

**INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS  
CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA**

**MAISA PEREIRA CAMILO**

**CÔNICAS: UM BREVE RELATO HISTÓRICO E RECONHECIMENTO DE  
EQUAÇÕES**

**SÃO JOÃO EVANGELISTA  
2019**

**MAISA PEREIRA CAMILO**

**CÔNICAS: UM BREVE RELATO HISTÓRICO E RECONHECIMENTO DE  
EQUAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Minas Gerais *Campus* São João Evangelista como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Me. Wálmisson Régis de Almeida

**SÃO JOÃO EVANGELISTA**

**2019**

## FICHA CATALOGRÁFICA

C172c  
2020 Camilo, Maisa Pereira.

Cônicas: um breve relato histórico e reconhecimento de equações. / Maisa Pereira Camilo. – 2020.  
70fl.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, 2020.

Orientador: Me.Wálmisson Régis de Almeida.

1. Cônicas. 2. Duplicação do cubo. 3. Reconhecimento de equações. I. Camilo, Maisa Pereira. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista. III. Título.

CDD 516.3

Elaborada pela Biblioteca Professor Pedro Valério  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais.  
Campus São João Evangelista.  
Bibliotecária Responsável: Rejane Valéria Santos – CRB-6/2907

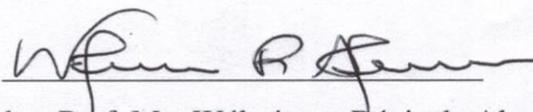
MAISA PEREIRA CAMILO

**CÔNICAS: UM BREVE RELATO HISTÓRICO E RECONHECIMENTO DE  
EQUAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais *Campus* São João Evangelista como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

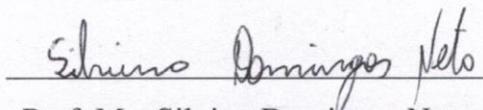
Aprovada em: ...11.../...12.../...2019...

BANCA EXAMINADORA



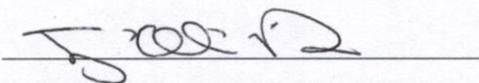
Orientador: Prof. Me. Wálmisson Régis de Almeida

Instituto Federal de Minas Gerais, *Campus* São João Evangelista



Prof. Me. Silvano Domingos Neto

Instituto Federal de Minas Gerais, *Campus* São João Evangelista



Prof. Me. Tiago de Oliveira Dias

Instituto Federal de Minas Gerais, *Campus* São João Evangelista

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida. À minha família, em especial minha mãe Maura, por todo apoio nos momentos mais difíceis desta jornada. Ao meu namorado e aos meus amigos, por toda força e companheirismo. Ao meu orientador Wálmisson, por toda dedicação e paciência. A todos os meus professores da graduação, pelos seus valiosos ensinamentos.

## RESUMO

Este trabalho teve como objetivo desenvolver um material que apresente um conteúdo detalhado a respeito das cônicas, curvas planas formadas quando um plano intersecta um cone duplo. Para isso, apresenta-se um breve histórico das origens dessas curvas, suas principais características geométricas e o reconhecimento de suas equações. Primeiro, abordou-se o contexto histórico destas curvas, que retoma aos tempos da Grécia Antiga e a um dos famosos problemas de construção da época: a duplicação do cubo. Posteriormente, foram apresentadas as equações das cônicas com eixos de simetria horizontal/vertical, com centro na origem e transladadas, construídas a partir da definição dessas curvas como lugar geométrico. Por fim, foi apresentado um procedimento geral para reconhecimento de cônicas, utilizado para as situações nas quais as cônicas apresentam eixos de simetria rotacionados, em relação aos eixos cartesianos.

**Palavras chaves:** Cônicas, Duplicação do cubo, Reconhecimento de equações.

## ABSTRACT

This work aimed to develop a material that presents a detailed content about conics, flat curves formed when a plane intersects a double cone. For this, we present a brief history of the origins of these curves, their main geometric characteristics and the recognition of their equations. First, the historical context of these curves, which goes back to ancient Greek times and to one of the famous construction problems of the time, was discussed: the duplication of the cube. Subsequently, the equations of the conics with horizontal / vertical symmetry axes, centered in the origin and translated, presented by defining these curves as a geometric place, were presented. Finally, a general procedure for conic recognition was presented, used for situations in which the conics have rotated symmetry axes in relation to the Cartesian axes.

**Keywords:** Conics, Duplication of the cube, Recognition of equations.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Cone retângulo com uma seção perpendicular a geratriz. ....	14
<b>Figura 2.</b> Seção circular .....	14
<b>Figura 3.</b> Seção plana do cone, passando pelo seu eixo. ....	15
<b>Figura 4.</b> Imagem produzida através do software GeoGebra .....	16
<b>Figura 5.</b> Curvas obtidas através da seção do plano perpendicular a geratriz.....	17
<b>Figura 6.</b> Seções cônicas obtidas a partir de um mesmo cone.....	18
<b>Figura 7.</b> Parábola e seus elementos.....	21
<b>Figura 8.</b> Gráfico da equação $x^2 + 2y = 0$ .....	22
<b>Figura 9.</b> Parábola com vértice na origem e eixo representado pela abcissa $x$ .....	23
<b>Figura 10.</b> Gráfico da equação $y^2 - 4x = 0$ .....	24
<b>Figura 11.</b> Desenho de uma elipse utilizando uma corda fixada a dois pontos.....	24
<b>Figura 12.</b> Elementos da elipse.....	25
<b>Figura 13.</b> Excentricidade da elipse.....	26
<b>Figura 14.</b> Elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo $x$ .....	26
<b>Figura 15.</b> Gráfico da equação $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ . ....	28
<b>Figura 16.</b> Gráfico da equação $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ .....	29
<b>Figura 17.</b> Circunferência com centro A na origem .....	29
<b>Figura 18.</b> Elementos da hipérbole .....	30
<b>Figura 19.</b> Excentricidade da hipérbole.....	31
<b>Figura 20.</b> Gráfico da equação $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ e suas assíntotas.....	34
<b>Figura 21.</b> Gráfico da equação $-16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$ e suas assíntotas.....	34
<b>Figura 22.</b> Translação de eixos.....	35
<b>Figura 23.</b> Parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo ao eixo $y$ .....	36
<b>Figura 24.</b> Gráfico da equação $x^2 - 2x - 2y + 7 = 0$ . ....	37
<b>Figura 25.</b> Elipse com centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo $x$ .....	37
<b>Figura 26.</b> Gráfico da equação $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ .....	38
<b>Figura 27.</b> Hipérbole com centro fora da origem e eixo real paralelo ao eixo $x$ .....	39
<b>Figura 28.</b> Gráfico da equação $-9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y - 113 = 0$ . ....	40
<b>Figura 29.</b> Esquema da aplicação composta.....	42
<b>Figura 30.</b> Diagrama de uma transformação com sua inversa.....	43
<b>Figura 31.</b> Rotação dos vetores da base canônica .....	47
<b>Figura 32.</b> Exemplo de matrizes semelhantes .....	50
<b>Figura 33.</b> Gráfico da elipse $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$ .....	64
<b>Figura 34.</b> Gráfico da hipérbole $xy + x + y = 0$ .....	66
<b>Figura 35.</b> Gráfico da parábola $x^2 + y^2 + 2xy - 42x = 0$ .....	67

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
1.1	OBJETIVO GERAL .....	11
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	11
<b>2</b>	<b>UM BREVE RELATO HISTÓRICO</b> .....	12
<b>3</b>	<b>CARACTERIZAÇÃO E CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DAS CÔNICAS</b> ....	20
3.1	CÔNICAS CENTRADAS NA ORIGEM, COM SIMETRIAS HORIZONTAIS OU VERTICAIS.....	20
3.1.1	Parábola .....	20
3.1.2	Elipse .....	24
3.1.3	Hipérbole.....	30
3.2	CÔNICAS COM TRANSLAÇÃO EM RELAÇÃO À ORIGEM, COM SIMETRIAS HORIZONTAL / VERTICAL .....	35
3.2.1	Equação da parábola .....	36
3.2.2	Equação da elipse .....	37
3.2.3	Equação da hipérbole .....	39
<b>4</b>	<b>CÔNICAS ROTACIONADAS – FORMAS QUADRÁTICAS EM <math>\mathbb{R}^2</math></b> .....	41
4.1	OPERADORES LINEARES .....	41
4.1.1	Matriz de uma transformação linear .....	42
4.1.2	Aplicação composta de uma transformação linear .....	42
4.1.3	Operadores invertíveis.....	43
4.1.4	Matriz mudança de base.....	44
4.1.5	Matriz de rotação .....	47
4.1.6	Matrizes semelhantes .....	48
4.1.7	Operador ortogonal .....	51
4.1.8	Operador simétrico .....	52
4.2	AUTOVALORES E AUTO VETORES.....	53
4.2.1	Determinação de autovalores e auto vetores.....	53
4.3	DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES .....	54
4.3.1	Diagonalização de matrizes simétricas.....	57
4.4	FORMAS QUADRÁTICAS.....	58
4.4.1	Redução da forma quadrática à forma canônica .....	58
4.4.2	Procedimento geral para reconhecimento de uma cônica .....	60
4.4.3	Cônicas degeneradas.....	68

<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>69</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>70</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As seções cônicas são curvas planas formadas quando um plano intersecta um cone duplo. O estudo destas curvas se faz importante, pois as mesmas possuem vasta aplicação em diversas áreas. Na Grécia Antiga as cônicas ajudaram a resolver problemas geométricos que há muito atormentavam os matemáticos da época. Na área de tecnologia, são usadas para projetar vários tipos de aparelhos, por exemplo, as antenas de captação de sinais. Além disso, são utilizadas para modelar muitos dos processos físicos presentes na natureza, como a trajetória parabólica no lançamento de um projétil ou a órbita elíptica dos planetas em torno do Sol.

Durante o levantamento bibliográfico e mesmo na trajetória acadêmica, foi possível perceber que a maioria dos livros utilizados na graduação que abordam o assunto traz apenas o tratamento algébrico/analítico. Na atuação como bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e Residência Pedagógica foi possível perceber também que, quando abordado o tema na Educação Básica, pouco se fala de suas aplicações e raramente é visto o estudo das cônicas com eixos de simetria transladados ou rotacionados.

Diante desse cenário, surgiu o interesse em realizar um estudo particular destas curvas, entender como surgiram, aplicações e ainda estudar suas principais características, descrever seu comportamento e reconhecer suas formas através de um estudo algébrico. Isso geraria grande contribuição em minha formação como professora e na formação dos meus futuros alunos.

O trabalho foi dividido em três etapas. A primeira apresenta uma breve investigação histórica a respeito das cônicas. Na segunda etapa, realizou-se um estudo analítico, apresentando a dedução das equações dessas curvas a partir das suas propriedades geométricas e de seus principais elementos em situações de eixos de simetria horizontais e verticais. Na terceira etapa, foi estudado o comportamento das equações das cônicas que não apresentam eixos de simetria orientados na horizontal e vertical, ou seja, eixos rotacionados.

A metodologia empregada na pesquisa foi a revisão bibliográfica, utilizando-se de livros de referência da área de Álgebra Linear, livros específicos sobre as curvas cônicas e artigos e dissertações relacionados ao tema.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

Estudar as cônicas e produzir, através desse trabalho, um material de suporte para o ensino dessas curvas.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar um breve relato histórico das cônicas, a partir de suas origens no problema grego de duplicação do cubo;
- Definir as cônicas como lugar geométrico e, através dessa definição, deduzir suas equações nos casos de curvas sem rotação;
- Apresentar os principais conceitos de Álgebra Linear necessários para compreensão do teorema das Formas Quadráticas;
- Demonstrar o teorema das Formas Quadráticas;
- Apresentar um roteiro para reconhecimento de cônicas nos casos de rotação de seus eixos.

## 2 UM BREVE RELATO HISTÓRICO

Nesta etapa do trabalho optou-se por fazer uma investigação histórica a respeito das curvas cônicas. Segundo Eves (2011, p. 132), foi Menaecmo, contemporâneo de Platão, o “inventor” das seções cônicas. São poucos os relatos a respeito deste matemático, mas existem fortes indícios que o mesmo descobriu as curvas cônicas na tentativa de solucionar um dos famosos três problemas de construção concebidos na Grécia antiga, a duplicação do cubo, tendo como ferramentas para solucionar os problemas apenas régua não graduada e compasso. Os outros dois são a trissecção de um ângulo e a quadratura do círculo.

O problema da duplicação do cubo é caracterizado por se obter um cubo com o dobro do volume de um cubo dado. A trissecção do ângulo é o problema de se dividir um ângulo dado em três ângulos de mesma medida, e a quadratura do círculo consiste em se obter um quadrado com mesma área de um círculo dado.

Existem versões históricas que explicam a origem do problema da duplicação do cubo. Segundo Eves (2011, p. 135), uma delas diz respeito ao relato de um poeta sobre a insatisfação do rei Míno com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. O rei ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado, e especulou-se que isso poderia ser feito dobrando-se as dimensões do cubo. A falha fez com que os matemáticos da época abraçassem o problema. Outra versão conta que:

... para livrar-se de uma peste que os castigava, os delianos foram orientados pelo seu oráculo a dobrar o tamanho do altar cúbico de Apolo. O problema supostamente caiu nas mãos de Platão que o submeteu aos geómetras. [...] Verdadeira a história ou não, o fato é que o problema foi estudado na Academia de Platão, e há soluções geométricas superiores atribuídas a Eudoxo, Menaecmo e mesmo (embora talvez erradamente) ao próprio Platão. (EVES, 2011, p. 135)

Considerando ainda o problema da duplicação do cubo, segundo Lopes (2011, p.33) Hipócrates de Chios (470 – 410 a.C.) mostrou que esse problema se reduzia a encontrar curvas com propriedades expressas na proporção contínua entre dois segmentos. Segundo Filho (2015, p.18) Hipócrates ficou conhecido por solucionar problemas geométricos através da Teoria das Proporções. Por exemplo, para encontrar um quadrado com mesma área de um retângulo de medidas  $a$  e  $b$ , por exemplo, é preciso apenas fazer uma média proporcional de  $a$  e  $b$ :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

sendo  $x$  a medida do lado do quadrado. A mesma ideia foi utilizada em problemas envolvendo curvas, como no caso da quadratura de lunas (figura geométrica formada pela interseção de dois arcos de circunferência de raios distintos).

Dessa maneira, Hipócrates teve a ideia de aplicar a ferramenta da proporção no problema da duplicação do cubo. Tomando-se dois segmentos  $a$  e  $b$  e montando-se a seguinte proporção com relação aos segmentos  $x$  e  $y$ , obtemos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Manipulando-se algebricamente a sequência de igualdades acima, obtemos outras três novas equações:

$$x^2 = ay, y^2 = bx \text{ e } xy = ab,$$

que, na linguagem atual, sabe-se ser as duas primeiras equações referente à parábolas e a terceira equação referente a uma hipérbole. Interessante também notar também que, isolando  $y$  na primeira equação e substituindo na segunda (o que corresponde geometricamente à uma interseção de parábolas), temos:

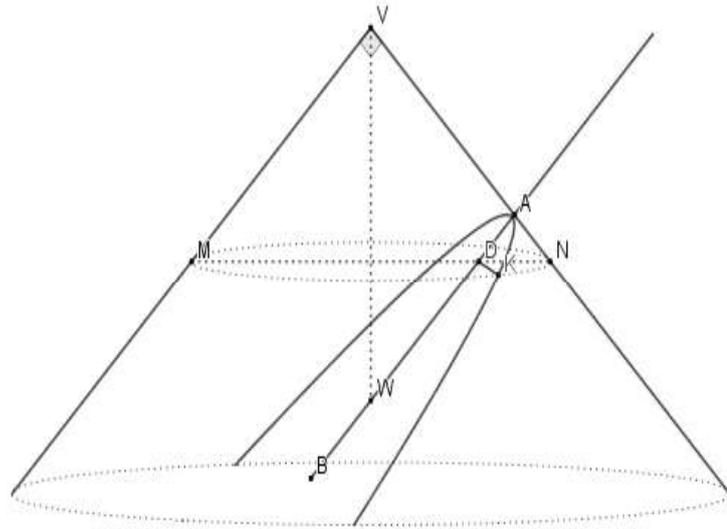
$$x^4 = a^2bx \Rightarrow x^3 = a^2b,$$

em que vale o cancelamento multiplicativo pois  $x \neq 0$  ( $x$  é medida de um segmento). De algum modo, Hipócrates assumiu  $b = 2a$  e, nesse caso, temos  $x^3 = 2a^3$ , que na linguagem algébrica significa que o volume de um cubo de aresta  $x$  é o dobro do volume de um cubo de aresta  $a$ . Bastava agora estabelecer uma relação geométrica entre  $a$  e  $x$ . Esse foi o contexto em que se deu a brilhante interferência de Menaecmo e suas cônicas.

Segundo Lopes (2011, p.34), Menaecmo percebeu que havia uma família de curvas adequadas, que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone, a sua geratriz. A curva gerada por um corte de um plano perpendicular a geratriz de um cone retângulo é hoje conhecida como parábola. A curva gerada por um plano perpendicular a geratriz de um cone acutângulo é conhecida como elipse e a formada pela seção de um plano perpendicular a geratriz de um cone obtusângulo é conhecida como hipérbole.

