

INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS
CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA
FERNANDO SANCHES BRAGA
RAQUEL CORDEIRO SANTOS
WGEVERSON PASCOAL DE ANDRADE

**AS CONTRIBUIÇÕES DO ESPAÇO FÍSICO ESCOLAR NO
PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO
TRIÂNGULO RETÂNGULO:
uma proposta de ensino na Educação Básica**

São João Evangelista

2013

Fernando Sanches Braga
Raquel Cordeiro Santos
Wgeverson Pascoal de Andrade

**AS CONTRIBUIÇÕES DO ESPAÇO FÍSICO ESCOLAR NO PROCESSO ENSINO-
APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO:
uma proposta de ensino na Educação Básica**

Trabalho de conclusão de curso apresentada
como exigência parcial para obtenção do título
de **Licenciado (a) (s) em Matemática** à banca
Examinadora do Instituto Federal de Minas
Gerais – *Campus* São João Evangelista sob a
orientação do Prof. Esp. Silvino Domingos
Neto.

São João Evangelista

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pelo Serviço Técnico da Biblioteca do
Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista

A553c ANDRADE, Wgeverson Pascoal de , 1988-

As contribuições do espaço físico escolar no processo ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de ensino na educação básica./ Fernando Sanches Braga; Raquel Cordeiro Santos; Wgeverson Pascoal de Andrade. São João Evangelista, MG: IFMG - Campus São João Evangelista, 2013.
166 p.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC (graduação) apresentado ao Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista – IFMG, Curso de Licenciatura em Matemática, 2013.

Orientador: Prof. Esp. Silvino Domingos Neto

1. Trigonometria. 2. Ensino a aprendizagem. 3. Matemática. 4. Ensino. I. Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista. Curso de Licenciatura em Matemática. II. Título.

CDD 514

Fernando Sanches Braga
Raquel Cordeiro Santos
Wgeverson Pascoal de Andrade

As contribuições do espaço físico escolar no processo ensino aprendizagem de Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de ensino na Educação Básica.

Trabalho de conclusão de curso apresentada como exigência parcial para obtenção do título de **Licenciado (a)(s) em Matemática** à Banca Examinadora do Instituto Federal de Minas Gerais - *Campus São João Evangelista*.

10.626.896/0006-87
IFMG - Campus São João Evangelista
Av. 1º de Junho, 1043 - Centro
São João Evangelista/MG
38705-000 (33) 3412-2900

Aprovada em 04 / 11 / 2013



BANCA EXAMINADORA

Silvino Domingos Neto
Orientador Prof. Esp. Silvino Domingos Neto
Instituição: IFMG – *Campus São João Evangelista*

Bicalho
Prof. Ma. Jossara Bazílio de Souza Bicalho
Instituição: IFMG – *Campus São João Evangelista*

Amilton F. da Silva Jr
Prof. Me. Amilton Ferreira da Silva Junior
Instituição: IFMG – *Campus São João Evangelista*

AGRADECIMENTOS

A Deus que nos concedeu o dom da vida e revigorou-nos todos os dias com a energia necessária e a luz para visualizar o mundo.

Ao nosso professor orientador Silvino Domingos Neto, pela paciência inesgotável e incontáveis contribuições para a consolidação desta pesquisa.

Aos estudantes, professores e administrativos da Escola Estadual “Josefina Pimenta” pela participação e colaboração nesta etapa das nossas vidas.

Às nossas famílias pela compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos companheiros de pesquisa pela dedicação e renúncia a tantos momentos pessoais em prol da realização da mesma.

Os autores!

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa ser um dia aplicado aos fenômenos do mundo real.
(LOBACHEVSKY *apud* DANTE, 2011).

RESUMO

Acreditamos que fazer matemática é algo para além da sala de aula e não precisa tornar-se uma experiência cansativa e tediosa. Por meio desta perspectiva desenvolvemos este trabalho com estudantes da primeira série do ensino médio. De maneira simples e natural fomos construindo os conceitos de trigonometria, seja na determinação de alturas inacessíveis ou mesmo em situações-problema. As aplicações que buscaram a significação da trigonometria no triângulo retângulo foram abordadas utilizando o espaço físico da escola. Os objetos auxiliares utilizados foram do cotidiano dos estudantes, como é o caso da determinação do ângulo em que a bola deve ser lançada para que se marque o gol. Tudo isso gerou muita curiosidade e um fascínio por resolver as situações que foram surgindo de onde não imaginavam que poderiam fazer e utilizar matemática. Tais situações levaram às investigações e ao encontro com o mundo matemático diferente daquele que geralmente é transmitido nas salas de aulas, evidenciando o aspecto de movimento que existe na matemática capaz de contagiar cada sujeito por meio de um processo endógeno. Neste trabalho voltamos nosso olhar para o ambiente físico escolar e buscamos utilizá-lo como contribuinte no ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo, pois, nele pudemos encontrar um campo vasto de exploração e investigação, capaz de subsidiar e suprir as necessidades de recursos demandados para o tratamento da trigonometria.

Palavras-chaves: Trigonometria. Espaço físico escolar. Atividades investigativas. Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

We believe that doing mathematics is something beyond the classroom and need not become a tedious and tiring experience. Through this approach we have developed this work with students of the first grade of high school. Simply and naturally we were building the concepts of trigonometry, is the determination of heights inaccessible or even in trouble. Applications that sought the meaning of the right triangle trigonometry were addressed using the physical space of the school. Helper objects used were the daily lives of students. As is the case of determining the angle at which the ball must be thrown for you to mark the goal. All this has generated a lot of curiosity and a fascination for resolving situations that arose where they did not imagine they could do and use mathematics. Such situations have led to investigations and to meet with the mathematical world than that which is usually transmitted in classrooms. Showing the appearance of motion in mathematics is able to infect each subject by means of an endogenous process. In this paper we turn our gaze to the physical environment of school and seek to use it as a taxpayer in teaching learning in right triangle trigonometry, for in him we find the vast field of an exploration and research, able to support and meet the needs for resources required treatment of trigonometry.

