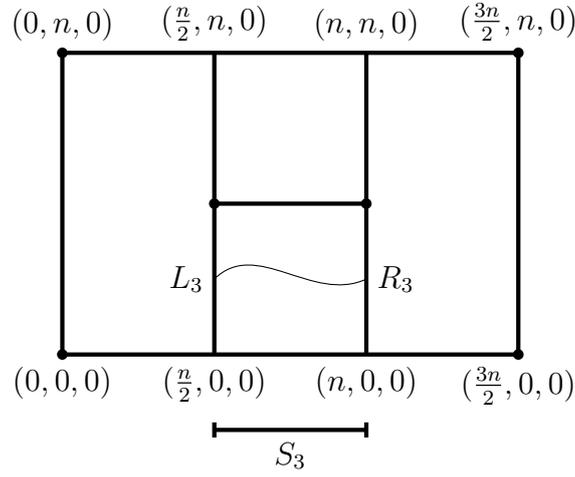


Figura 5.8: Uma representação do evento H_n

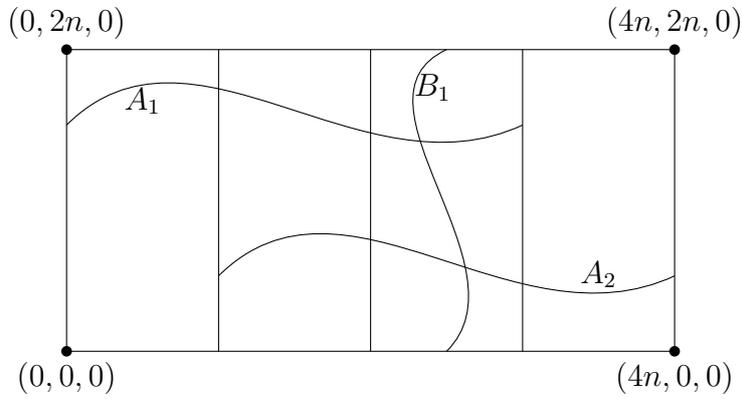


Figura 5.9: Representação da caixa de dimensões $4n$ por $2n$ na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 . Os eventos A_1 , A_2 e B_1 estão ilustrados também na projeção

onde a segunda desigualdade é por FKG, a primeira e segunda igualdades é em virtude da invariância por translação do modelo de percolação e porque $P_p(F_n) = P_p(G_n)$ e $P_p(H_n) = P_p(ED(\frac{n}{2}))$. Agora precisamos de uma estimativa para $P_p(F_n)$. Mostraremos mais adiante no Lema 6 que $P_p(F_n) \geq \frac{p^4}{4}$. Vamos por ora utilizar este resultado. Assim, obtemos que a

$$\begin{aligned}
 P_p \left(ED \left(\frac{3n}{2}, n \right) \right) &\geq \frac{p^8}{16} P_p \left(ED \left(\frac{n}{2} \right) \right) \\
 &\geq \frac{p^8}{32},
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde a primeira desigualdade é devido ao Lema 6 e a segunda por causa do Teorema 9, para todo n suficientemente grande.

Combinando as Equações (5.12) e (5.13) temos que para n grande

$$P_p(ED(2n, n)) \geq \frac{p^{24}}{32768} = c_1.$$

Assim, existe N tal que a cota inferior vale $\forall n \geq N$ e escolhemos a constante c_0 de modo que

$$c_0 = \min \left\{ c_1, \left(\min_{1 \leq n \leq N-1} \{P_p(ED(2n, n))\} \right) \right\}.$$

■

Lema 6. *Suponha que $\theta(p) > 0$. Para n grande,*

$$P_p(F_n) \geq \frac{p^4}{4}.$$

Demonstração.[Lema 6]

Começamos buscando uma representação adequada para F_n e precisamos introduzir várias notações novas.

Seja TD um cruzamento de cima a baixo na caixa S_3 que toca uma vez somente T_3 e B_3 . Defina a projeção $\pi : G_N \rightarrow \mathbb{Z}^2$, com $G_N = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ e $\pi(x, y, z) = (x, y)$ e para cada subconjunto $X \subset G_N$ temos $\pi(X) = \{\pi(\nu) : \nu \in X\}$. Vamos associar também uma fita: $R(X) = \{\nu \in G_N : \pi(\nu) \in \pi(X)\}$.

Para a fita R de um caminho cruzando de cima para baixo em S_3 , associamos a região em S_3 à esquerda de R . Esta é uma região de S_3 (vista como um subconjunto de \mathbb{R}^3) que não contém nenhum sítio de R e que pode ser conectada ao lado direito de S_3 por um caminho sem interceptar R . Iremos denotar a região à esquerda de R por $L(R)$ e $D(R)$ será o evento em que a fita R é a mais à esquerda. A seguir apresentamos duas propriedades desta construção que seguem da Proposição 10 a qual é apresentada mais adiante.

1. Defina A_n o evento em que existe um caminho aberto autoevitável de cima a baixo em S_3 que pode ser representado como união disjunta $\bigcup_R D(R)$ sobre todas as possíveis fitas autoevitáveis com cruzamento de cima a baixo de S_3 .
2. Para cada R , o evento $D(R)$ depende somente do estado dos vértices na região $\bar{L}(R) = R \cup L(R)$.