Além disso, ele mostrou ser possível relacionar as curvas descritas anteriormente às equações obtidas pelas proporções de Hipócrates. Para ilustrar esse fato no caso da parábola, observe um cone retângulo sendo seccionado por um plano perpendicular a sua geratriz. Considere a parábola gerada por essa interseção, sendo  $A$  o seu vértice (figura 1). Considere também uma secção plana perpendicular ao eixo do cone, e a circunferência obtida de diâmetro  $\overline{MN}$  (figura 2). Seja  $K$  um dos dois pontos resultantes da intersecção da parábola com essa circunferência.

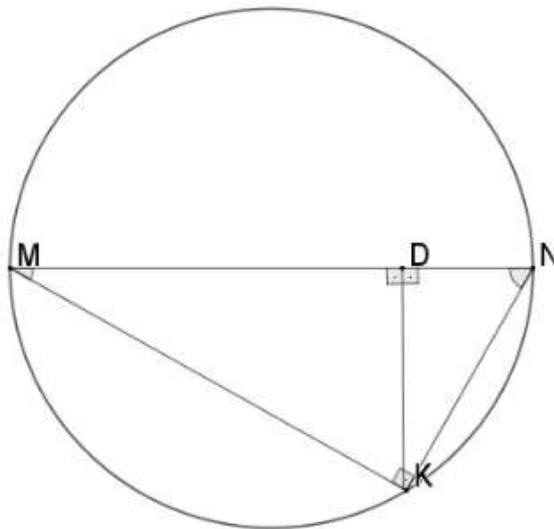
**Figura 1.** Cone retângulo com uma seção perpendicular a geratriz.



Fonte: LOPES, F. J., 2011

Seja  $D$  a projeção ortogonal de  $K$  sobre a reta  $\overline{MN}$ . Temos, por relações métricas no  $\Delta KMN$ , que  $KD^2 = MD \cdot ND$ .

**Figura 2.** Seção circular

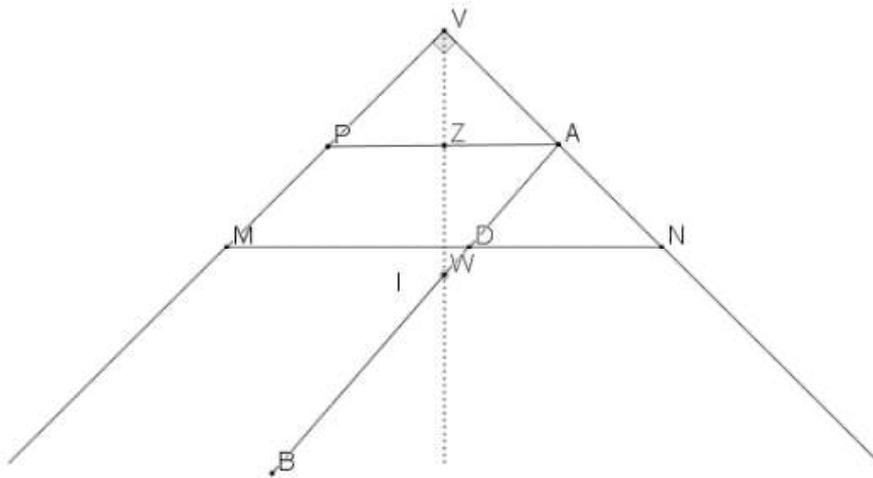


Fonte: LOPES, F. J., 2011

Como  $A$  e  $W$  são fixos ( $W$  é a interseção do eixo da parábola com o eixo do cone),  $AW$  é constante e, como  $K$  é um ponto qualquer da curva e define  $D$ , temos que  $KD$  e  $AD$  são

variáveis. E ainda, como  $KD$  é ortogonal ao plano que passa por  $A$ ,  $M$  e  $N$ , temos  $KD \perp AD$ . Dessa forma, esses segmentos ortogonais podem ser interpretados, numa linguagem moderna, como nossos eixos  $Ox$  e  $Oy$ . Considere agora a figura 3, que representa um corte plano do cone, passando pelo seu vértice e eixo:

**Figura 3.** Secção plana do cone, passando pelo seu eixo.



Fonte: LOPES, F. J., 2011

Nela podemos notar, por semelhança dos triângulos  $\Delta NDA$  e  $\Delta WAZ$ , que:

$$\frac{ND}{AD} = \frac{AW}{AZ}$$

e sendo  $MDAP$  um paralelogramo, temos que  $MD = 2AZ$ . Com essas equações podemos obter

$$KD^2 = 2AZ \frac{AD \cdot AW}{AZ} = 2AW \cdot AD.$$

Como  $AW$  é constante e  $KD$  e  $AD$  variáveis, a equação poderia ser escrita, numa linguagem analítica atual, como  $y^2 = 2px$  ou  $x^2 = 2py$ . A partir disso, segundo Eves (2011):

Menaecmo (c. 350 a.C.) deu as duas soluções seguintes ao problema da duplicação. Para tanto utilizou algumas seções cônicas que, aparentemente, foram inventadas por ele mesmo para o problema.

1. Trace duas parábolas com vértice comum, eixos perpendiculares e tais que o *latus rectum*<sup>1</sup> de uma é o dobro do da outra. Denote por  $x$  o comprimento da perpendicular baixada da outra interseção das duas parábolas sobre o eixo da parábola menor. Então  $x$  é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo que tem como aresta o *latus rectum* menor.

2. Trace uma parábola de *latus rectum*  $s$  depois uma hipérbole equilátera de um eixo real igual a  $4s$  tendo como assintotas o eixo da parábola e a tangente à parábola em

<sup>1</sup> O *latus rectum* de uma seção cônica é a corda que passa através de um foco paralelo à diretriz da seção cônica. "*Latus rectum*" é um composto do latim *latus*, que significa "lado" e *rectum*, que significa "reto".

seu vértice. Seja  $x$  o comprimento da perpendicular baixada da intersecção das duas curvas sobre o eixo da parábola. Então  $x^3 = 2s^3$ . (EVES, 2011, p. 149)

Na figura 4 estão representadas as equações  $x^2 = y$  e  $y^2 = 2x$ , que são duas parábolas obtidas pela proporção de Hipócrates ( $x^2 = ay$  e  $y^2 = 2ax$ ) para  $a = 1$ . No eixo horizontal está a parábola  $y^2 = 2x$ . Relacionando-a com a equação reduzida  $y^2 = 2px$ , temos que o parâmetro  $p$ , distância do foco a diretriz, é tal que  $p = 1$  e, portanto, seu foco é o ponto  $(\frac{1}{2}, 0)$ . No eixo vertical está a parábola  $x^2 = y$ , que relacionada à equação reduzida  $x^2 = 2py$ , evidencia  $p = \frac{1}{2}$ , e portanto seu foco está no ponto  $(0, \frac{1}{4})$ . Na primeira parábola temos o *latus rectum* maior medindo 2, e na segunda temos o *latus rectum* menor medindo 1.

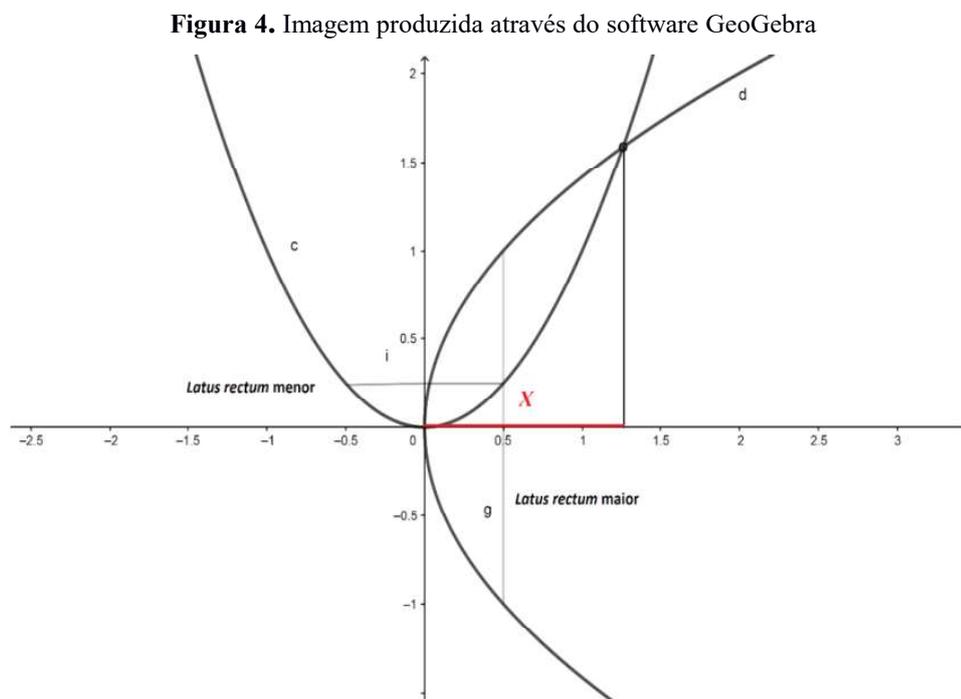
A solução do problema da duplicação pode ser visto pela intersecção dessas duas equações:

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, tem-se:

$$x^4 = 2x \Rightarrow x(x^3 - 2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2},$$

exemplificando uma das soluções dadas por Menaecmo na linguagem algébrica moderna, em que  $x$  é a aresta do cubo com dobro do volume do cubo cuja aresta é o *latus rectum* menor.

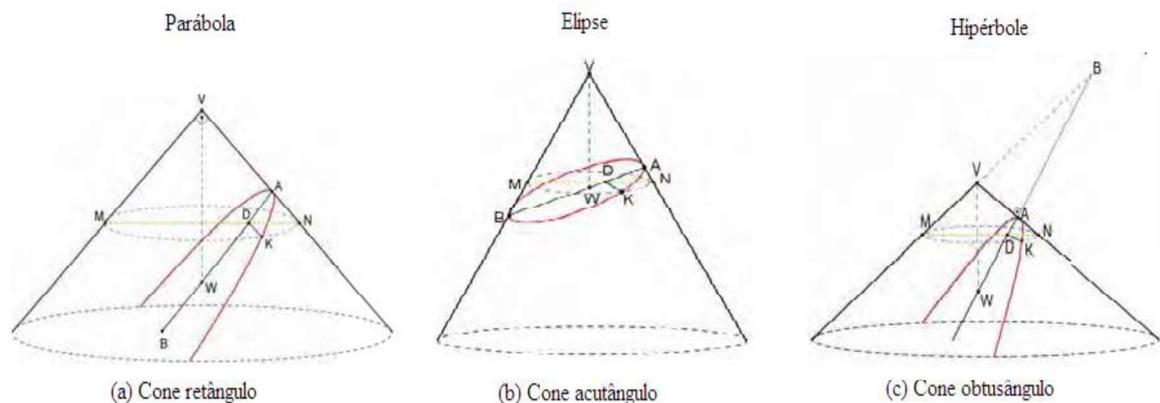


Fonte: Construído pela autora no GeoGebra

Outro nome frequentemente relacionado com a concepção das seções cônicas é Apolônio. Segundo Eves (2011, p. 198), Euclides, Arquimedes e Apolônio foram três gigantes da Matemática do século III a.C., o que o coloca em lugar de destaque na Matemática Grega. Apolônio, que era cerca de 25 anos mais novo que Arquimedes, nasceu por volta de 262 a.C. em Perga, no sul da Ásia Menor. Sua obra *Secções cônicas* superou todas as outras feitas anteriormente sobre o assunto, e isso deu a ele posteriormente o título de “O grande Geômetra”.

Sabe-se que *Secções cônicas* foi dividida em oito livros, com cerca de 400 proposições, porém somente os primeiros sete dos oito livros foram salvos. Os quatro primeiros apresentam uma introdução elementar, nos quais mostrou-se pela primeira vez que não eram necessários três tipos de cone para se obter as curvas parábola, hipérbole e elipse, como dizia Menaecmo, nem que o plano da seção fosse perpendicular a geratriz do cone, como feito anteriormente (Figura 5).

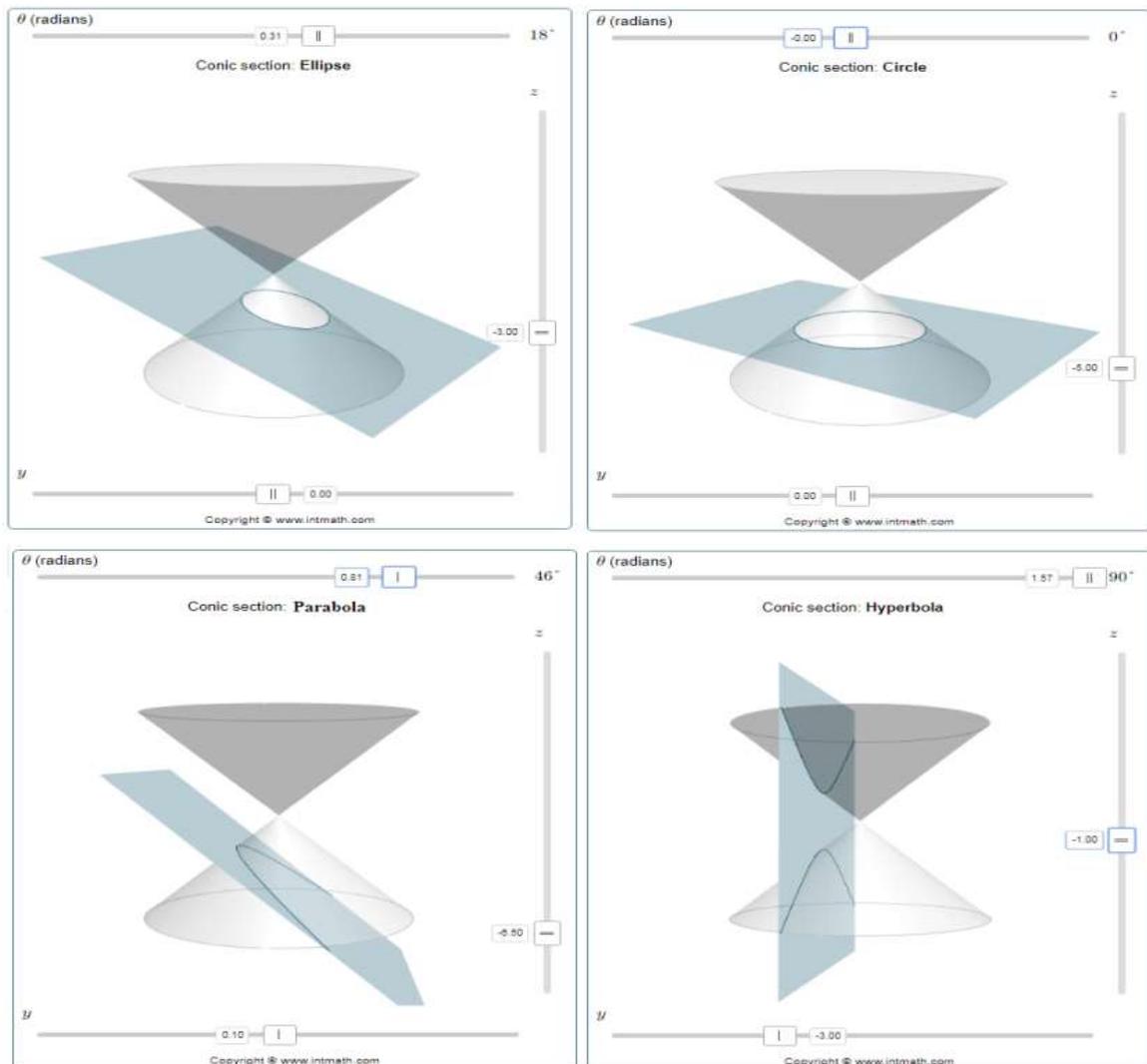
**Figura 5.** Curvas obtidas através da seção do plano perpendicular a geratriz



Fonte: LOPES, F. J., 2011

Apolônio traz uma nova maneira de se obter as curvas através de um único cone duplo, podendo este ser reto ou oblíquo, sendo modificado apenas o ângulo de inclinação do plano de secção. Dessa maneira, inclusive, surge o novo ramo da hipérbole (Figura 6), curva que apresentava apenas um ramo nos estudos de Menaecmo.

**Figura 6.** Seções cônicas obtidas a partir de um mesmo cone



Fonte: [www.intmath.com](http://www.intmath.com)

Os nomes atualmente utilizados para as curvas das seções cônicas foram dados por Apolônio e, segundo Eves (2011, p. 199), foram tomados da terminologia pitagórica referente às soluções de equações quadráticas por aplicação de áreas.

Os quatro últimos livros entram em discussões mais especializadas. Segundo Lopes (2011, p.39) discute-se sobre cônicas semelhantes, retas tangentes e normais a essas curvas entre outras propriedades. Apolônio não faz menção ao foco da parábola nem à propriedade foco-diretriz das cônicas, apesar de Euclides, em seu estudo sobre cônicas já estar familiarizado com essas propriedades. Segundo Eves (2011, p. 200), os gregos antigos não tinham um nome específico para “foco”. Esse termo foi introduzido posteriormente por Johannes Kepler (1571-1630).

As cônicas apresentaram papel importante na ciência. Suas aplicações foram essenciais no desenvolvimento da Física, Astronomia, Engenharia e em muitas outras áreas do conhecimento. Podemos destacar, por exemplo, as trajetórias parabólicas no lançamento de projéteis ou na órbita elíptica dos sistemas gravitacionais, como as Luas ao redor de seus planetas, planetas ao redor de suas estrelas ou mesmo para satélites artificiais, como os de telecomunicações.

Está presente também na óptica: segundo Lopes (2011, p.143), as superfícies geradas pela revolução de uma parábola, elipse ou hipérbole, cada uma delas em torno de seu eixo focal, apresentam propriedades de reflexão que tem diversas aplicações tecnológicas. A utilização de espelhos parabólicos e hiperbólicos nos telescópios reduziu as aberrações monocromáticas produzidos pela refração da luz em lentes delgadas (efeito de borda), o que proporcionou imagens mais precisas e nítidas e propiciou novas descobertas astronômicas a partir do século XVIII.

A introdução das cônicas na Astronomia foi feita por Johannes Kepler, quando enunciou suas leis sobre o movimento dos planetas. Johannes Kepler concluiu em 1605 que a órbita de Marte era uma elipse sendo o Sol um de seus focos, uma conclusão que foi estendida a todos os planetas do Sistema Solar, e agora é chamada de Primeira Lei do Movimento Planetário de Kepler.

Segundo Lopes (2011, p.142), Galileu Galilei (1564 – 1642) introduziu o método experimental para o estudo dos fenômenos físicos, e além dos seus trabalhos no campo da Mecânica, também deu enorme contribuição para o desenvolvimento da Astronomia. Suas invenções e descobertas inovadoras lhe renderam o título de "pai da ciência moderna", com contribuições em Matemática, Física e Astronomia, atribuindo caráter empírico a estas áreas. A abordagem orientada para a ciência fez dele uma figura chave da Revolução Científica dos séculos 16 e 17. Em suas publicações sobre Mecânica, teve a ideia da composição de movimentos que afirma, entre outras coisas, que o lançamento oblíquo de um objeto, no qual ele realiza uma trajetória parabólica, é uma composição simultânea de um movimento vertical acelerado e um movimento horizontal uniforme.

Pouco após Galileu, Sr. Isaac Newton enuncia suas leis do movimento em Princípios Matemáticos de Filosofia Natural e, segundo Lopes (2011, p.143), baseando-se em suas leis do movimento e nos estudos de Kepler, Newton percebeu que deveria existir uma força de atração da Terra sobre a Lua, do mesmo modo que o sol atrai os planetas. Dessa maneira chegou em sua Lei da Gravitação Universal, tornando possível calcular com exatidão a órbita dos planetas.

### 3 CARACTERIZAÇÃO E CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DAS CÔNICAS

Nesta etapa da pesquisa, realizou-se o estudo das principais características das cônicas, apresentando uma descrição geométrica dessas curvas, seus principais elementos e a dedução de suas equações a partir desses elementos. Primeiramente, são abordadas as cônicas com centro na origem e eixos de simetria nos eixos ortogonais  $x$  e  $y$  do plano cartesiano. Posteriormente, é apresentada a translação dessas curvas, deslocando seu centro da origem. A possibilidade de rotação das curvas será abordada no próximo capítulo.

Uma cônica em  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação geral:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

na qual  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . A seguir, serão realizadas as deduções das equações de todas as cônicas em  $\mathbb{R}^2$ . Para facilitar a compreensão, as construções serão separadas em três etapas:

- Cônicas centradas na origem com simetrias horizontais ou verticais;
- Cônicas com translação em relação à origem, com simetrias horizontais ou verticais;
- Cônicas com eixos de simetria rotacionados.

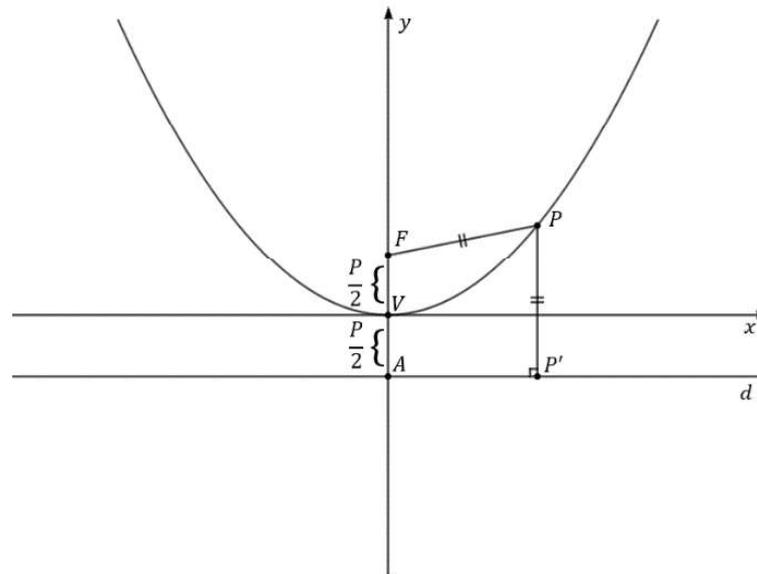
#### 3.1 CÔNICAS CENTRADAS NA ORIGEM, COM SIMETRIAS HORIZONTAIS OU VERTICAIS

Nesse tópico, será estudado o caso mais simples de posição das cônicas sobre o plano  $xy$ , aquele em que as curvas estão centradas na origem com seus eixos de simetria sobre os eixos ortogonais  $x$  ou  $y$ .

##### 3.1.1 Parábola

Tome em um plano uma reta  $d$  e um ponto  $F$  não pertencente a  $d$ . Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de  $F$  e  $d$ . O ponto  $F$  e a reta  $d$  são chamados, respectivamente, de foco e diretriz da parábola.

**Figura 7.** Parábola e seus elementos.



Fonte: Construído pela autora no GeoGebra

Como elementos principais dessa curva, temos:

- Foco: o ponto  $F$ .
- Diretriz: a reta  $d$ .
- Eixo: a reta que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz.
- Vértice: o ponto  $V$ , que é a interseção da parábola com seu eixo.

É fácil notar, pela definição, que  $V$  é ponto médio do segmento  $AF$ . O parâmetro que diferencia duas parábolas nessas mesmas circunstâncias é a distância da diretriz ao foco, representada na figura pelo número real  $p$ .

***Equação da parábola de vértice na origem e eixo coincidente com o eixo das ordenadas:***

Situando-se a parábola com o vértice na origem de um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas e eixo de simetria vertical, coincidente com o eixo  $y$ , e tomando-se  $F$  no semieixo positivo de  $y$ , tem-se para  $F$  as coordenadas  $(0, \frac{p}{2})$  e a equação da reta diretriz  $d: y = -\frac{p}{2}$ . Tomemos  $P$  um ponto arbitrário  $(x, y)$  da parábola, e  $P'$  a projeção ortogonal desse ponto na reta diretriz, ponto  $P'(x, -\frac{p}{2})$  como mostrado na figura 7. Por definição, para que  $P$  pertença à parábola, devemos ter  $d(F, P) = d(P, P')$ . Portanto,

$$d_{(F,P)} = d_{(P,P')}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

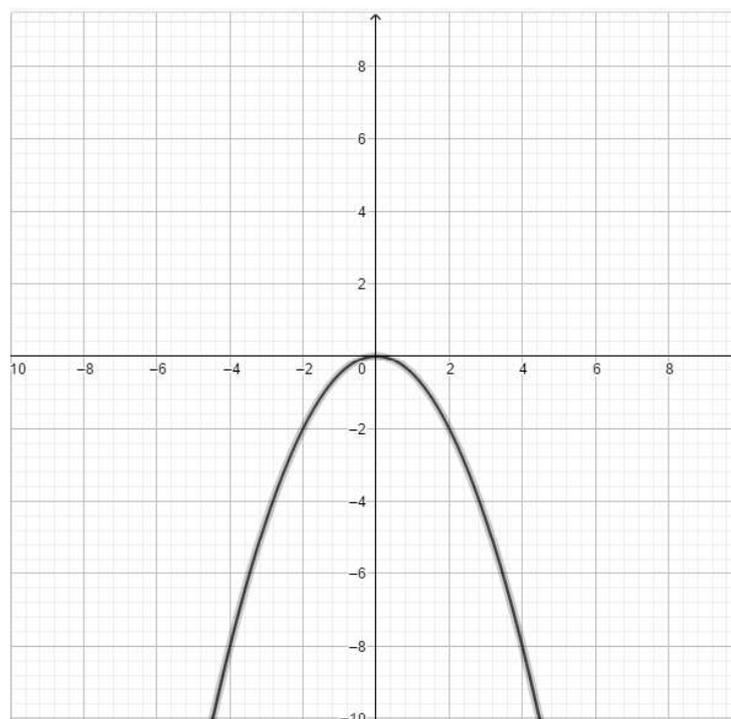
$$x^2 + y^2 - yp + \frac{p^2}{4} = y^2 + yp + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 = 2py.$$

Esta é a equação da parábola nessas condições.

*Exemplo:* A equação  $x^2 + 2y = 0$  é uma parábola com vértice na origem, eixo de simetria na vertical e concavidade voltada para baixo, pois  $x^2 + 2y = 0 \rightarrow x^2 = -2y \rightarrow 2p = -2 \rightarrow p = -1$ .

**Figura 8.** Gráfico da equação  $x^2 + 2y = 0$ .

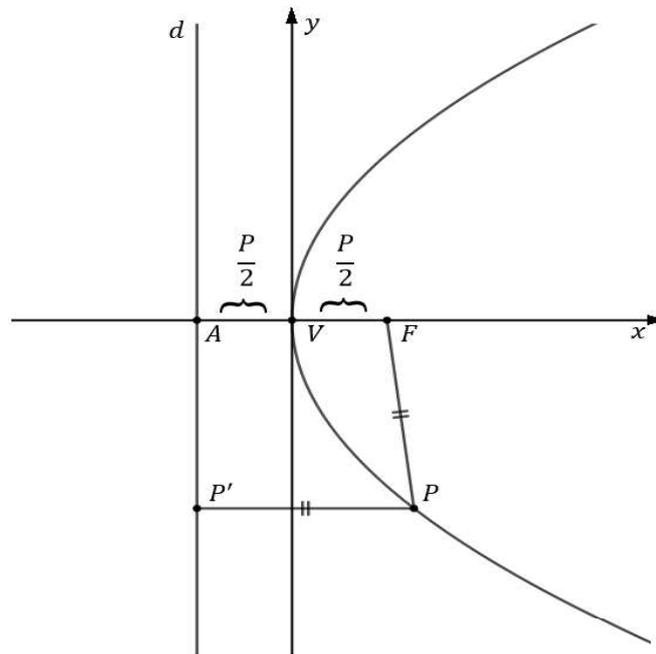


Fonte: Construído pela autora no GeoGebra

***Equação da parábola de vértice na origem e eixo coincidente com o eixo das abscissas:***

Nessas condições, tomando-se o foco no semieixo positivo de  $x$ ,  $F$  assume as coordenadas  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  e a diretriz passa a ser a reta vertical de equação  $d: x = -\frac{p}{2}$ . Seja  $P$  o ponto de coordenadas  $(x, y)$  e  $P'$  o ponto de coordenadas  $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$  como mostra a figura 9.

**Figura 9.** Parábola com vértice na origem e eixo representado pela abscissa  $x$



Fonte: Construído pela autora no GeoGebra

Por definição, para que  $P$  pertença a parábola, devemos ter  $d_{(F,P)} = d_{(P,P')}$ . Portanto,

$$d_{(F,P)} = d_{(P,P')}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

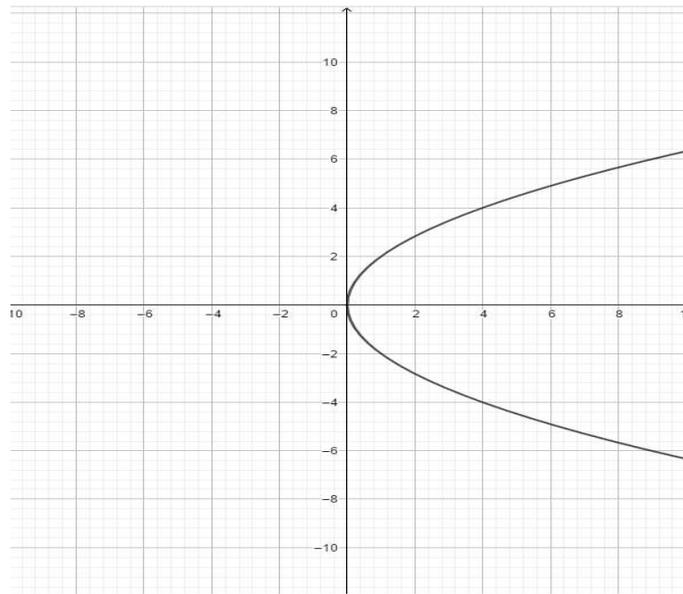
$$x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$$

$$\mathbf{y^2 = 2px.}$$

Esta é a equação reduzida da parábola com vértice na origem e eixo sobre o eixo das abscissas.

*Exemplo:* A equação  $y^2 - 4x = 0$  é uma parábola com vértice na origem, eixo de simetria na horizontal, concavidade voltada para a direita e  $p = 2$ , pois  $y^2 - 4x = 0 \rightarrow y^2 = 4x \rightarrow 2p = 4 \rightarrow p = 2$ .

**Figura 10.** Gráfico da equação  $y^2 - 4x = 0$ .



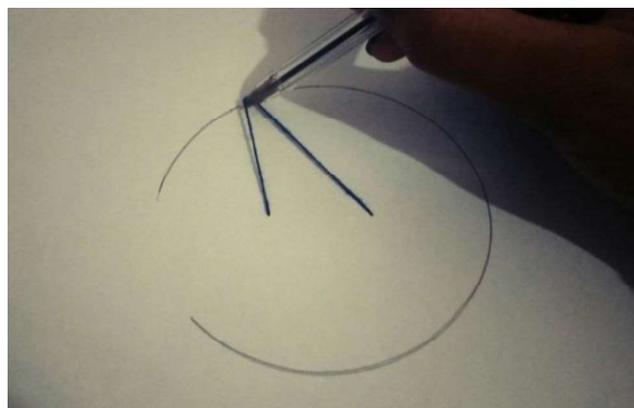
Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### 3.1.2 Elipse

Elipse é o lugar geométrico no plano dado pelo conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante e maior que a distância entre os dois pontos.

Um experimento prático pode ser realizado para interpretar a definição. Fixa-se uma corda a dois pontos de modo que o comprimento da corda fixada seja maior que a distância entre os pontos. Deslocando um lápis de maneira a manter a corda sempre esticada, obtém-se o desenho de uma elipse, já que o comprimento do barbante é fixo.

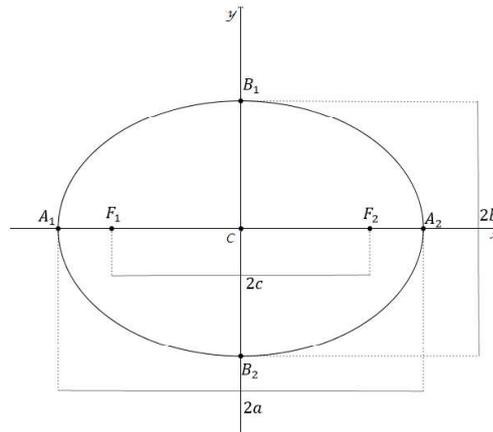
**Figura 11.** Desenho de uma elipse utilizando uma corda fixada a dois pontos



Fonte: Arquivo da autora

A elipse se parece com um círculo achatado. É fácil perceber que a figura possui dois eixos de simetria (figura 12), sendo eles pertencentes à reta que passa pelos pontos  $F_1$  e  $F_2$ , (chamados de focos da elipse) e à reta perpendicular a esta que passa pelo ponto médio do segmento que liga os focos (centro da elipse, representado na figura pelo ponto  $C$ ).

**Figura 12.** Elementos da elipse



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

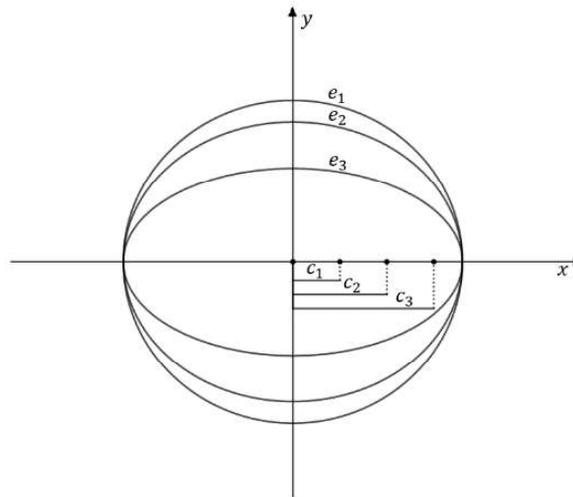
Os parâmetros da curva são dados pelos números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  da figura. O segmento  $A_1A_2$ , chamado eixo maior, e o segmento  $B_1B_2$ , chamado eixo menor, possuem comprimento  $2a$  e  $2b$  respectivamente. A distância entre os dois focos, chamada distância focal, tem comprimento igual a  $2c$ . Os pontos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  são os vértices da elipse.