Qualquer (não necessariamente o único) cruzamento TD na fita mais à esquerda nós chamamos de caminho mais à esquerda.

Vamos decompor A_n sobre os eventos $D(R)$ para um dado n

$$P_p(A_n) = \sum_R P_p(D(R)), \quad (5.14)$$

onde a soma é sobre todas as possíveis fitas atravessando S_3 de cima a baixo. Denotamos a reflexão da fita R em relação a T_3 por

$$\tilde{R} = \{(x, y, z) : (x, n - y, z) \in R\}.$$

Defina $G(R)$ a região em S_2 estritamente à direita de $R \cup \tilde{R}$, isto é, $G(R)$ é o conjunto de vértices que podem ser conectados por caminhos abertos a ambos $R \cup \tilde{R}$ e R_2 . Considere também $C(R)$ o evento que existe um caminho aberto em S_2 que conecta o lado direito R_2 a fita $R \cup \tilde{R}$. Assim, $C(R)$ é independente de $D(R)$. Então

$$P_p(D(R), C(R)) = P_p(D(R))P_p(C(R)) \geq P_p(D(R))P_p(ED(n)),$$

pois $C(R) \supset ED(n)$, e visto que é maior a probabilidade de atravessar o quadrado de lado $2n$ da fita R até o seu lado direito do que atravessá-lo por completo da esquerda para a direita.

Definimos $C_1(R)$ o evento existe um caminho aberto em $G(R)$ que conecta o lado direito R_2 à fita R e $C_2(R)$ o evento existe um caminho aberto em $G(R)$ que conecta o lado direito R_2 à fita \tilde{R} . Pela simetria e invariância no modelo de percolação, para um R fixo, ambos os eventos $C_1(R)$ e $C_2(R)$ tem a mesma probabilidade. Como eles são eventos crescentes,

$$\begin{aligned} P_p(ED(n)) &\leq P_p(C(R)) \\ 1 - P_p(ED(n)) &\geq 1 - P_p(C(R)) \\ &= P_p(C(R)^c) \\ &= P_p(C_1(R)^c \cap C_2(R)^c) \\ &\geq [P_p(C_1(R)^c)]^2, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é por FKG e pelo fato de que $P_p(C_1(R)) = P_p(C_2(R))$. Então

$$\begin{aligned} P_p(C_1(R)) &\leq \sqrt{1 - P_p(ED(n))} \\ 1 - P_p(C_1(R)) &\leq \sqrt{1 - P_p(ED(n))} \\ P_p(C_1(R)) &\geq 1 - \sqrt{1 - P_p(ED(n))} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

sendo a última desigualdade devido ao Teorema 9 para n suficientemente grande.

Portanto, para n grande,

$$\sum_R P_p(D(R), C_1(R)) = \sum_R P_p(D(R))P_p(C_1(R)) \geq \frac{1}{2}P_p(A_n) \geq \frac{1}{4}, \quad (5.16)$$

onde a igualdade é da independência entre $D(R)$ e $C(R)$, e conseqüentemente $C_1(R)$, a primeira desigualdade é pelas Equações (5.14) e (5.15) e a segunda também é devida ao Teorema 9.

Se o grafo fosse \mathbb{Z}^2 , a demonstração estaria completa porque $D(R) \cap C_1(R)$ implicaria F_n . Entretanto, em G_N , o caminho usado no evento $C_1(R)$ não necessariamente tem que encontrar um cruzamento aberto de cima a baixo em S_3 contendo R . Para corrigir isso, nós precisamos encaixar caminhos usando sítios abertos. Para tal, utilizaremos alguns eventos independentes. Considere a região $G(R)$ à direita de $R \cup \tilde{R}$. Definimos analogamente como antes o cruzamento aberto mais abaixo da esquerda para direita TD em $G(R)$ e o evento $R(TD)$ como sendo o único cruzamento da esquerda para a direita mais abaixo em $G(R)$. Vamos dividir o evento $D(R) \cap C_1(R)$ de acordo com a fita associada ao cruzamento mais baixo: para qualquer cruzamento aberto da esquerda para a direita U em $G(R)$ denotaremos por $D(R, U)$ o evento que U é a mais baixa das fitas. De novo, distinguiremos U_1 e U_2 , o primeiro como sendo o evento que existe um caminho aberto em $G(R)$ que conecta o lado direito R_2 à fita R e o segundo como o evento que existe um caminho aberto em $G(R)$ que conecta o lado direito R_2 à fita \tilde{R} . Os eventos $D(R, U_1)$ e $D(R, U_2)$ são disjuntos, sendo o primeiro é a fita U_1 mais baixa que conecta R a R_2 e o segundo é a fita U_2 mais baixa que conecta \tilde{R} a R_2 . Portanto temos que

$$P_p(D(R), C_1(R)) = \sum_U P_p(D(R), D(R, U)), \quad (5.17)$$

onde a soma é sobre todas as fitas possíveis U que cruzam a região $G(R)$ conectando o lado direito R_2 à fita R . Para tais R e U , considere a região de $G(R)$ acima de U e incluindo \tilde{R} a qual denotaremos por $G(R, U)$. Note que os eventos $D(R)$ e $D(R, U)$ tem as configurações dos vértices independentes na região $G(R, U)$.

Podemos encontrar um caminho determinístico $\gamma(R, U)$ em $G(R, U)$ com pelos menos 2 vértices sendo um deles vizinho de R e o outro de U . Defina $A(R, U)$ o evento que todos os vértices do caminho $\gamma(R, U)$ são abertos; este evento cria uma pequena conexão entre as fitas R e U e portanto $D(R) \cap D(R, U) \cap A(R, U)$ implica ocorrência de F_n . É importante ressaltar que o caminho $\gamma(R, U)$ seja determinístico e fique inteiramente na

região $G(R, U)$ – o primeiro fato nos permite dar um limite inferior a

$$P_p(A(R, U)) \geq p^4 \quad (5.18)$$

e o segundo nos permite separar o estado das outras fitas. Assim,

$$P_p(F_n) \geq \sum_R \sum_U P_p(D(R) \cap D(R, U) \cap A(R, U)),$$

pois $F_n \supset \bigcup_R \bigcup_U D(R) \cap D(R, U) \cap A(R, U)$.

$$P_p(F_n) \geq \sum_R \sum_U P_p(D(R), D(R, U)) P_p(A(R, U)),$$

pela desigualdade de FKG.

$$\begin{aligned} P_p(F_n) &\geq p^4 \sum_R \sum_U P_p(D(R), D(R, U)) \\ &= p^4 \sum_R P_p(D(R), C_1(R)), \end{aligned}$$

onde a desigualdade é devida a Desigualdade (5.18) e a igualdade pela Equação (5.17). Assim, pela Desigualdade (5.16) temos que

$$P_p(F_n) \geq \frac{p^4}{4}.$$

■

Para o Corolário 2 abaixo utilizamos a notação $Ann(m, n)$ o anel com raio interno igual a m e raio externo de tamanho n , isto é, $Ann(m, n) = B(n) \setminus B(m)$, sendo $B(m) = [-m, m]^2 \times \{0, 1\}$. Veja na Figura 5.10 a seguir uma representação destes elementos.

Corolário 2. *Para cada n , defina \mathcal{A}_n o evento existe um circuito aberto ao redor da origem em $Ann(n, 2n)$. Suponha que $\theta(p) > 0$. Então existe $c_2 > 0$ tal que para todo n ,*

$$P_p(\mathcal{A}_n) \geq c_2.$$

Demonstração.[Corolário 2] A prova é um argumento padrão de conexão de caminhos já utilizado na demonstração da Proposição 7. ■

Proposição 8 (Cota forte de RSW). *Suponha que $\theta(p) > 0$. Então*

$$P_p(ED(2n, n)) \rightarrow 1, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

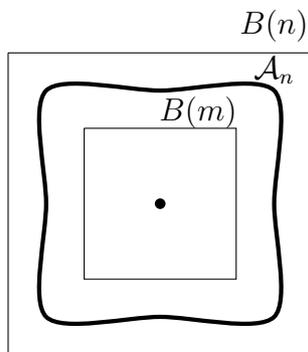


Figura 5.10: Representação do anel $Ann(m, n) = B(n) \setminus B(m)$ e do circuito aberto ao redor da origem \mathcal{A}_n na projeção de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 . O ponto no centro da figura é a origem

Demonstração.[Proposição 8]

Pela Desigualdade (5.12) é suficiente mostrar que o limite da probabilidade $P_p(ED(\frac{3n}{2}, n))$ é igual a um. Defina S_1, S_2 e S_3 como na prova da Proposição 7. Note que pela Desigualdade (5.13) e o Teorema 9, para provar a Equação (5.19) basta mostrar que $P_p(F_n) \rightarrow 1$, onde F_n é o evento existe um aglomerado aberto de cima a baixo em S_3 conectado em S_2 por um caminho aberto ao lado direito R_2 de S_2 . Para mostrar isto, vamos fazer a mesma decomposição como usada no Lema 6. Relembre as definições de $R, \tilde{R}, A_n, U, C(R), C_1(R), D(R)$ e $G(R)$ apresentadas no Lema 6.

A partir daqui ainda precisamos introduzir uma nova notação. Assim, vamos dividir a fita R em dois pedaços, o de cima e o de baixo

$$R_B = R \cap \left[\frac{n}{2}, n\right] \times \left[0, \frac{n}{4}\right] \times \{0, 1\}$$

$$R_T = R \cap \left[\frac{n}{2}, n\right] \times \left[\frac{n}{4}, \frac{n}{2}\right] \times \{0, 1\}.$$