É possível afirmar que a soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos seus focos é sempre igual ao comprimento do eixo maior, ou seja,  $2a$ . Para confirmar essa afirmação, basta visualizar que a soma das distâncias do ponto  $A_2$  aos focos será dada pela soma  $2c + 2F_2A_2$  ou seja, a distância focal mais duas vezes a distância de  $F_2$  a  $A_2$ , que é a mesma distância de  $F_1$  a  $A_1$ , por simetria. Essa soma é obviamente igual a  $2a$ , que é o comprimento do eixo maior.

Tem-se ainda uma importante característica da elipse, denominada excentricidade. A excentricidade (simbolizada por  $e$ ) é um número real positivo, dado pela razão:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Por construção, a distância focal  $2c$  é tal que  $0 \leq c < a$ , e assim  $0 \leq e < 1$ . Para ilustrar a influência da excentricidade no formato dessa curva, vamos tomar três elipses com comprimento do eixo maior fixos e a distância focal variável, como visto na figura 13.

**Figura 13.** Excentricidade da elipse

Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

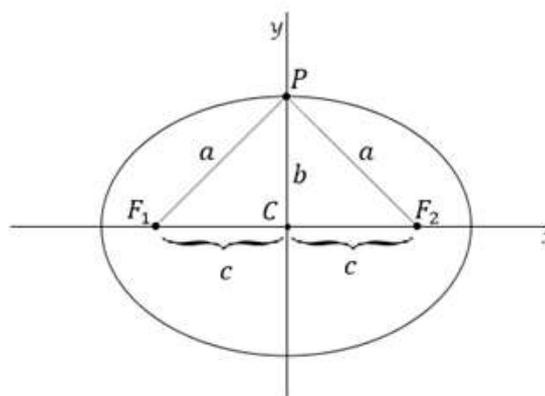
Temos, nessa situação,

$$c_1 < c_2 < c_3 \Rightarrow \frac{c_1}{a} < \frac{c_2}{a} < \frac{c_3}{a} \Rightarrow e_1 < e_2 < e_3.$$

É possível notar que quanto maior a excentricidade (ou seja, quanto mais a excentricidade se aproxima de 1), mais achatada é a elipse.

### ***Equação da elipse com centro na origem***

Considere uma elipse com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e eixo maior sobre o eixo  $x$ .

**Figura 14.** Elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo  $x$ 

Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer da elipse. Tem-se para as coordenadas dos focos,  $F_1$  e  $F_2$ , os pontos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Como  $d_{(F_1, P)} + d_{(P, F_2)} = 2a$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}d(F_1, P) + d(P, F_2) &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado teremos:

$$\begin{aligned}x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\ a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} &= a^2 - cx.\end{aligned}$$

Elevando novamente os dois lados da equação ao quadrado teremos:

$$\begin{aligned}a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2).\end{aligned}$$

Como podemos notar na figura 14 que o triângulo  $PCF_2$  é retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

Substituindo esse valor na equação anterior teremos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $a^2b^2$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esta é a equação reduzida da elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo  $x$ .

*Exemplo:* A equação  $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$  é uma elipse com centro na origem, eixo maior na horizontal,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = \sqrt{5}$  e  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , pois

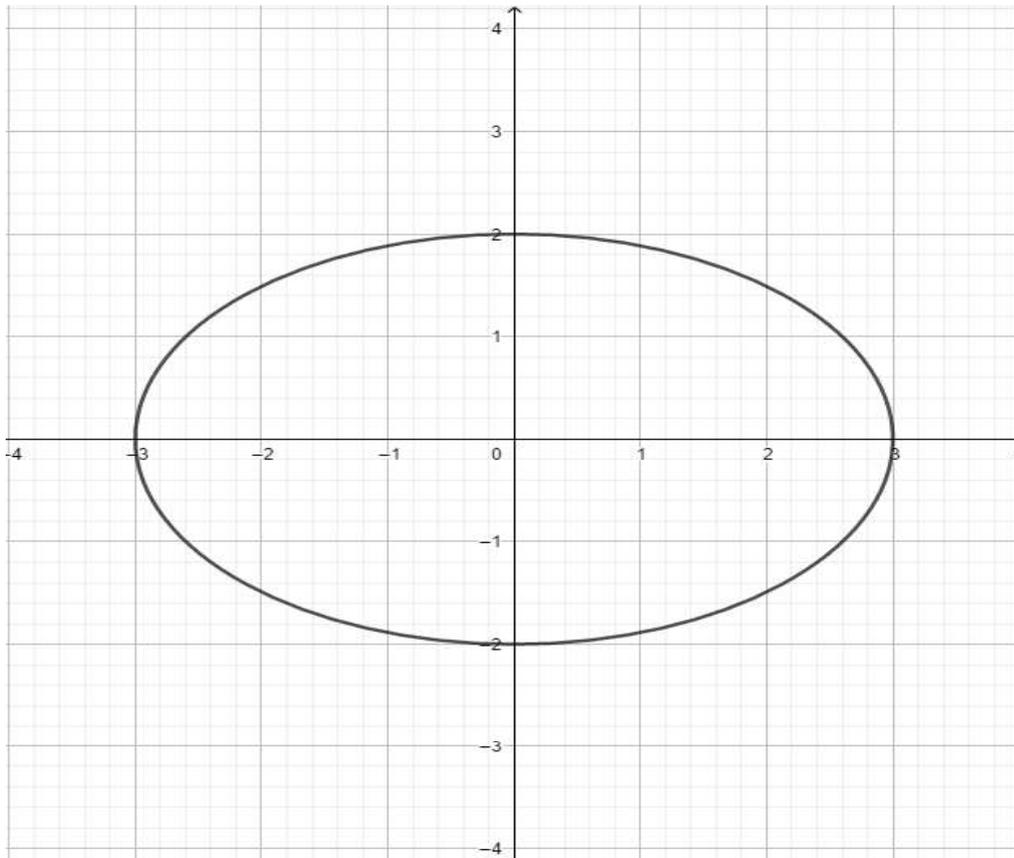
$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

e como,

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 9 - 4 \rightarrow c = \sqrt{5}$$

temos  $e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**Figura 15.** Gráfico da equação  $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ .



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

De modo análogo, obtém-se a equação,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

para a elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo  $y$ .

*Exemplo:* A equação  $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$  é uma elipse com centro na origem, eixo maior na vertical,  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,  $c = \sqrt{21}$  e  $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$ , pois,

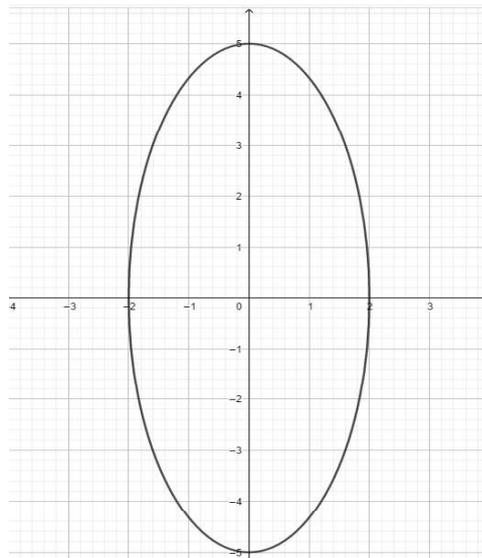
$$25x^2 + 4y^2 - 100 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

e como

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 25 - 4 \rightarrow c = \sqrt{21},$$

temos  $e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{\sqrt{21}}{5}$ .

**Figura 16.** Gráfico da equação  $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$



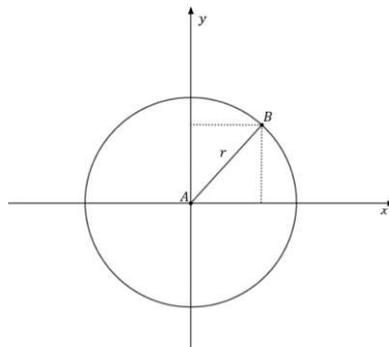
Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### ***O caso particular da circunferência***

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, denominado centro da circunferência.

A circunferência é um caso particular de elipse, na qual a distância de um dos vértices do eixo maior ao centro da elipse é igual à distância de um dos vértices do eixo menor ao centro, ou seja,  $a = b$ , e como os focos coincidentes com o centro da curva,  $c = 0$ . Nesse caso temos que a circunferência é uma elipse com excentricidade igual a zero.

**Figura 17.** Circunferência com centro A na origem



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Tomando-se os pontos  $A(x_0, y_0)$  e  $B(x, y)$ , temos que a distância  $d(A, B)$  é igual ao raio  $r$  da circunferência, e assim:

$$d_{(A,B)}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

e como,

$$d_{(A,B)} = r$$

então

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Entretanto, sabendo-se que o ponto  $A$ , centro da circunferência, está sobre a origem, tem-se  $A(x_0, y_0) = A(0,0)$ . Portanto, a equação assume a seguinte forma:

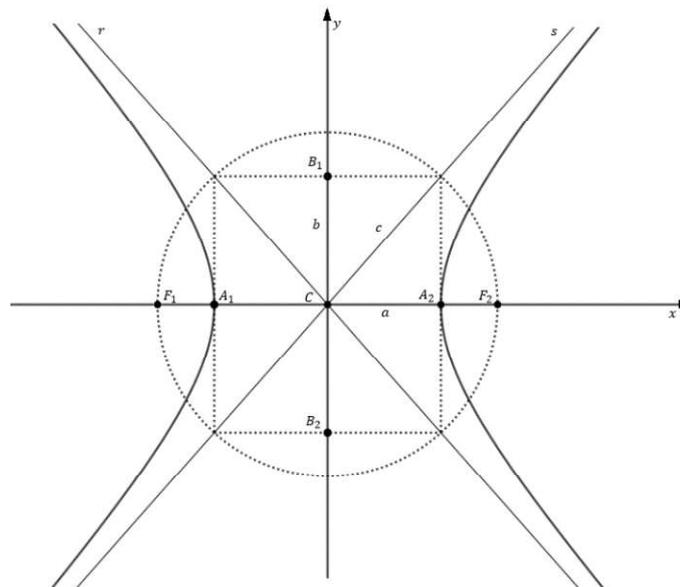
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

e assim obtém-se a equação reduzida da circunferência de raio  $r$  e centro na origem.

### 3.1.3 Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico no plano dado pelos pontos cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias em relação a dois pontos fixos (os focos) é constante e menor que a distância entre focos.

**Figura 18.** Elementos da hipérbole



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Na figura 18 estão representados os principais elementos da hipérbole e também seus parâmetros:

- Focos: os pontos  $F_1$  e  $F_2$ . A distância entre esses pontos é denominada distância focal e  $d(F_1, F_2) = 2c$ .
- Centro: o ponto médio do segmento  $F_1F_2$
- Vértices: os pontos  $A_1$  e  $A_2$
- Eixo real: o segmento  $A_1A_2$ , de comprimento  $2a$
- Eixo imaginário: segmento  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$ .
- Retângulo de Referência: retângulo de lados  $2a$  e  $2b$ , definido pela interseção da circunferência de diâmetro igual a distância focal, com centro em  $C$  e as retas perpendiculares ao eixo real, passando pelos vértices.

A quantidade  $e$ , definida pela relação:

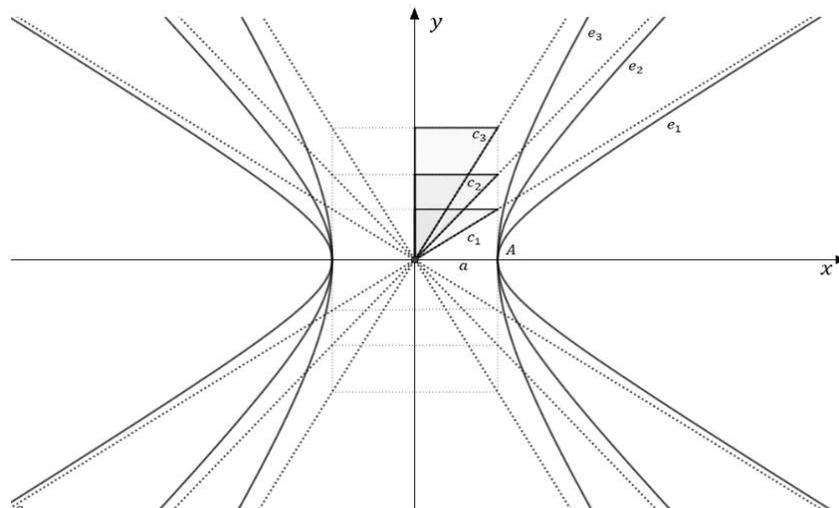
$$e = \frac{c}{a}$$

em que  $a$  é metade da distância do eixo real, e  $c$  metade da distância dos focos é chamada de excentricidade da hipérbole. O valor da distância focal, por definição, é sempre maior que a distância do eixo real. Sendo assim, a excentricidade é sempre maior que 1. Pela figura 19, pode-se notar que:

$$c_1 < c_2 < c_3 \Rightarrow \frac{c_1}{a} < \frac{c_2}{a} < \frac{c_3}{a} \Rightarrow e_1 < e_2 < e_3.$$

Ou seja, quanto maior a excentricidade, mais “abertos” são os ramos da hipérbole.

**Figura 19.** Excentricidade da hipérbole



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### ***Equação da hipérbole com centro na origem***

Considere uma hipérbole centrada na origem e com seu eixo real (o eixo que contém os focos da curva) coincidente com o eixo  $x$ . Seja  $a$  um número real tal que  $2a < 2c$ . É fácil verificar que, de forma semelhante àquela feita no estudo da elipse, para que um ponto  $P$  pertença à hipérbole, este deve obedecer a relação:

$$|d_{(P,F_1)} - d_{(P,F_2)}| = 2a,$$

e assim,

$$d_{(P,F_1)} - d_{(P,F_2)} = \pm 2a.$$

Quando  $P$  estiver no ramo da direita, a diferença é positiva, caso contrário será negativa. Seja  $P$  o ponto  $P(x, y)$ ,  $F_1$  o ponto  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2$  o ponto  $F_2(c, 0)$  como mostrado na figura 13. Considerando que  $P$  está no ramo da direita temos que:

$$\begin{aligned} d_{(P,F_1)} - d_{(P,F_2)} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} &= -4a^2 + 4cx \\ a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} &= -a^2 + cx. \quad (I) \end{aligned}$$

Considerando que  $P$  está no ramo da esquerda, temos que:

$$\begin{aligned} d_{(P,F_1)} - d_{(P,F_2)} &= -2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= -2a \\ \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} &= -2a + \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ -4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} &= -4a^2 + 4cx \\ -a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} &= -a^2 + cx. \quad (II) \end{aligned}$$

Elevando novamente os dois lados da equação ao quadrado, em ambas as situações (I) e (II), teremos:

$$\begin{aligned} a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \end{aligned}$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como podemos notar na figura 18, o triângulo  $B_1CA_2$  é retângulo. Usando o teorema de Pitágoras temos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow -b^2 = a^2 - c^2$$

Substituindo esse valor na equação anterior, obtém-se:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

e dividindo ambos os lados da equação por  $-a^2b^2$ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta é a equação reduzida da hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo  $x$ . De modo análogo, obtém-se a equação,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

para a hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo  $y$ . Os ramos da hipérbole tendem a tangenciar duas retas no infinito. Essas retas representadas na figura 18 por  $r$  e  $s$ , são chamadas de assíntotas da hipérbole e são definidas pelas equações:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

quando seu eixo real está sobre o eixo  $x$  e:

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

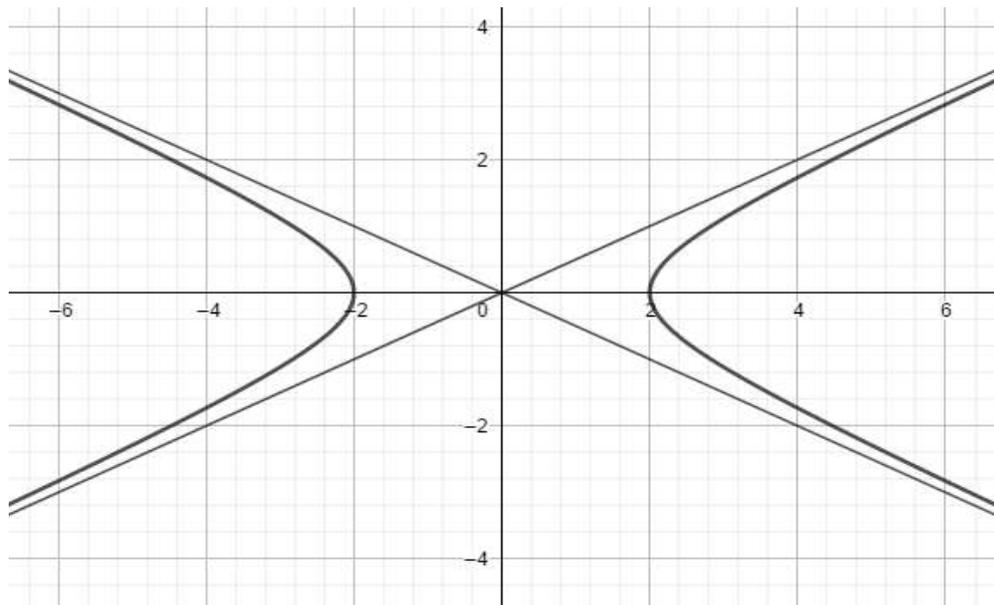
quando seu eixo real está sobre o eixo  $y$ .