Considere o evento $C_1(R_T)$ existe um caminho aberto em $G(R)$ que conecta o lado direito R_2 ao pedaço R_T e o evento $C_1(R_B)$ existe um caminho em $G(R)$ que conecta o lado direito R_2 ao pedaço R_B . Note que

$$C_1(R) = C_1(R_T) \cup C_1(R_B)$$

e equivalentemente

$$C_1(R)^c = C_1(R_T)^c \cap C_1(R_B)^c,$$

assim, como $C_1(R_T)$ e $C_1(R_B)$ são eventos crescentes então pela desigualdade de FKG

temos que

$$P_p(C_1(R_T)^c) P_p(C_1(R_B)^c) \leq P_p(C_1(R)^c). \quad (5.20)$$

Pela Equação (5.15) temos que

$$P_p(C_1(R_T)^c) P_p(C_1(R_B)^c) \leq \sqrt{1 - P_p(ED(n))}. \quad (5.21)$$

Observe que da Equação (5.21) obtemos

$$\min\{P_p(C_1(R_T)^c), P_p(C_1(R_B)^c)\} \leq (1 - P_p(ED(n)))^{\frac{1}{4}}.$$

Equivalentemente,

$$\max\{P_p(C_1(R_T)), P_p(C_1(R_B))\} \geq 1 - (1 - P_p(ED(n)))^{\frac{1}{4}}. \quad (5.22)$$

Vamos supor que o máximo na Equação (5.22) seja $P_p(C_1(R_B))$. Caso não seja, basta substituir nos argumentos seguintes o caminho aberto mais abaixo conectando R_2 ao R_B por caminho aberto mais acima conectando R_2 ao R_T . Vamos escrever $C_1(R_B)$ como a união disjunta de eventos do tipo $D(R, U)$ como anteriormente, porém, neste caso, utilizando somente as fitas U em $G(R)$ que estão conectando o lado direito R_2 ao pedaço da fita R_B

$$P_p(C_1(R_B)) = \sum_U P_p(D(R, U)).$$

Dependendo da configuração de R e U escolhemos um vértice determinístico ν cuja distância a ambos R e U seja de no máximo 2 unidades (veja Figura 5.11). Considere os anéis centrados em ν denotados por $Ann_1, Ann_2, \dots, Ann_k$, para $k = \lfloor \frac{1}{2} \ln(n) \rfloor$

$$Ann_j = B(\nu; 2^{j+1}) \setminus B(\nu; 2^j),$$

onde $B(\nu; l)$ é a caixa $[-l, l]^2 \times \{0, 1\}$ transladada para ter seu centro em ν .

Considere $\tilde{G}(R, U)$ a região de S_2 acima de U e à direita de $R \cup \tilde{R}$. Denotamos $H_j(R, U)$ o evento existe um caminho aberto em $Ann_j \cap \tilde{G}(R, U)$ que contém os vértices $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_1, y_1, 1)$ adjacentes a R e os vértices $(x_2, y_2, 0)$ e $(x_2, y_2, 1)$ adjacentes a U .

Afirmção 1. *Existe $c > 0$ tal que para todo j, n e escolhas de R e U ,*

$$P_p(H_j(R, U)) \geq c. \quad (5.23)$$

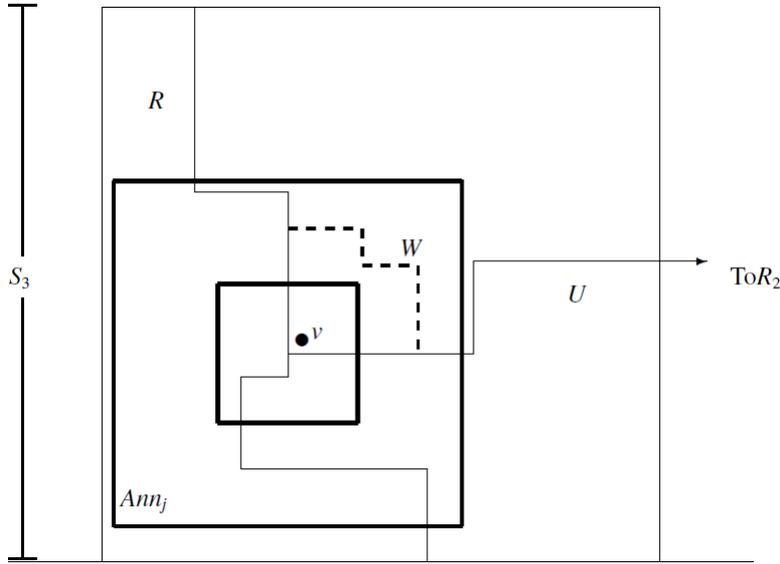


Figura 5.11: Representação dos anéis Ann_j

Note que para qualquer j , a ocorrência de $H_j(R, U) \cap D(R, U) \cap D(R)$ implica ocorrência de F_n . Portanto,

$$\begin{aligned}
P_p(F_n) &\geq \sum_R \sum_U P_p(D(R), D(R, U), F_n) \\
&\geq \sum_R \sum_U P_p(D(R), D(R, U), H_j(R, U) \text{ ocorre para algum } j) \\
&\geq \left[1 - c^{\frac{1}{4} \ln(n)}\right] \sum_R \sum_U P_p(D(R), D(R, U)) \\
&= \left[1 - c^{\frac{1}{4} \ln(n)}\right] \sum_R P_p(D(R)) P_p(C_1(R_L)) \\
&\geq \left[1 - c^{\frac{1}{4} \ln(n)}\right] \left[1 - \sqrt[4]{1 - P_p(ED(n))}\right] P_p(ED(n)),
\end{aligned}$$