*Exemplo:* A equação  $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$  é uma hipérbole com centro na origem, eixo real na horizontal,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{5}$  e  $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Pois,

$$x^2 - 4y^2 - 4 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

e como  $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 4 + 1 \rightarrow c = \sqrt{5}$ . Tem-se ainda  $e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}$  e assíntotas  $y = \pm \frac{1}{2}x$ .

**Figura 20.** Gráfico da equação  $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$  e suas assíntotas.

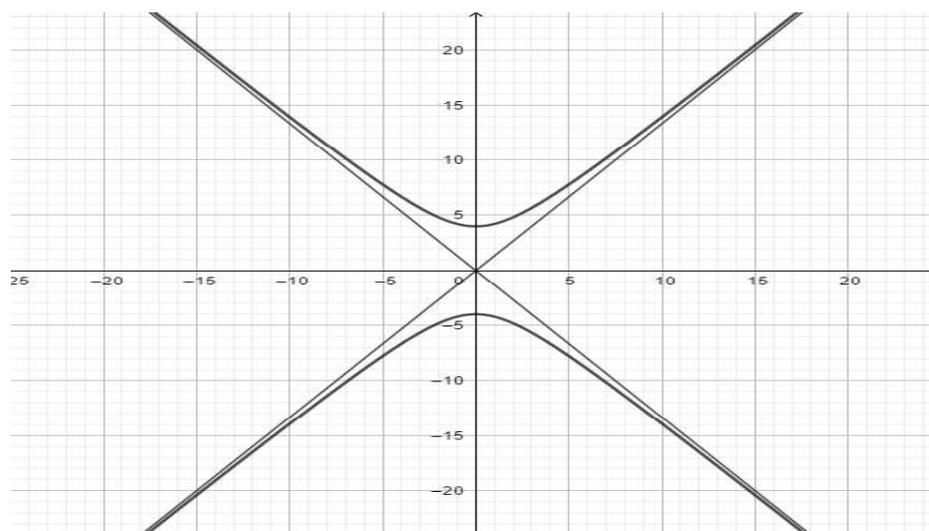


Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

*Exemplo:* A equação  $-16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$  é uma hipérbole com centro na origem, eixo real na vertical,  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ ,  $e = \frac{5}{4}$  e assíntotas  $y = \pm \frac{4}{3}x$ , pois

$$-16x^2 + 9y^2 - 144 = 0 \rightarrow -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

**Figura 21.** Gráfico da equação  $-16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$  e suas assíntotas.

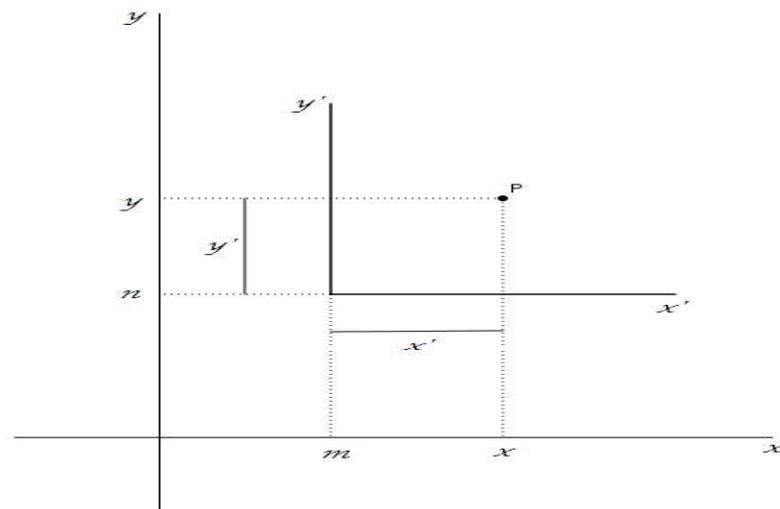


Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### 3.2 CÔNICAS COM TRANSLAÇÃO EM RELAÇÃO À ORIGEM, COM SIMETRIAS HORIZONTAL / VERTICAL

Esse tópico abordará as equações das cônicas com centro ou vértice fora da origem, mantendo-se as simetrias na horizontal/vertical, ou seja, sem rotação de eixos. Para todos os casos, será utilizada a translação do eixo de coordenadas  $xy$  para obter as equações. Na translação, toma-se um ponto qualquer  $O'(m, n)$  do plano  $xy$  como nova origem do sistema de coordenadas transladado  $x'y'$ .

**Figura 22.** Translação de eixos



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Dado um ponto qualquer do plano  $P(x, y)$ , suas coordenadas em relação ao novo sistema  $x'y'$  será  $P(x', y')$ . Pela figura 22, é possível notar que:

$$x = x' + m \text{ e } y = y' + n$$

e assim,

$$x' = x - m \text{ e } y' = y - n.$$

Portanto tem-se que  $P(x', y') = P(x - m, y - n)$ .

### 3.2.1 Equação da parábola

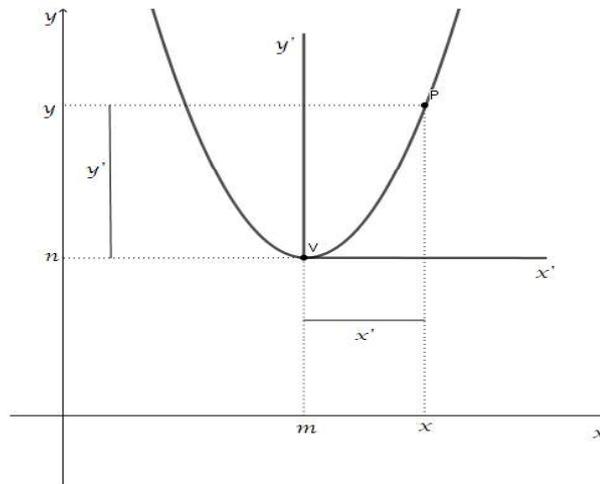
Tomando-se o vértice  $V$  da parábola como origem do sistema  $x'y'$  e  $P$  um ponto qualquer da parábola, tem-se que  $V$  é o ponto de coordenadas  $(m, n)$  e  $P(x', y') = P(x - m, y - n)$  como mostrado anteriormente. Sabendo que a equação da parábola para o sistema  $x'y'$  é:

$$x'^2 = 2py'$$

tem-se que a equação para o sistema de coordenadas  $xy$  será

$$(x - m)^2 = 2p(y - n).$$

**Figura 23.** Parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo ao eixo  $y$



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Esta é a equação para uma parábola qualquer de vértice  $V(m, n)$  e eixo de simetria paralelo ao eixo  $y$ . De modo análogo, para uma parábola com eixo de simetria paralelo a  $x$  de equação  $y'^2 = 2px'$ , obtém-se:

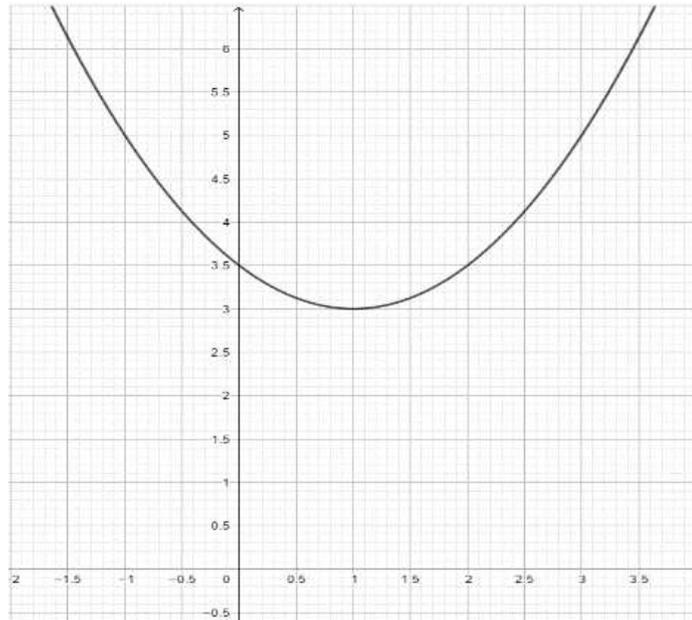
$$(y - n)^2 = 2p(x - m).$$

Exemplo: A equação  $x^2 - 2x - 2y + 7 = 0$  é uma parábola transladada com vértice  $V(1,3)$ , eixo de simetria paralelo a  $y$  e  $p = 1$ . Pois,

$$x^2 - 2x - 2y + 7 = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 2y - 7 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2y - 7 + 1 \rightarrow$$

$$(x - 1)^2 = 2(y - 3)$$

**Figura 24.** Gráfico da equação  $x^2 - 2x - 2y + 7 = 0$ .

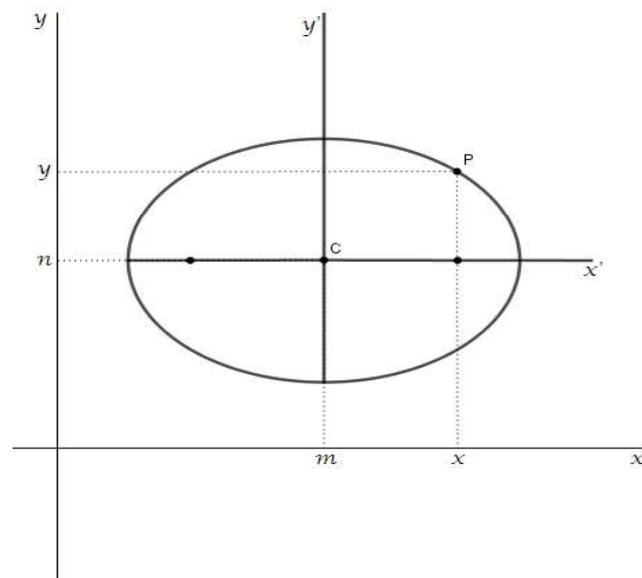


Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### 3.2.2 Equação da elipse

Seja a elipse de centro  $C(m, n)$  fora da origem e com eixo maior paralelo ao eixo  $x$ , como mostra a figura 25:

**Figura 25.** Elipse com centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo  $x$



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

A equação com o processo de translação será dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

e se torna, pela substituição de variáveis,

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

De maneira análoga, para uma elipse com eixo maior paralelo ao eixo  $y$  e centro fora da origem tem-se

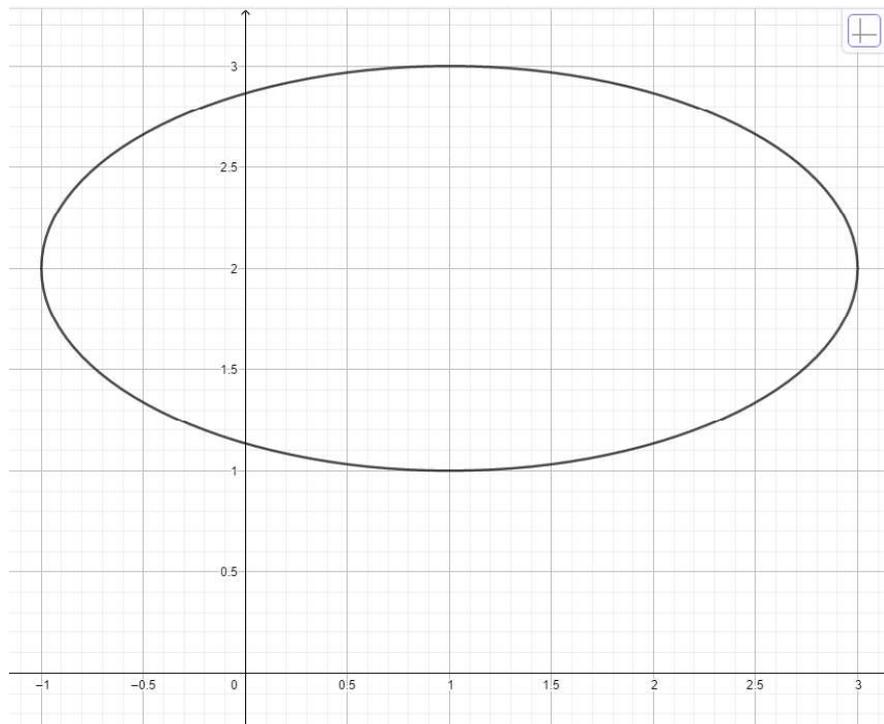
$$\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1.$$

Exemplo: A equação  $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$  é uma elipse com eixo maior paralelo a  $x$ , centro  $C(1,2)$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{3}$  e  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Pois,

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0 &\rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4(y^2 - 4y + 4) = -13 + 1 + 16 \\ &\rightarrow (x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 4 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{1} = 1.$$

**Figura 26.** Gráfico da equação  $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ .

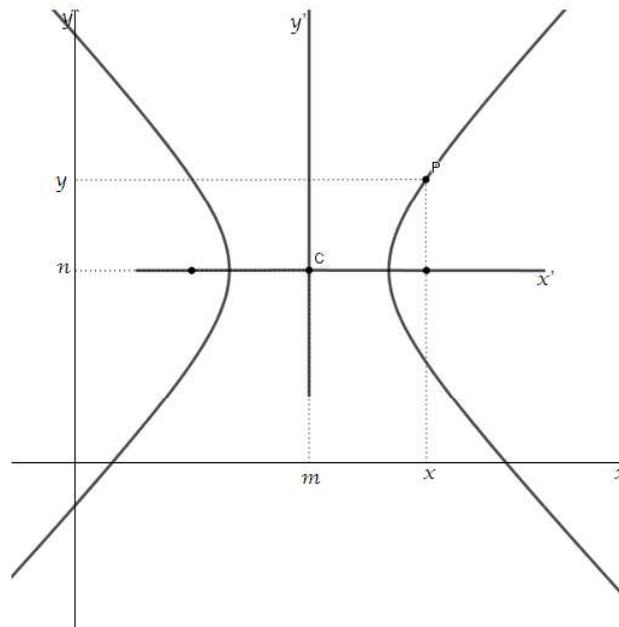


Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### 3.2.3 Equação da hipérbole

Considere uma hipérbole de centro  $C(m, n)$  fora da origem e eixo real paralelo ao eixo  $x$ , como mostra a figura a seguir:

**Figura 27.** Hipérbole com centro fora da origem e eixo real paralelo ao eixo  $x$



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Com o mesmo procedimento de translação utilizado para a parábola e elipse, a equação:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

da hipérbole se torna:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

De maneira análoga, para uma hipérbole de eixo real paralelo ao eixo  $y$  e centro  $C(m, n)$  fora da origem tem-se,

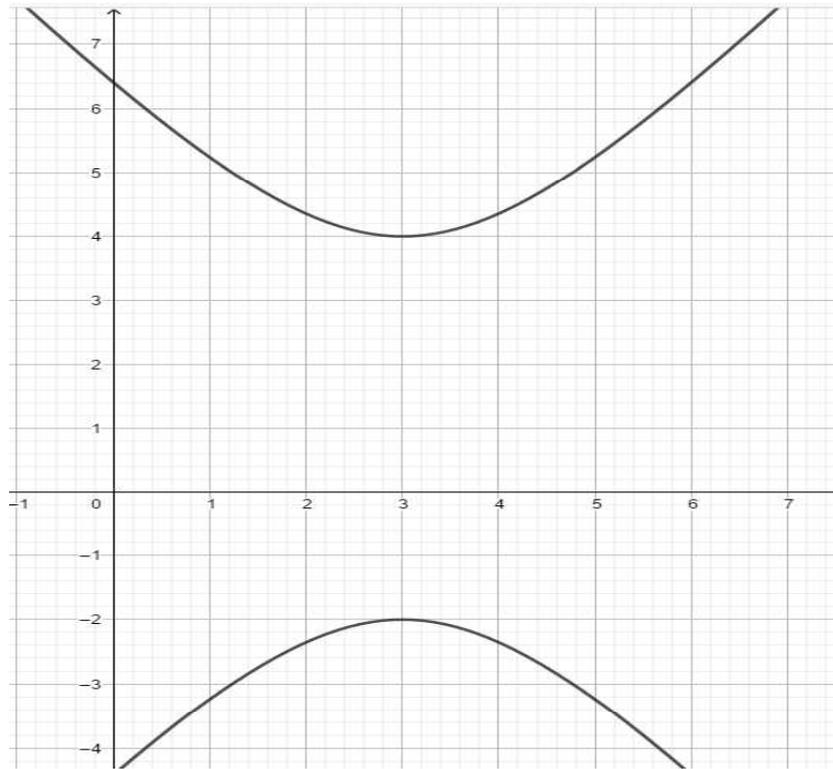
$$\frac{(y - n)^2}{a^2} - \frac{(x - m)^2}{b^2} = 1.$$

*Exemplo:* A equação  $-9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y - 113 = 0$  é uma hipérbole com eixo real paralelo a  $y$ , centro  $C(3,1)$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = \sqrt{13}$  e  $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$ . Pois,

$$\begin{aligned}
 -9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y - 113 = 0 &\rightarrow -9(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 - 2y + 1) \\
 &= 113 - 81 + 4 \rightarrow -9(x - 3)^2 + 4(y - 1)^2 = 36 \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$-\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1.$$

**Figura 28.** Gráfico da equação  $-9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y - 113 = 0$ .



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

## 4 CÔNICAS ROTACIONADAS – FORMAS QUADRÁTICAS EM $\mathbb{R}^2$

Nesta etapa, será apresentado o comportamento das equações das cônicas com eixos de simetria não dispostos na horizontal ou vertical, ou seja, não paralelos aos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente. Será realizada ainda uma breve revisão de alguns conceitos de Álgebra Linear necessários para compreensão do teorema das formas quadráticas. Alguns dos teoremas e algumas propriedades dessa construção serão demonstrados, outros tópicos que apresentem um maior grau de abstração serão ilustrados através de exemplos, e outros serão omitidos para que o trabalho não se torne exaustivo. De qualquer forma, todas as demonstrações podem ser vistas em [1] ou [8].

### 4.1 OPERADORES LINEARES

Uma transformação  $T$  é uma função entre espaços vetoriais, ou seja, que associa elementos de um espaço vetorial  $U$ , chamado de domínio da transformação, a elementos de um espaço vetorial  $V$ , chamado de contra domínio da transformação, e representada da seguinte forma:

$$T: U \rightarrow V.$$

Para que uma transformação seja linear, é necessário que satisfaça duas propriedades:

- $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in U;$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall u \in U \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Operador linear é o nome dado ao caso particular de uma transformação linear de um espaço vetorial  $V$  em si mesmo, ou seja  $T: V \rightarrow V$ . Nesse trabalho, serão abordados principalmente os operadores em  $\mathbb{R}^2$ , visto que o propósito é o estudo de curvas planas nesse espaço vetorial.

### 4.1.1 Matriz de uma Transformação Linear

Seja  $T: U \rightarrow V$  uma transformação linear,  $U$  um espaço  $n$ -dimensional e  $V$  um espaço  $m$ -dimensional,  $B$  uma base de  $U$  e  $C$  uma base de  $V$ . Existe uma matriz  $A_{m \times n}$  que representa a matriz de  $T$  em relação às bases  $B$  e  $C$ , tal que:

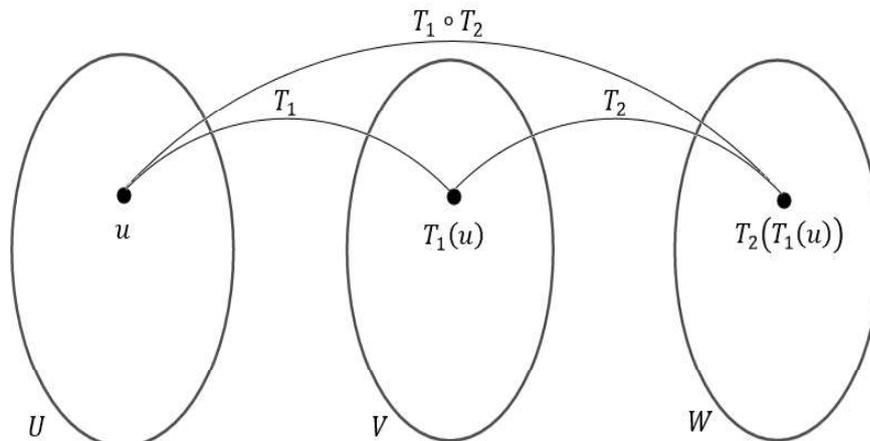
$$[T(u)]_C = A \cdot [u]_B,$$

em que  $[T(u)]_C$  é representação matricial da imagem  $T(u)$  com relação a base  $C$  do contra domínio de  $T$  e  $[u]_B$  o vetor  $u$  escrito matricialmente na base  $B$  do domínio de  $T$ .

### 4.1.2 Aplicação Composta de uma Transformação Linear

Considere duas transformações lineares  $T_1: U \rightarrow V$  e  $T_2: V \rightarrow W$ , a transformação  $T_2(T_1(u))$  é uma aplicação composta de  $T_2$  com  $T_1$ , representada por  $T_2 \circ T_1$ . Essa transformação parte diretamente do espaço  $U$  e leva os vetores desse espaço para  $W$ , como mostrado na figura 29. Tem-se assim que  $(T_2 \circ T_1): U \rightarrow W$  e  $T_2: V \rightarrow W$ , levam  $u$  e  $T_1(u)$  à uma mesma imagem em  $W$ , ou seja,  $(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)), \forall u \in U$ . É possível mostrar que a composição de duas transformações lineares é linear, cuja matriz é dada justamente pelo produto das matrizes de  $T_2$  e  $T_1$ , nessa ordem.

**Figura 29.** Esquema da aplicação composta

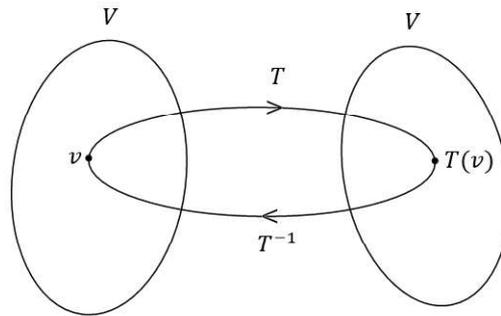


Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### 4.1.3 Operadores invertíveis

Caso um operador  $T$  seja bijetor, ou seja, se a transformação linear  $T: V \rightarrow V$  for injetora e sobrejetora, existirá uma aplicação inversa  $T^{-1}: V \rightarrow V$  que realiza uma correspondência inversa, associando a cada vetor transformado  $T(v)$  o seu correspondente do domínio de  $T$ , ou seja, o próprio  $v$ . Diz-se nesses casos que  $T$  é invertível, e sua inversa é  $T^{-1}$ .

**Figura 30.** Diagrama de uma transformação com sua inversa



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Propriedades dos operadores invertíveis:

- i) Se  $T$  é invertível e  $T^{-1}$  é sua inversa, então  $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ .
- ii) Se  $T$  é invertível,  $T$  transforma base em base, isto é, se  $B$  é uma base de  $V$ ,  $T(B)$  também é base de  $V$ .
- iii) Se  $T$  é invertível e  $B$  uma base de  $V$ , então  $T^{-1}: V \rightarrow V$  é linear e:

$$[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$$

ou simplesmente

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

Portanto

$$[T][T^{-1}] = [T \circ T^{-1}] = [I]$$

e como consequência, temos:  $T$  é invertível se, e somente se,  $\det[T] \neq 0$ .

#### 4.1.4 Matriz Mudança de base

Dado um espaço vetorial  $V$  e duas bases  $A$  e  $B$  de  $V$ , é possível relacionar um vetor  $v \in V$  na base  $A$  a um vetor  $v \in V$  na base  $B$ , através de uma matriz conhecida como matriz mudança de base. Vamos considerar uma situação em que  $\dim V = 2$ . O problema para os espaços de dimensão  $n$  é análogo.

Seja um operador  $T: V \rightarrow V$  e as bases  $A = \{v_1, v_2\}$  para o domínio e  $B = \{w_1, w_2\}$  para o contradomínio desse operador. Dado um vetor  $v \in V$ , este será combinação linear dos vetores das bases  $A$  e  $B$ :

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 \text{ ou } v_A = (x_1, x_2) \text{ (I)}$$

e

$$v = y_1 w_1 + y_2 w_2 \text{ ou } v_B = (y_1, y_2) \text{ (II)}$$

Por sua vez, os vetores da base  $A$  podem ser escritos com relação à base  $B$ , isto é:

$$v_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2$$

$$v_2 = a_{12} w_1 + a_{22} w_2$$

Substituindo-se as expressões acima em (I), tem-se que:

$$v = x_1(a_{11} w_1 + a_{21} w_2) + x_2(a_{12} w_1 + a_{22} w_2)$$

ou

$$v = w_1(a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + w_2(a_{21} x_1 + a_{22} x_2).$$

Comparando com a relação (II):

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

ou simplesmente:

$$[v]_B = [I]_B^A [v]_A$$

sendo a matriz:

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a matriz mudança de base de  $A$  para  $B$ , ou seja, obtemos as coordenadas do vetor  $v$  na base  $B$  a partir do vetor  $v$  na base  $A$  por meio da matriz  $[I]_B^A$ .

Pela propriedade ii) de 4.2.1, como a matriz  $[I]_B^A$ , transforma vetores linearmente independentes da base  $A$  em vetores linearmente independentes da base  $B$ , ela é invertível. Por conseguinte:

$$[v]_B = [I]_B^A [v]_A \Rightarrow [v]_A = ([I]_B^A)^{-1} [v]_B \Rightarrow ([I]_B^A)^{-1} = [I]_A^B,$$

isto é, a inversa da matriz mudança de base de  $A$  para  $B$  é a matriz mudança de base de  $B$  para  $A$ .

*Exemplo:* Considerando as seguintes bases do  $\mathbb{R}^2$ :  $A = \{(1,1), (0,-1)\}$  e  $B = \{(2,-3), (-3,5)\}$ .

- Determinar a matriz mudança de base  $[I]_B^A$ .
- Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular  $v_B$ , sendo  $v_A = (2,3)$ .
- Determinar a matriz mudança de base de  $B$  para  $A$ .

*Solução:*

a)

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

sendo  $[v_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$  e  $[v_2]_B = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ . Escrevendo  $v_1$  em relação à base  $B$ , obtém-se:

$$v_1 = (1,1) = a_{11}(2,-3) + a_{21}(-3,5)$$

sistema cuja solução nos fornece  $a_{11} = 8$  e  $a_{21} = 5$ . E expressando  $v_2$  em relação à base  $B$ , obtém-se:

$$v_2 = (0,-1) = a_{12}(2,-3) + a_{22}(-3,5)$$

sistema cuja solução nos fornece  $a_{12} = -3$  e  $a_{22} = -2$ . Portanto:

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) Pela fórmula  $[v]_B = [I]_B^A[v]_A$  tem-se que:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Portanto  $v_B = (7, 4)$ .

c) Por  $([I]_B^A)^{-1} = [I]_A^B$  temos que:

$$[I]_A^B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

e portanto

$$[I]_A^B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

É possível obter a matriz mudança de base de outra maneira, através de uma relação que utiliza a base canônica do espaço em que está inserido o operador identidade  $I$  e a ideia de composição de operadores, descrita em 4.1.2. O exemplo anterior irá ilustrar tal situação.

Considerando as bases  $A$  e  $B$  do exemplo e sendo  $C = \{(1,0), (0,1)\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ . Escrevendo  $v_1$  e  $v_2$  em relação a base canônica temos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \\ v_2 &= (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1) \end{aligned}$$

e portanto:

$$[I]_C^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o mesmo raciocínio, temos que:

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo  $[I]_C^A = A$  e  $[I]_C^B = B$  e lembrando das relações  $[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta [T_1]_\beta^\alpha$  da composta de uma transformação linear e  $([I]_B^A)^{-1} = [I]_A^B$  da matriz mudança de base, pode-se escrever:

$$[I]_A^B = [I \circ I]_A^B = [I]_C^B [I]_C^A = ([I]_C^B)^{-1} [I]_C^A = B^{-1}A.$$

Portanto,

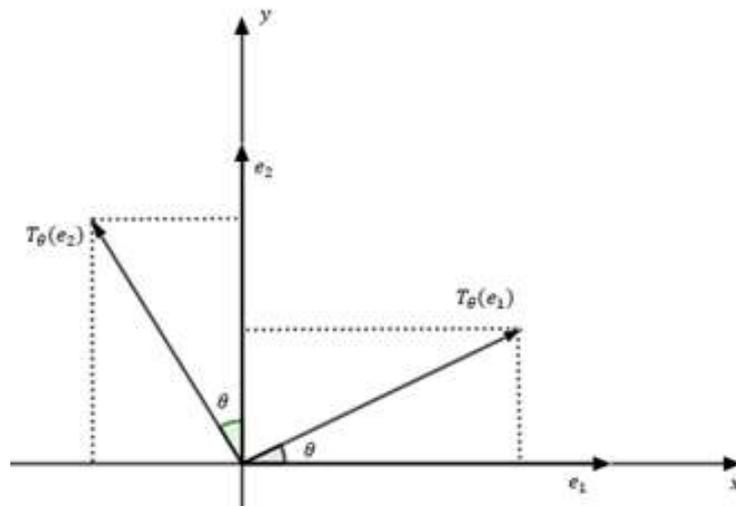
$$[I]_A^B = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

que é exatamente a matriz encontrada para  $[I]_A^B$  no item a).

#### 4.1.5 Matriz de Rotação

Considere um operador linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que gira cada vetor  $v \in \mathbb{R}^2$  em um ângulo  $\theta$ , ou seja, o operador que efetua a rotação por  $\theta$  do plano cartesiano  $xy$  em torno da origem,  $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Figura 31.** Rotação dos vetores da base canônica



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

Como o módulo dos vetores  $e_1$  e  $e_2$  são iguais a 1, por trigonometria temos que  $T_\theta(e_1) = (\cos \theta, \sin \theta)$  e  $T_\theta(e_2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Ou seja:

$$\begin{aligned} T_\theta(e_1) &= \cos \theta (1,0) + \sin \theta (0,1) \\ T_\theta(e_2) &= -\sin \theta (1,0) + \cos \theta (0,1) \end{aligned}$$

e assim, a matriz canônica do operador  $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Essa matriz é chamada de matriz de rotação de um ângulo  $\theta$ , e portanto  $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dado por  $T_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ . Sendo  $C = \{e_1, e_2\}$  a base canônica que define o sistema de coordenadas retangular  $xOy$ , a base  $P = \{(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)\}$  define um sistema de coordenadas retangulares  $x'Oy'$  que resulta da rotação de  $xOy$  por um ângulo  $\theta$ . A matriz rotação pode ser considerada, então, uma matriz mudança de base da base  $P$  para a base canônica  $C$ , pois:

$$\begin{aligned} (\cos \theta, \sin \theta) &= \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \\ (-\sin \theta, \cos \theta) &= -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \end{aligned}$$

e portanto

$$[I]_C^P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Isso significa que, sabendo-se as coordenadas de um vetor  $v$  na base  $P$  é possível encontrar suas coordenadas na base canônica através de  $[I]_C^P$ , ou seja:

$$[v]_C = [I]_C^P [v]_P$$

Da mesma forma, tendo o vetor  $v$  na base canônica  $C$  encontrar suas coordenadas na base  $P$  através da matriz  $[I]_P^C = ([I]_C^P)^{-1}$ , ou seja:

$$[v]_P = [I]_P^C [v]_C.$$

#### 4.1.6 Matrizes semelhantes

Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear e  $A$  e  $B$  duas bases de  $V$ . As matrizes  $[T]_A^A$  e  $[T]_B^B$  ou simplesmente  $[T]_A$  e  $[T]_B$  do operador  $T$  em relação as bases  $A$  e  $B$ , respectivamente, são ditas semelhantes se, e somente se, existe uma matriz  $M$  invertível tal que:

$$[T]_B = M^{-1}[T]_A M,$$

em que  $M$  é a matriz mudança de base de  $B$  para  $A$ , ou seja  $M = [I]_A^B$ . Como foi visto em 4.1.1:

$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A \Rightarrow [T(v)]_A = [T]_A [v]_A$  (I) e  $[T(v)]_B = [T]_B [v]_B$  (II),  
e por 4.2.2, sabe-se que

$$[v]_A = [I]_A^B [v]_B \text{ (III) e } [T(v)]_A = [I]_A^B [T(v)]_B.$$

Substituindo  $[v]_A$  e  $[T(v)]_A$  em (I), tem-se:

$$[I]_A^B [T(v)]_B = [T]_A [I]_A^B [v]_B.$$

Como  $[I]_A^B$  é invertível (4.2.2):

$$[T(v)]_B = ([I]_A^B)^{-1} [T]_A [I]_A^B [v]_B.$$

Comparando-se com a (II), obtém-se:

$$[T]_B = ([I]_A^B)^{-1} [T]_A [I]_A^B$$

ou simplesmente,

$$[T]_B = M^{-1} [T]_A M.$$

Através dessa relação, é possível demonstrar que  $[T]_A$  e  $[T]_B$  possuem o mesmo determinante, pois:

$$[T]_B = M^{-1} [T]_A M \Rightarrow M [T]_B = [T]_A M \Rightarrow \det M \cdot \det [T]_B = \det [T]_A \cdot \det M,$$

e portanto

$$\det [T]_B = \det [T]_A.$$

*Exemplo:* Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear. Considerando  $A$  como a base canônica do  $\mathbb{R}^2$  e  $B = \{(4,1), (-11, -3)\}$ . Sabendo que  $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , determinar  $[T]_A$  utilizando a relação entre matrizes semelhantes.