sendo a primeira desigualdade por causa de $F_n \supset \bigcup_R \bigcup_U (D(R) \cap D(R, U) \cap F_n)$, a segunda devido a $F_n \supset (D(R) \cap D(R, U) \cap H_j(R, U))$ para algum j , a terceira ao fato da independência dos H_j 's e a igualdade usa a independência entre $D(R)$ e $D(R, U)$. A última expressão converge a 1 quando $n \rightarrow \infty$ pelo Teorema 9 e portanto

$$P_p(F_n) \rightarrow 1.$$

■

Demonstração.[Afirmção 1] Qualquer caminho em $Ann_j \cap \tilde{G}(R, U)$ que contém um vértice adjacente a R e um adjacente a U chamaremos de um quarto do circuito. Assim como no caso de um caminho aberto mais à esquerda em uma caixa, nós podemos definir uma única fita mais no interior. Denotamos $In(R, U, W)$ o evento em que W é tal fita mais no interior em $Ann_j \cap \tilde{G}(R, U)$ (veja Figura 5.11). Vamos denotar como antes W_1 e W_2 , e os eventos $In(R, U, W_1)$ e $In(R, U, W_2)$ são disjuntos. Além disso o evento $In(R, U, W)$ depende somente dos estados de configuração dos vértices em W ou em seu “interior”. Neste evento podemos identificar caminhos determinísticos $\gamma_1(R, U, W)$ e $\gamma_2(R, U, W)$ no “exterior” de W tal que o primeiro caminho contenha um vértice adjacente a W e um adjacente a R , e o segundo caminho contenha um vértice adjacente a W e um adjacente a U , e ambos os caminhos tem tamanho até igual a 2 unidades. Considere $J(R, U, W)$ o evento todos os sítios dos caminhos $\gamma_1(R, U, W)$ e $\gamma_2(R, U, W)$ são abertos. Note que $J(R, U, W)$ implica evento $H_j(R, U)$. Portanto

$$\begin{aligned}
P_p(H_j(R, U)) &= \sum_W P_p(In(R, U, W)) \\
&\geq \sum_W P_p(In(R, U, W), J(R, U, W)) \\
&\geq p^8 \sum_W P_p(In(R, U, W)) \\
&\geq p^8 P_p(C_j),
\end{aligned}$$

onde C_j é o evento existe um circuito aberto em torno de ν no anel Ann_j . Mas esta probabilidade é limitada inferiormente e uniformemente por uma constante $c_2 > 0$ pelo Corolário 2. ■

5.2 Construção do caminho mais à esquerda

Nesta Seção expomos as ideias para a construção da fita R mais à esquerda, que é única, obtida a partir da projeção dos caminhos de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ em \mathbb{Z}^2 , porém o caminho em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ associado a esta fita R pode não ser único.

Seja $\gamma = (v_0, \dots, v_k)$ um caminho em $B(n) = [0, n]^2 \times \{0, 1\}$. γ é um caminho (ou cruzamento) de cima para baixo em $B(n)$ se v_0 é um sítio da face de cima de $B(n)$ denotada por $[0, n] \times \{n\} \times \{0, 1\}$, v_k é um sítio da face de baixo de $B(n)$ denotada por

$[0, n] \times \{0\} \times \{0, 1\}$ e nenhum outro vértice de γ está nas faces de cima e de baixo de $B(n)$.

Da definição de caminho autoevitável apresentada na Seção 2.4 definimos que o caminho γ é *fortemente autoevitável* se $\pi(v_i) = \pi(v_j)$ implicar $|i - j| \leq 1$, sendo $\pi(\cdot)$ a projeção definida na demonstração do Lema 6. Note que se γ é um caminho fortemente autoevitável então ele também será autoevitável.

O Lema 7 abaixo é uma consequência importante da propriedade sanduíche. Este lema garante a existência de um caminho fortemente autoevitável que ligue $B(n)$ de cima para baixo dado que exista um caminho qualquer que ligue $B(n)$ de cima para baixo.

Lema 7. *Se existe um caminho aberto com cruzamento de cima para baixo de $B(n)$ em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, dada uma configuração ω , então existe um caminho aberto com cruzamento de cima para baixo de $B(n)$ o qual é fortemente autoevitável.*

Vamos dar uma ideia da prova do Lema 7. A partir de um caminho γ qualquer com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$ conseguimos retirar seus *loops*, caso existam, para torná-lo fortemente autoevitável.

Considere a partir de agora somente os caminhos γ fortemente autoevitáveis com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$. E para cada γ associamos as suas projeções $\pi(\gamma)$ no subconjunto $\pi(B(n))$, ou seja, $\pi(\gamma) = (\pi(v_0), \dots, \pi(v_k))$. Note que $\pi(\gamma)$ em $\pi(B(n))$ pode não ser um caminho, tendo assim vértices duplicados (que na projeção coincidem). Porém conseguimos remover estes vértices duplicados de forma a obter um caminho $\tilde{\pi}(\gamma)$ que é autoevitável em $\pi(B(n))$. Seja $\mathbf{C}(n)$ o conjunto dos caminhos abertos autoevitáveis com cruzamento de cima para baixo em $\pi(B(n))$.