*Solução:* Tem-se que  $[T]_A = M^{-1}[T]_B M$  e  $M = [I]_B^A = B^{-1}A$  (por 4.2.2).  $B = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  e sua inversa é  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ . Como  $A$  é base canônica, a matriz  $A$  é identidade, e sendo assim,  $B^{-1}A = B^{-1} = M \rightarrow M^{-1} = B$ . Então:

$$[T]_A = M^{-1}[T]_B M = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

É possível verificar que as matrizes  $[T]_A$  e  $[T]_B$  representam o mesmo operador linear. Tomando um vetor  $v_A = (1,1)$  na base  $A$  e escrevendo esse mesmo vetor na base  $B$ ,  $v_B = (-8, -3)$ . Tem-se que:

$$[T(v_A)] = [T]_A v_A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e

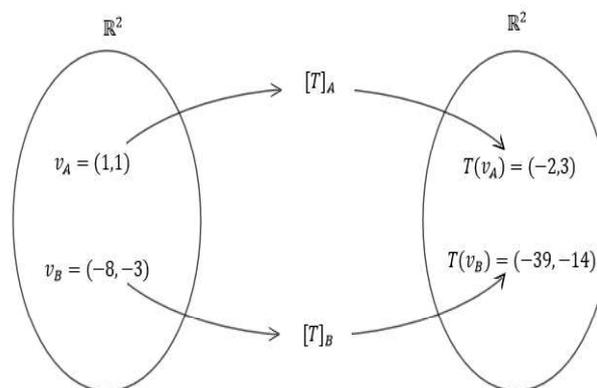
$$[T(v_B)] = [T]_B v_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

O vetor  $T(v_B) = (-39, -14)$  é o vetor  $T(v_A)$  escrito na base  $B$ , pois

$$(-2, 3) = x(4, 1) + y(-11, -3) \Rightarrow \begin{cases} 4x - 11y = -2 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

A solução do sistema é  $x = -39$  e  $y = -14$ , ou seja  $(-2, 3)_A = (-39, -14)_B$ .  $[T]_A$  leva  $v_A$  à sua imagem  $T(v_A)$  e  $[T]_B$  leva  $v_B$  à sua imagem  $T(v_B)$  (figura 30), como  $v_A$  e  $v_B$  são o mesmo vetor escritos em bases diferentes e o mesmo vale para  $T(v_A)$  e  $T(v_B)$ , conclui-se que  $[T]_A$  e  $[T]_B$  representam o mesmo operador linear.

**Figura 32.** Exemplo de matrizes semelhantes



### 4.1.7 Operador ortogonal

Uma matriz  $A$  é dita ortogonal se  $A^t = A^{-1}$ . Caso as colunas de  $A$  sejam formadas por vetores unitários, dizemos que  $A$  é ortonormal. Quando um operador linear  $T: V \rightarrow V$  conserva o módulo dos vetores, ou seja  $|T(v)| = |v|$  ele é chamado de operador ortogonal. Por exemplo, a matriz de rotação do operador linear  $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$[T(x, y)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois como,

$$\begin{aligned} T_\theta(x, y) &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \\ |T_\theta(x, y)| &= \sqrt{(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{x^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{x^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|. \end{aligned}$$

É fácil verificar que, sendo  $T$  a matriz de rotação,  $[T(x, y)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = [T(x, y)]^t$ . Essa propriedade é válida para todos os operadores ortogonais. Por consequência, para esses operadores, tem-se  $[T]^t[T] = I$ . Além disso, é possível mostrar que o determinante de uma matriz ortogonal é sempre 1 ou  $-1$ . Por exemplo,  $\det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ . Se  $T$  é ortogonal e  $\det[T] = 1$ ,  $T$  é uma rotação, como é o caso do exemplo.

É possível verificar também que todo operador ortogonal preserva o produto interno, ou seja,  $u \cdot v = T(u) \cdot T(v)$ . Pode-se verificar facilmente essa afirmação para a matriz de rotação pois, sendo  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$ , tem se que:

$$\begin{aligned}
T(u) \cdot T(v) &= (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \\
&\quad \cdot (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta, x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \\
&= (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta) + (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)(x_2 \sin \theta \\
&\quad + y_2 \cos \theta) \\
&= x_1 x_2 \cos^2 \theta - x_1 y_2 \cos \theta \sin \theta - x_2 y_1 \cos \theta \sin \theta + y_1 y_2 \sin^2 \theta \\
&\quad + x_1 x_2 \sin^2 \theta + x_1 y_2 \cos \theta \sin \theta + x_2 y_1 \cos \theta \sin \theta + y_1 y_2 \cos^2 \theta \\
&= x_1 x_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y_1 y_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = u \cdot v
\end{aligned}$$

e portanto,

$$u \cdot v = T(u) \cdot T(v).$$

#### 4.1.8 Operador simétrico

Um operador  $T: V \rightarrow V$  é simétrico se a matriz que o representa numa base ortogonal  $A$  é simétrica, isto é, se:

$$[T]_A^t = [T]_A.$$

*Exemplo:* O operador  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (-3x + 2y, 2x + y)$  é simétrico pois  $[T] = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [T]^t$ .

Pelo exemplo, é possível verificar que  $T(u) \cdot v = u \cdot T(v)$ , pois sendo  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$ , tem se que:

$$T(u) \cdot v = (-3x_1 + 2y_1, 2x_1 + y_1) \cdot (x_2, y_2) = -3x_1 x_2 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + y_1 y_2$$

e

$$u \cdot T(v) = (x_1, y_1) \cdot (-3x_2 + 2y_2, 2x_2 + y_2) = -3x_1 x_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + y_1 y_2$$

e portanto,

$$T(u) \cdot v = u \cdot T(v),$$

propriedade válida para todos os operadores simétricos.

## 4.2 AUTOVALORES E AUTO VETORES

Seja  $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  um operador linear. Um número real  $\lambda$  será dito um autovalor de  $T$  se existir um vetor não nulo  $v$  em  $\mathbb{V}$  tal que  $T(v) = \lambda v$ . O vetor  $v$  é chamado de auto vetor de  $T$  associado a  $\lambda$ .

Se  $v$  é um autovetor de um operador  $T$  associado a um autovalor  $\lambda$ , então todo múltiplo por escalar de  $v$  é também um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$ . Mais ainda, se  $A(\lambda) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) = \lambda v\}$ , então  $A(\lambda)$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{V}$ , chamado autoespaço de  $T$  associado a  $\lambda$ . Note que  $A(\lambda)$  é formado pelo vetor nulo e por todos os autovetores de  $T$  associados a  $\lambda$ .

### 4.2.1 Determinação de Autovalores e Auto vetores

Sejam  $v$  e  $\lambda$ , respectivamente, um autovetor associado a um autovalor de uma transformação  $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  ( $\dim \mathbb{V} = n$ ) dada por  $T(v) = Av$ . Pela definição:

$$Av = \lambda v \rightarrow Av - \lambda v = 0.$$

Como  $v = Iv$ , sendo  $I$  a matriz identidade de ordem  $n$ ,

$$Av - \lambda Iv = 0 \rightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Para que esse sistema linear assuma soluções além da solução trivial (solução na forma  $v = (0, 0, \dots, 0)$ ), deve-se ter  $\det(A - \lambda I) = 0$ . O determinante  $\det(A - \lambda I)$  é um polinômio na variável  $\lambda$  denominado polinômio característico. A equação  $\det(A - \lambda I) = 0$  é chamada equação característica do operador  $T$  e suas raízes são os autovalores do operador  $T$ .

*Exemplo:* Determinar os autovalores e auto vetores do operador linear  $T_A(v)$  sendo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

*Solução:* A equação característica de  $A$  é:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

portanto  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ . E para encontrar os auto vetores utiliza-se o sistema homogêneo de equações lineares  $(A - \lambda I)v = 0$ , considerando  $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para  $\lambda_1 = 1$ ,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0.$$

O sistema admite infinitas soluções para  $y = 0$ , portanto  $v_1 = (x, 0)$ . E para  $\lambda_2 = -1$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então

$$2x + 2y = 0 \rightarrow x = -y$$

e assim, o sistema admite infinitas soluções para  $x = -y$ , portanto  $v_2 = (-y, y)$ .

#### 4.3 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

A toda transformação linear  $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ , com  $\dim \mathbb{V} = m$  e  $\dim \mathbb{W} = n$ , associa-se uma matriz  $A_{n \times m}$  tal que  $T_A(v) = Av, \forall v \in \mathbb{V}$ . Porém, a matriz  $A$  é característica das bases utilizadas na definição do operador  $T$ , ou seja, mudando-se a base, muda-se a matriz da transformação.

A matriz do operador  $T$  que torna as operações mais simples (principalmente as multiplicações de  $A$  em  $n$  estágios,  $A^n$ ) é a matriz diagonal  $D = (d_{ij})$ , aquela em que:

$$\begin{cases} d_{ij} \neq 0, \text{ para algum } i = j \\ d_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

*Propriedades:*

1) Auto vetores associados a autovalores distintos de um operador  $T: V \rightarrow V$  são linearmente independentes.

*Demonstração:* Sejam  $T(v_1) = \lambda_1 v_1$  e  $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Considere a igualdade:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \quad (I).$$

Pela linearidade de  $T$ , tem-se:

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = 0 \rightarrow a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0 \quad (II).$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (I) por  $\lambda_1$ , tem-se que:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0 \quad (III)$$

e subtraindo (III) de (II), obtém-se:

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0.$$

Como  $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$  e  $v_2 \neq 0$ , conclui-se que  $a_2 = 0$ . Assumindo o valor de zero para  $a_2$  em (I), e sabendo que  $v_1 \neq 0$ , conclui-se que  $a_1 = 0$ . E portanto o conjunto  $\{v_1, v_2\}$  é LI.

*Corolário:* Sempre que tivermos um operador  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  distintos, o conjunto  $\{v_1, v_2\}$ , formado pelos vetores próprios associados será uma base do  $\mathbb{R}^2$ . Este fato vale em geral, isto é, se  $T: V \rightarrow V$  é linear,  $\dim V = n$  e  $T$  possui  $n$  valores próprios distintos, o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , formado pelos correspondentes vetores próprios é uma base de  $V$ .

2) Considere um operador linear  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  que admite valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  distintos, associados a  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. O corolário da propriedade anterior assegura que o conjunto  $P = \{v_1, v_2\}$  é uma base do  $\mathbb{R}^2$ . Tendo em vista que:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 v_2$$

$$T(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0 v_1 + \lambda_2 v_2$$

o operador  $T$  é representado na base  $P$  dos vetores próprios pela matriz diagonal:

$$[T]_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$$

construída com os valores próprios na diagonal principal. Sendo  $A$  a matriz canônica do operador  $T$ , isto é,  $[T] = A$ , as matrizes  $A$  e  $D$  são semelhantes por representarem o mesmo operador  $T$  em bases diferentes. Logo, a relação entre matrizes semelhantes permite escrever:

$$D = M^{-1}AM$$

sendo  $M$  a matriz-mudança de base de  $P$  para a canônica  $C = \{e_1, e_2\}$ , onde  $e_1 = (1,0)$  e  $e_2 = (0,1)$ . Como:

$$M = [I]_C^P = C^{-1}P = I^{-1}P = P$$

a relação anterior se torna:

$$D = P^{-1}AP.$$

em que  $P$  é a matriz cujas colunas são os vetores próprios do operador  $T$ . Sendo assim, a matriz quadrada  $A$  é diagonalizável se existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  seja diagonal. Diz-se, nesse caso que, que a matriz  $P$  diagonaliza  $A$ , ou que  $P$  é a matriz diagonalizadora.

*Exemplo:* Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear dado por  $T(x, y) = (x + 2y, -y)$ , a matriz de  $T$  em relação a base canônica é  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . O polinômio característico de  $T$  é dado por:

$$\det([T] - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 - 1 = 0,$$

e assim tem-se  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ , portanto  $[T]_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$ . Seja  $[T] = A$ , foi visto nos exemplos anteriores que os autovetores de  $A$  são  $v_1 = x(1,0)$  para  $\lambda_1 = 1$  e  $v_2 = y(-1,1)$  para  $\lambda_2 = -1$ . Como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são distintos, o conjunto  $P = \{(1,0), (-1,1)\}$  forma uma base do  $\mathbb{R}^2$  e a matriz  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  diagonaliza  $A$ . Tem-se  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . De fato, pode se verificar que  $D = P^{-1}AP$ , pois:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D.$$

Portanto,  $P$  diagonaliza o operador  $T$ , sendo  $[T] = A$ .

### 4.3.1 Diagonalização de matrizes simétricas

Uma matriz simétrica é uma matriz quadrada igual à sua própria transposta, ou seja  $A = A^t$ . Em um operador simétrico  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , o discriminante do polinômio característico é sempre maior ou igual a zero e, portanto, haverá sempre duas raízes reais. Para confirmar essa afirmação, considere uma matriz simétrica  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ . Seu polinômio característico será dado por:

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda - b^2 + ac,$$

cujos discriminante é dado por  $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$ , pois é uma soma de quadrados. No caso de  $b \neq 0$ , tem-se  $\Delta > 0$  e, conseqüentemente, a existência de dois autovalores distintos.

Por exemplo, considere um operador representado pela matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ , que é simétrica. A equação característica de  $A$  é:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ . Logo, a matriz diagonal desse operador pode ser dada por  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ . Os autovetores serão dados pelas soluções do sistema

$$(A - \lambda I)v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Para  $\lambda_1 = 2$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \rightarrow x = y \rightarrow v_1 = x(1,1).$$

Para  $\lambda_2 = 4$ ,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \rightarrow x = -y \rightarrow v_2 = y(-1,1).$$

Nesse exemplo, é possível verificar que  $v_1 \perp v_2$ , pois  $v_1 \cdot v_2 = (1,1)(-1,1) = -1 + 1 = 0$ . Isso ocorre em todos os operadores simétricos, o que torna a base formada por esses vetores ortogonal. Se, além disso, os vetores dessa base forem normalizados, a matriz  $P$

formada por eles é ortonormal. Por consequência disso e de que em um operador ortogonal a matriz inversa de  $T$  coincide com sua transposta, isto é  $[T]^{-1} = [T]^t$ , a relação  $D = P^{-1}AP$  se torna  $D = P^tAP$ .

Dando continuidade ao exemplo, normalizando  $v_1$  e  $v_2$ , obtém-se  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Assim,  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  e a inversa de  $P$  é  $P^{-1} = P^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ , então:

$$P^tAP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = D.$$

Portanto,  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente.

#### 4.4 FORMAS QUADRÁTICAS

Uma forma quadrática é um tipo especial de função, definida genericamente por:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_n$$

ou

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^n a_{ij}x_ix_j$$

*Exemplo:*

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 5x_1x_2 + 8x_2^2$$

Assim, uma forma quadrática em  $\mathbb{R}^2$  pode ser escrita de maneira geral como  $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ , ou na forma matricial, que será considerada no processo de reconhecimento de cônicas, como:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

##### 4.4.1 Redução da forma quadrática à forma canônica

Considere uma forma quadrática  $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$  com  $B \neq 0$ . É possível eliminar o termo  $Bxy$  através de uma rotação de eixos, pois nessa condição, a matriz  $A =$

$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ , que representa essa forma quadrática (e no contexto desse trabalho, um operador de  $\mathbb{R}^2$ ), sempre possui um par de auto vetores ortornormais  $u_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$  e  $u_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$  relativos aos autovalores distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da matriz  $A$ , ou seja, o operador sempre será diagonalizável. Em suma, considerando um novo sistema de coordenadas  $x'Oy'$  no qual os eixos estão orientados na direção de  $u_1$  e  $u_2$ , tem-se que:

$$Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

*Demonstração:* Considere a forma quadrática  $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v_S^t A v_S$ . O objetivo é provar que  $v_S^t A v_S = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ . Como  $x'$  e  $y'$  são componentes de  $v$  na base  $P = \{u_1, u_2\}$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são os auto vetores unitários associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e sendo  $P$  a matriz mudança de base de  $P$  para  $S$ , tem se que:

$$v_S = P v_P.$$

Assim,

$$v_S^t A v_S = (P v_P)^t A (P v_P) = v_P^t (P^t A P) v_P.$$

Como  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente

$$P^t A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$v_S^t A v_S = v_P^t D v_P$$

e então,

$$[x \ y] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

portanto,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

*Exemplo:* Encontrar a forma canônica da função  $Q(x, y) = x^2 + 12xy - 4y^2$ , sendo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 40 = 0.$$

As raízes são  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = -8$  e, portanto,  $Q(x', y') = 5x'^2 - 8y'^2$ . A título de ilustração, é possível determinar a matriz  $P$  que rotaciona os vetores na base  $S$ .

Para  $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda I)v = \begin{bmatrix} 1 - 5 & 6 \\ 6 & -4 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

O sistema  $\begin{cases} -4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases}$  admite infinitas soluções para  $x = \frac{3}{2}y$ . Tomando um vetor unitário desse auto espaço, tem-se  $u_1 = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ .

Para  $\lambda_2 = -8$

$$(A - \lambda I)v = \begin{bmatrix} 1 + 8 & 6 \\ 6 & -4 + 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

O sistema  $\begin{cases} 9x + 6y = 0 \\ 6x + 4y = 0 \end{cases}$  admite infinitas soluções para  $x = -\frac{2}{3}y$ . Tomando um vetor unitário desse auto espaço, tem-se  $u_2 = (-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ . Assim,  $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$ . Percebe-se

que, nessa ordem,  $\det[P] = 1$ , o que confirma ser esse operador uma rotação. Por fim:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$$

#### 4.4.2 Procedimento geral para reconhecimento de uma cônica

Quando as cônicas não estão com seus eixos paralelos aos eixos horizontal ou vertical, sua equação apresenta um termo misto  $xy$ . Para fazer o reconhecimento destas cônicas, é feito um procedimento mais sofisticado que reúne os conceitos de Álgebra Linear revisados anteriormente. Esse procedimento segue os seguintes passos:

1º Passo: Dada a equação geral das cônicas  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , com  $A$  ou  $B$  ou  $C \neq 0$ , escreve-se a equação na forma matricial,

$$[x \ y] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \ E] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

ou  $v_S^t M v_S + N v_S + F = 0$ , em que  $v_S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ B & C \end{bmatrix}$  e  $N = [D \ E]$ .

2º Passo: Diagonaliza-se a forma quadrática para eliminar o termo  $xy$ . Para isso, é necessário encontrar os autovalores e autovetores ortonormais  $u_1 = (x_{11}, x_{12})$  e  $u_2 = (x_{21}, x_{22})$  de  $M$ .

3º Passo: Faz-se uma mudança de variáveis (uma rotação de eixos)  $v_S = P v_P$ , sendo  $P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}$ . A matriz  $P$  diagonaliza  $M$  e seu determinante deve ser igual a 1. Substituindo

a equação  $v_S^t M v_S = [x \ y] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  pela forma canônica  $v_P^t D v_P = [x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ,

a equação do primeiro passo na forma matricial se torna:

$$[x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [D \ E] \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + F = 0,$$

ou simplesmente

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + ax' + by' + F = 0,$$

sendo  $a = Dx_{11} + Ex_{12}$  e  $b = Dx_{21} + Ex_{22}$ .

4º Passo: Eliminação dos termos lineares, fazendo uma nova mudança de coordenadas (uma translação de eixos):

i) Para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  diferentes de 0, tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + ax' + by' + F &= 0 \Rightarrow \\ \lambda_1 \left( x'^2 + \frac{ax'}{\lambda_1} + \frac{a^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left( y'^2 + \frac{by'}{\lambda_2} + \frac{b^2}{4\lambda_2^2} \right) + F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2} &= 0 \Rightarrow \\ \lambda_1 \left( x' + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y' + \frac{b}{2\lambda_2} \right)^2 + F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2} &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $X = x' + \frac{a}{2\lambda_1}$ ,  $Y = y' + \frac{b}{2\lambda_2}$  e  $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}$ , obtém-se:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + f = 0.$$

ii) Para  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 x'^2 + ax' + by' + F = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 \left( x' + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 + by' + F - \frac{a^2}{4\lambda_1} = 0.$$

Fazendo  $X = x' + \frac{a}{2\lambda_1}$ ,  $Y = y'$  e  $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$ , obtém-se:

$$\lambda_1 X^2 + bY + f = 0.$$

iii) O caso em que  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  é análogo ao segundo caso.

*Exemplos:* Identificar o gênero das seguintes cônicas:

1)  $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$

2)  $xy + x + y = 0$

3)  $x^2 + y^2 + 2xy - 4\sqrt{2}x = 0$

*Soluções:*

1) Dada equação na base canônica do  $\mathbb{R}^2$ :

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$$

Realizando o procedimento geral para reconhecimento de uma cônica tem-se:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 5 = 0.$$

Encontrando os autovalores e auto vetores para o processo de diagonalização, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & 6 \\ 6 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$$

e as raízes da equação são  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = 20$ .

$$\text{Para } \lambda_1 = 5, \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 12x + 6y = 0 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2x$$

e um vetor ortonormal que satisfaz  $y = -2x$  é o vetor  $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ .

$$\text{Para } \lambda_2 = 20, \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3x + 6y = 0 \\ 6x - 12y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2y,$$

e um vetor ortonormal que satisfaz  $x = -2y$  é o vetor  $u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ . Assim, a primeira equação na forma matricial se torna:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 5 = 0$$

$$5x'^2 + 20y'^2 - \frac{50}{\sqrt{5}}x' + 5 = 0$$

$$5x'^2 - \frac{50}{\sqrt{5}}x' + 25 + 20y'^2 + 5 - 25 = 0$$

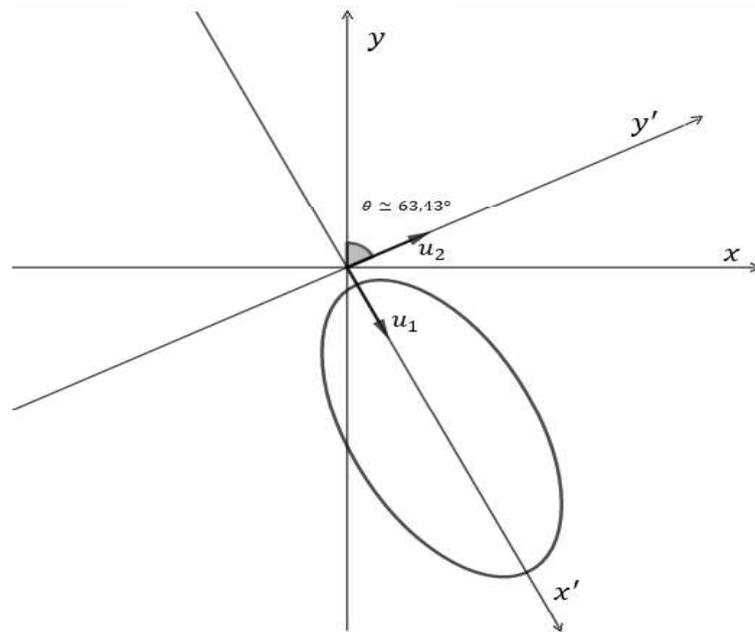
$$5\left(x' - \frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20y'^2 = 20.$$

Tomando  $X = x' - \frac{5}{\sqrt{5}}$  e  $Y = y'$ , obtém-se:

$$5X^2 + 20Y^2 = 20 \rightarrow \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$$

Através desta equação, é possível identificar a cônica como uma elipse, com centro  $c\left(\frac{5}{\sqrt{5}}, 0\right)$  no referencial  $x'Oy'$ .

**Figura 33.** Gráfico da elipse  $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra.

2) Dada equação na base canônica do  $\mathbb{R}^2$ :

$$xy + x + y = 0$$

Fazendo procedimento geral para reconhecimento de uma cônica:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

Encontrando os autovalores e autovetores para o processo de diagonalização, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-\lambda)(-\lambda) - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

e as raízes da equação são  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ .

$$\text{Para } \lambda_1 = \frac{1}{2}, \text{ tem-se } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow x = y,$$

e um vetor ortonormal que satisfaz  $x = y$  é o vetor  $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

$$\text{Para } \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \text{ tem-se } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \rightarrow x = -y,$$

e um vetor ortonormal que satisfaz  $x = -y$  é o vetor  $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Assim, a primeira equação na forma matricial se torna:

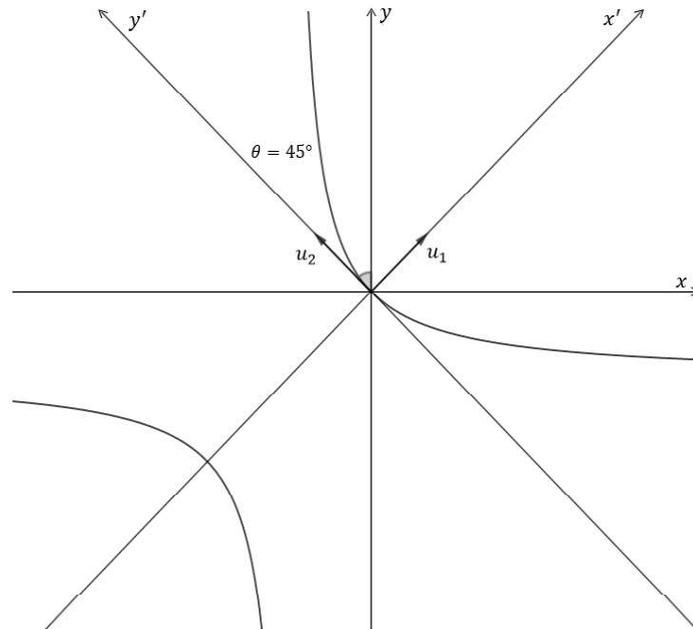
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= 0 \\ \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' &= 0 \\ \frac{1}{2}x'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' + 1 - \frac{1}{2}y'^2 - 1 &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(x' + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}y'^2 &= 1. \end{aligned}$$

Tomando  $X = x' + \frac{2}{\sqrt{2}}$  e  $Y = y'$ , obtém-se:

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1$$

Através desta equação, é possível identificar a cônica como uma hipérbole, com centro  $c\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right)$  no referencial  $x'Oy'$ .

**Figura 34.** Gráfico da hipérbole  $xy + x + y = 0$



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

3) Dada equação na base canônica do  $\mathbb{R}^2$ :

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4\sqrt{2}x = 0$$

Fazendo procedimento geral para reconhecimento de uma cônica:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

Encontrando os autovalores e autovetores para o processo de diagonalização, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

e as raízes da equação são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 0$ .

$$\text{Para } \lambda_1 = 2, \text{ tem-se } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = y,$$

e um vetor ortonormal que satisfaz  $x = y$  é o vetor  $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Para  $\lambda_2 = 0$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x + y = 0 \rightarrow x = -y$

e um vetor ortonormal que satisfaz  $x = -y$  é o vetor  $u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Assim, a primeira equação na forma matricial se torna:

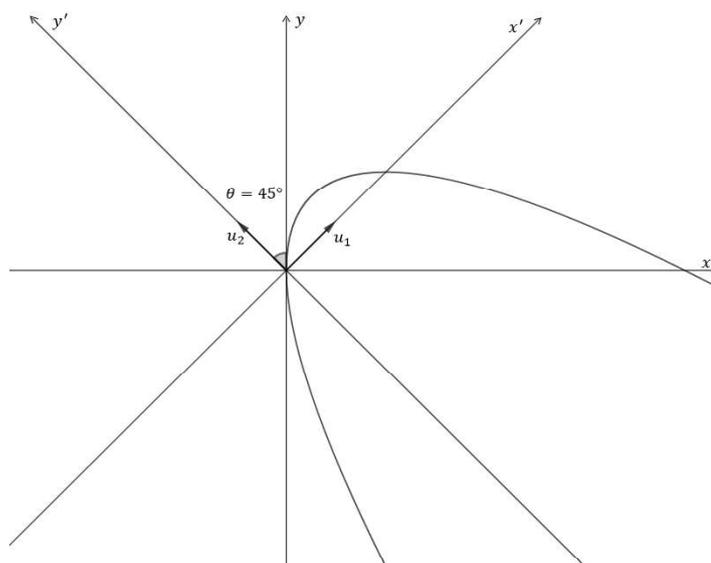
$$\begin{aligned} [x' \quad y'] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-4\sqrt{2} \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= 0 \\ 2x'^2 - 4x' + 4y' &= 0 \\ 2x'^2 - 4x' + 2 + 4y' - 2 &= 0 \\ 2(x' - 1)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Tomando  $X = x' - 1$  e  $Y = y' - \frac{1}{2}$ , obtém-se:

$$2X^2 + 4Y = 0 \rightarrow X^2 + 2Y = 0.$$

Através desta equação é possível identificar a cônica como uma parábola, com vértice  $v\left(1, \frac{1}{2}\right)$  no referencial  $x'Oy'$ .

**Figura 35.** Gráfico da parábola  $x^2 + y^2 + 2xy - 4\sqrt{2}x = 0$



Fonte: Construída pela autora no GeoGebra

### 4.4.3 Cônicas Degeneradas

Na interseção de um cone com um plano, é possível se obter outras formas além das parábolas, elipses e hipérbolas. Essas interseções são chamadas cônicas degeneradas: um ponto, uma reta, duas retas concorrentes e duas retas paralelas.

Analisando o caso em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são diferentes de zero e  $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + f = 0$ , chega-se as seguintes conclusões:

- i) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem ambos positivos, tem-se uma elipse para  $f < 0$ , um ponto para  $f = 0$  e para  $f > 0$  um conjunto vazio. Por exemplo a equação  $2X^2 + 4Y^2 = 0$  é um ponto, pois  $2X^2 + 4Y^2 = 0 \Leftrightarrow (X, Y) = (0, 0)$ . E  $X^2 + 4Y^2 = -1$  é um conjunto vazio, pois a soma de dois quadrados nunca poderia ser negativa.
- ii) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem ambos negativos, também será uma elipse, um ponto ou conjunto vazio para  $f$  positivo, nulo ou negativo, respectivamente.
- iii) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem sinais opostos, poderá ser uma hipérbole para  $f \neq 0$ , ou um par de retas concorrentes se  $f = 0$ . Por exemplo a equação  $4X^2 - 9Y^2 = 0$  é um par de retas concorrentes, pois

$$4X^2 - 9Y^2 = 0 \rightarrow (2X + 3Y)(2X - 3Y) = 0$$

portanto  $2X + 3Y = 0 \rightarrow Y = -\frac{2}{3}X$  ou  $2X - 3Y = 0 \rightarrow Y = \frac{2}{3}X$ , que representam um par de retas concorrentes.

Analisando o caso em que  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$ , tem-se  $\lambda_1 X^2 + bY + f = 0$ , chega-se as seguintes conclusões:

- i) Se  $b \neq 0$ , será uma parábola.
- ii) Se  $b = 0$ , poderá ser uma reta (se  $f = 0$ ), um par de retas paralelas ou o conjunto vazio. Por exemplo a equação  $X^2 - 5 = 0$  é um par de retas paralelas, pois  $X^2 - 5 = 0 \rightarrow X = \pm\sqrt{5}$ . A equação  $X^2 = 0$  é a reta  $X = 0$  e a equação  $X^2 + 5 = 0$  é um conjunto vazio, pois  $X^2 + 5 = 0 \rightarrow X^2 = -5$ .

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No curso de Licenciatura em Matemática do IFMG - *campus* São João Evangelista, existe a disciplina de História da Matemática, e a referida disciplina estava sendo cursada durante o desenvolvimento deste trabalho. A riqueza do contexto histórico das cônicas não poderia deixar de ser mencionada em um trabalho como este. Ao estudar os conteúdos com suas referências históricas, observa-se como a Matemática se desenvolve a partir das necessidades de uma determinada cultura, no caso das cônicas a necessidade dos matemáticos gregos de solucionar o problema da duplicação do cubo.

Ao definir as cônicas como lugar geométrico e posteriormente descrevê-las algebricamente, observa-se a importância de se representar formas geométricas através de equações, pois isso contribui para seu entendimento e permite o uso das ferramentas algébricas no estudo de problemas de natureza geométrica.

Para fazer o reconhecimento de cônicas rotacionadas, foi necessário rever vários conceitos de Álgebra Linear, o que trouxe grande contribuição em minha formação acadêmica e no trabalho como tutora de Álgebra Linear no IFMG - *campus* São João Evangelista. Além disso, possibilitou o conhecimento de um dos procedimentos para o reconhecimento geral das cônicas, definidas pela equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , tema que não havia sido abordado durante a graduação. O procedimento de diagonalização para o reconhecimento de cônicas rotacionadas possui aplicação em diversos mecanismos de Álgebra Linear e evidencia a importância desses processos para a Matemática.

O tema “cônicas transladas e rotacionadas” poderia ser mais explorado na Licenciatura em Matemática, e até mesmo na Educação Básica em um período pós ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), momento em que os alunos estão mais tranquilos com relação ao cumprimento do currículo. Na graduação, o assunto possibilitaria um entendimento mais amplo das cônicas e de conceitos de Cálculo e Álgebra Linear.

## 6 REFERÊNCIAS

- [1] BOLDRINI, José Luiz et al. *Álgebra linear*. 3. ed. ampl. e rev. São Paulo, SP: HARBRA, 1986.
- [2] CAMPOLINO, M. L. de. **Translação e Rotação de Cônicas em  $\mathbb{R}^2$** . 2014. 54 f. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Brasília, 2014.
- [3] COOLIDGE, J. L. **A history of the conic sections and quadric surfaces**. New York: Dover, 1968.
- [4] EVES, H., **Introdução à História da Matemática**. 5a Edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- [5] FILHO, L. **Cônicas: Apreciando uma Obra-Prima da Matemática**. 2015. 141 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte, 2015.
- [6] HEATH, T. **A history of Greek mathematics, two volumes**. New York: Dover, 1981.
- [7] LOPES, J. **Cônicas e Aplicações**. 2011. 184 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2011.
- [8] STEINBRUCH, A. WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.