Para qualquer caminho $\tilde{\gamma} \in \mathbf{C}(n)$ consideramos o caminho contínuo em \mathbb{R}^2 obtido a partir de conexões de vértices sucessivos. Fazemos isto para obtermos a curva de Jordan a partir do caminho $\tilde{\gamma}$, denotada por $C_{\tilde{\gamma}}$, que consiste em uma curva contínua fechada. Veja a Figura 5.12 abaixo. Pelo Teorema da curva de Jordan, o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus C_{\tilde{\gamma}}$ é composto de duas partes: uma limitada (o interior da curva) e uma ilimitada (o exterior da curva). Vamos denotar $L(\tilde{\gamma})$ a parte limitada da curva de Jordan construída a partir do caminho $\tilde{\gamma}$.

Vamos definir agora o caminho mais à esquerda. Seja o caminho $\tilde{\gamma} \in \mathbf{C}(n)$ qualquer, denotamos $D(\tilde{\gamma})$ o evento onde as duas condições seguintes são verdadeiras:

- i) Existe um caminho γ fortemente autoevitável com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$ tal que $\pi(\gamma) = \tilde{\gamma}$.

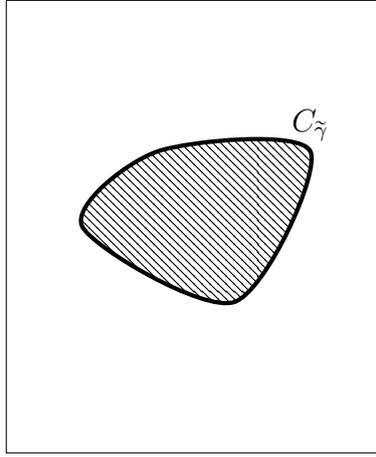


Figura 5.12: Representação da curva de Jordan $C_{\tilde{\gamma}}$ (curva em negrito) em \mathbb{R}^2 . A parte hachurada é o interior da curva e a parte em branco é o exterior

- ii) Não existe nenhum caminho τ fortemente autoevitável com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$ tal que a região à esquerda $L(\pi(\tau))$ é estritamente contida em $L(\tilde{\gamma})$.

Proposição 9. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. O evento $\Xi_n = \{\text{existe um caminho com cruzamento de cima para baixo em } B(n)\}$ é a união disjunta sobre todos os caminhos abertos autoevitáveis com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$, isto é, $\bigcup_{\tilde{\gamma} \in \mathbf{C}(n)} D(\tilde{\gamma})$.
2. Para cada caminho $\tilde{\gamma} \in \mathbf{C}(n)$, o evento $D(\tilde{\gamma})$ depende somente do estado dos vértices na região

$$X(\tilde{\gamma}) = \pi^{-1}(\{u : u \text{ é um vértice de } \tilde{\gamma}\} \cup \{u : u \in L(\tilde{\gamma})\}),$$

ou seja, $X(\tilde{\gamma})$ é o conjunto de vértices que são projetados em $\tilde{\gamma}$ (caminho autoevitável) ou são os vértices à esquerda de $\tilde{\gamma}$.

Vamos esboçar a prova da Proposição 9. O item 2 segue de imediato da definição do evento $D(\tilde{\gamma})$ porque tanto o caminho $\tilde{\gamma}$ quanto qualquer caminho τ devem ter todos os vértices em $X(\tilde{\gamma})$.

Para provar o item 1, tomamos os caminhos diferentes $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\tau}$ em $\mathbf{C}(n)$, ou seja, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\tau}$ são caminhos abertos distintos autoevitáveis na projeção com cruzamento de cima

para baixo em $B(n)$. Os eventos $D(\tilde{\gamma})$ e $D(\tilde{\tau})$ não podem ocorrer simultaneamente. Para mostrar isto é utilizado um argumento por contradição supondo que $D(\tilde{\gamma})$ e $D(\tilde{\tau})$ ocorrem concomitantemente. Como os caminhos $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\tau}$ são diferentes, então a curva de Jordan construída a partir do caminho $\tilde{\gamma}$, denotada por $C_{\tilde{\gamma}}$, não é igual a curva de Jordan construída a partir de $\tilde{\tau}$, denotada por $C_{\tilde{\tau}}$. Define-se $\mathbf{D}(n)$ o conjunto dos caminhos fortemente autoevitáveis com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$ (esses caminhos não necessariamente são abertos). Conseguimos construir $\chi \in \mathbf{D}(n)$. Para maiores detalhes desta construção sugerimos uma leitura atenta da Seção 4 do artigo [9].

A Proposição 10 abaixo é quase a mesma coisa que a Proposição 9 trocando os caminhos abertos autoevitáveis com cruzamento de cima para baixo em $\pi(B(n))$ por fitas distintas autoevitáveis que tenham projeções diferentes. Considere a fita $R = R(\gamma) = \{\nu \in B(n) : \pi(\nu) \in \pi(\gamma)\}$ autoevitável com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$ e definimos o evento $D(R) = \bigcup_{\tau} D(\tilde{\pi}(\tau))$, sendo a união feita sobre todos os caminhos autoevitáveis τ com cruzamento de cima para baixo em $B(n)$ com $R(\tau) = R$. Seja $L(R)$ a união de todas as regiões $\pi^{-1}(L(\tilde{\pi}(\tau)))$ para qualquer caminho τ .

Proposição 10. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. O evento $\Xi_n = \{\text{existe um caminho com cruzamento de cima para baixo em } B(n)\}$ é a união disjunta sobre todas as fitas autoevitáveis com cruzamento de cima para baixo de $B(n)$, ou seja, $\bigcup_R D(R)$.
2. Para cada fita R , o evento $D(R)$ depende somente do estado do vértice na região

$$\bar{L}(R) = R \cup L(R).$$

A partir de um exemplo vamos expor a veracidade da Proposição 10. Fixe a fita R autoevitável. Para o evento $D(R)$ ocorrer, tem que existir um caminho aberto em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ na fita R conectando um sítio na face de cima a um sítio na face de baixo de $B(n)$. Se todos os sítios à esquerda de R que estão na região $L(R)$ forem fechados, somente isto não garante que a fita R será a mais à esquerda.

De fato, considere agora um outra fita \hat{R} autoevitável, diferente da fita R , então teremos os eventos $D(R)$ e $D(\hat{R})$ disjuntos. Veja a Figura 5.13 abaixo um exemplo para as fitas R e \hat{R} .

Observe que a região à esquerda de R e \hat{R} são iguais, isto é, $L(R) = L(\hat{R})$. Para \hat{R} ser a fita mais à esquerda, necessariamente precisamos usar os 3 sítios “fora da linha reta”.

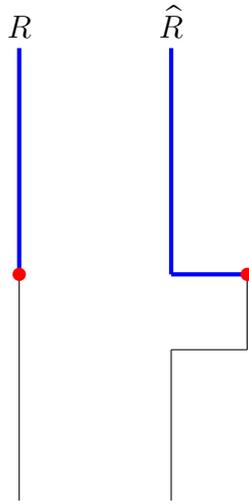


Figura 5.13: Considere as fitas R e \hat{R} (já projetadas em \mathbb{Z}^2). Nas fitas R e \hat{R} , a linha em azul representa os sítios abertos em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ que estão no nível 1, a linha em preto representa os sítios abertos em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ que estão no nível 0, e o sítio em vermelho é onde tem a mudança de nível (do nível 1 ao nível 0), isto é, os sítios nos níveis 1 e 0 da laje localizados na projeção em vermelho tem que estar ambos abertos

Este exemplo mostra que para a fita R ser a mais à esquerda não depende somente dos sítios localizados na região $L(R)$, mas também o caminho tem que usar todos os sítios.

Se não tivéssemos os dois níveis, ou seja, se o problema fosse em \mathbb{Z}^2 , \hat{R} nunca seria o caminho mais à esquerda. Porém, considerando $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, o caminho cuja projeção em \mathbb{Z}^2 é a fita R , pode não ser o caminho mais à esquerda, precisando assim dos sítios “fora da linha reta” da fita \hat{R} para que ela possa ser o caminho mais à esquerda.

Concluimos assim que a ocorrência do evento $D(R)$ depende não somente da região $L(R)$ como também na própria escolha da fita R e como é a configuração dos sítios da fita R . E em \mathbb{Z}^2 quando duas fitas R e \hat{R} têm a mesma região à esquerda, isto é, $L(R) = L(\hat{R})$, somente uma delas será a mais à esquerda. Além disso, em \mathbb{Z}^2 a própria região $L(R)$ define se o evento $D(R)$ pode ocorrer ou não. Porém isto pode não ocorrer em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$. O exemplo anterior mostra exatamente isso: dois caminhos com a mesma região à esquerda mas a ocorrência da fita mais à esquerda pode ocorrer para ambos.

A seguir vamos expor um comentário sobre o principal resultado do artigo de Duminil-Copin, Sidoravicius e Tassion em [10] de 2016, que discute a ausência de percolação no

ponto crítico considerando o modelo definido na laje com N níveis, isto é, o grafo considerado onde constrói-se os caminhos em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N-1\}$. Este resultado apresentamos abaixo no Teorema 10, cujo enunciado é muito parecido com o do Teorema 7. As diferenças são no grafo em si e no tipo de percolação: em um tem-se 2 lajes e considera-se percolação nos sítios (Teorema 7) e no outro tem-se N lajes e considera-se percolação nos elos (Teorema 10).

Teorema 10. *Não existe percolação de elos no ponto crítico em $G_N = (V_N, E_N)$, com $V_N = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N-1\}$, isto é,*

$$\theta(p_c) = 0.$$

No artigo [10] o modelo de percolação é construído considerando o modelo Bernoulli onde os elos em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N-1\}$ tem probabilidade $p \in [0, 1]$ de estar aberto e probabilidade $1 - p$ de estar fechado. Também é considerada independência entre o estado dos elos. No mesmo artigo afirma que a prova que generaliza o resultado para a percolação em lajes para um subconjunto em \mathbb{Z}^d é bem parecida, com as devidas adaptações, isto é, considerando um grafo qualquer da forma $\mathbb{Z}^2 \times G$, onde G é finito. Isto inclui o caso em que $G = \{0, 1, \dots, N-1\}^{d-2}$ para $d \geq 3$.

Uma situação importante realçada pelos autores Duminil-Copin, Sidoravicius e Tassion em [10] é o fato de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N-1\}^{d-2}$ aproximar \mathbb{Z}^d quando N tende para infinito, e assim sugerir que a ausência de percolação na laje no ponto crítico poderia ser um indício da solução do problema original da ausência de percolação no ponto crítico em \mathbb{Z}^d .

A ideia da demonstração do Teorema 10 é bem parecida com a que é feita para o Teorema 7. Supõe-se que $\theta(p) > 0$ e a partir disto constrói-se um critério de tamanho finito o qual é suficiente para a ocorrência de percolação. Pela continuidade da medida de probabilidade toma-se um parâmetro p' suficientemente próximo de p onde o tal critério é satisfeito, onde conclui-se que $\theta(p_c) = 0$.

Como na prova do Teorema 7, precisa-se conectar caminhos para mostrar o resultado e para isso utiliza-se um resultado que permite conectar caminhos em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, N-1\}$ com probabilidade próxima de um. No artigo [10] este resultado é chamado de Lema *gluing*, usando a ideia da conexão de caminhos. Neste artigo aplica-se o argumento de construção de blocos onde a percolação ocorre para um valor p' próximo de p . O Lema *gluing* fornece uma resposta para uma dificuldade encontrada ao fazer renormalização em 3 dimensões.

Referências Bibliográficas

- [1] Aharony, A. e Stauffer, D.: Introduction to percolation theory, 2nd ed., Taylor & Francis, 1992.
- [2] Aizenman, M. e Barsky, D.: Sharpness of the phase transition in percolation models, Communications in Mathematical Physics, v. 108, p. 489–526, 1987.
- [3] Aizenman, M., Kesten, H. e Newman, C. M.: Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation, Communications in Mathematical Physics, v. 111, no. 4, p. 505–531, 1987.
- [4] Aizenman, M., Kesten, H. e Newman, C. M.: Uniqueness of the infinite cluster and related results in percolation, Percolation theory and ergodic theory in infinite particle systems, v. 8, p. 13–20, 1987.
- [5] Broadbent, S. R.: In discussion of Symposium on Monte Carlo methods, Journal of the Royal Statistical Society (B), v. 16, p. 68, 1954.
- [6] Broadbent, S. R. e Hammersley, J. M.: Percolation processes, I and II, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, v. 53, n. 3, p. 629–645, 1957.
- [7] Brydges, D. e Spencer, T.: Self-avoiding walk in 5 or more dimensions, Communications in Mathematical Physics, v. 97, n. 1, p. 125–148, 1985.
- [8] Cox, J.T. e Durrett, R.: Limit theorems for the spread of epidemics and forest fires, Stochastic Processes and their Applications, v. 30, p. 171–191, 1988.
- [9] Damron, M., Newman, C. M. e Sidoravicius, V.: Absence of site percolation at criticality in $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$, Random Structures & Algorithms, v. 47, n. 2, p. 328–340, 2015.

- [10] Duminil-Copin, H., Sidoravicius, V., Tassion, V.: Absence of Infinite Cluster for Critical Bernoulli Percolation on Slabs, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 69, n. 7, p. 1397–1411, 2016.
- [11] Durrett, R.: *Probability: Theory and Examples*, 3rd ed., Duxbury Press, series: *Probability: Theory & Examples*, 2005.
- [12] Essam, John W e Sypes, Mq F.: Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions, *Journal of Mathematical Physics*, v. 5, n. 8, p. 1117–1127, 1964.
- [13] Fontes, L. R. G.: *Notas em Percolação*, disponível em: <http://www.ime.usp.br/~lrenato/per.pdf>, último acesso em 22 de junho de 2016.
- [14] Fortuin, C. M. e Ginibre, J. e Kasteleyn, P. W.: Correlation inequalities on some partially ordered sets, *Communications in Mathematical Physics*, v. 22, n. 2, p. 89–103, 1971.
- [15] Grimmett, G.: *Percolation*, 2nd ed. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 321 Springer, Berlin, 1999.
- [16] Hara, T.: Mean-field critical behaviour for correlation length for percolation in high dimensions, *Probability Theory and Related Fields*, v. 86, p. 337–385, 1990.
- [17] Hara, T., Slade, G.: Mean-field critical behaviour of percolation in high dimensions, *Proceedings of the IXth International Congress on Mathematical Physics*, Adam Hilger, Bristol, v. 128, p. 450–453, 1989.
- [18] Hara, T., Slade, G.: *Mean-Field Behaviour and the Lace Expansion*, *Probability and Phase Transition*, v. 420, p. 87–122, 1994.
- [19] Harris, T. E.: A lower bound for the critical probability in a certain percolation process, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 56, n. 8, p. 13–20, 1960.
- [20] Kesten, H.: *Percolation Theory for Mathematicians*, 1st ed., Birkhäuser Basel, 1982.
- [21] Kesten, H.: The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$, *Communications in Mathematical Physics*, v. 74, n. 1, p. 41–59, 1980.

- [22] Menshikov, M. V.: Coincidence of critical points in percolation problems, Soviet Mathematics Doklady, v. 33, p. 856–859, 1986.