Keywords: Trigonometry. Physical space school. Investigative activities. Teaching and learning.

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	10
2. A METODOLOGIA DA PESQUISA	12
2.1 As etapas de Romberg	13
3. NOSSA PESQUISA DENTRO DA METODOLOGIA DE ROMBERG	15
3.1 Identificando um fenômeno de interesse	15
3.2 Perguntas ou conjecturas.....	15
3.3 Modelo preliminar	16
3.4 Relacionar com ideias de outros	18
3.4.1 <i>Ensino-aprendizagem da matemática</i>	18
3.4.2 <i>História da trigonometria e seu ensino-aprendizagem</i>	20
3.4.3 <i>Contribuições do espaço físico escolar no ensino-aprendizagem da matemática</i> . 24	
3.5 Identificações das conjecturas/perguntas de pesquisa	26
3.6 Selecionando estratégias e procedimentos de pesquisa	26
3.6.1 <i>Apresentação da proposta à escola pretendida</i>	27
3.6.2 <i>Escolha dos alunos participantes da pesquisa:</i>	27
3.6.3 <i>Orientações sobre a dinâmica do trabalho</i>	27
3.6.4 <i>Etapas de aplicação</i>	27
3.7 Coletando evidências.....	29
3.7.1 <i>Aplicação da Pesquisa</i>	29
3.7.1.2 Primeiro encontro	39
3.7.1.2.1 Um pouco da história da trigonometria.....	42
3.7.1.2.2 Retomando a discussão	44
3.7.1.2.3 Identificando elementos no espaço físico da escola.....	48
3.7.1.3 Segundo encontro.....	54
3.7.1.4 Terceiro encontro	59

3.7.1.5 Quarto encontro.....	70
3.7.1.5.1 Construindo o teodolito caseiro	70
3.7.1.6 Quinto encontro	73
3.7.1.6.1 Demonstrando o Teorema de Pitágoras	76
3.7.1.6.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	86
3.7.1.6.3 Conhecendo e utilizando a tabela de razões trigonométricas	99
3.7.1.6.4 Conhecendo e utilizando o recurso “calculadora científica”	100
3.7.1.7 Sexto encontro.....	101
3.7.1.7.1 Voltando ao problema da altura da árvore.....	101
3.7.1.7.2 Voltando à situação do corredor central.....	106
3.7.1.8 Sétimo encontro	116
3.7.1.8.1 Recorrendo novamente à calculadora científica.....	120
3.7.1.9 Oitavo encontro	125
3.7.1.9.1 Retornando à sala de aula	125
3.7.1.10.1 Avaliação quantitativa	131
3.7.1.11 Décimo encontro	138
3.7.1.11.1 Situação da sombra	138
3.7.1.11.2 Avaliação qualitativa.....	139
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	141
REFERÊNCIAS.....	151
APÊNDICE A – EXPOSIÇÃO QUANTITATIVA DAS SOLUÇÕES APRESENTADAS PARA AS QUESTÕES 2 A 11 DA AVALIAÇÃO QUANTITATIVA	155
APÊNDICE B – CONSIDERAÇÕES DOS ESTUDANTES SOBRE A DINÂMICA DE AULA UTILIZADA NESTA PESQUISA	160
APÊNDICE C – TERMO DE COMPROMISSO INSTITUIÇÃO	164
APÊNDICE D – TERMO DE COMPROMISSO ESTUDANTES	165

1.INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta as discussões e resultados relativos às contribuições que a utilização do espaço físico escolar pode proporcionar ao processo ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo unido à utilização de ferramentas auxiliares e atividades investigativas. Embora a trigonometria apresente inúmeras situações e exemplos de aplicações interessantes para serem trabalhados na Educação Básica, com raras exceções é deixada de lado ou no máximo é apresentada como um amontoado de fórmulas como algo pronto e acabado.

Ao iniciarmos nossas atividades docentes percebemos que não raro os professores colocavam a trigonometria como sendo um conteúdo de difícil assimilação e que geralmente os estudantes não demonstram interesse ou outras vezes justificam o não ensino pelo fato de demandar recursos que uma escola pública não tem disponível.

Ao desenvolvermos conjecturas entre leituras sobre o assunto e a prática nas escolas, gerou-se a pergunta: como aplicar a trigonometria durante o processo de construção do conhecimento nas escolas públicas de Educação Básica, com a inexistência de recursos e aplicativos, como por exemplo, software matemáticos, para práticas e verificações concretas? Dessa inquietude surgiu o seguinte problema de pesquisa: **o espaço físico escolar pode contribuir para o ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo?**

No intuito de responder o problema de pesquisa, desenvolvemos nosso trabalho em dois momentos: o primeiro consistiu numa análise bibliográfica e o outro em aplicações práticas da trigonometria no triângulo retângulo envolvendo as razões seno, cosseno e tangente. Assim, buscamos, além de verificar a viabilidade da utilização do espaço físico escolar como contribuinte no processo ensino-aprendizagem de trigonometria, produzir uma estratégia didático-pedagógica que auxilie professores e estudantes. Outros objetivos consistiram em: propor situações em que os alunos possam significar a trigonometria no triângulo retângulo e possibilitar a conciliação entre teoria e prática.

Portanto, fez-se necessário recorrer a uma metodologia que pudesse nos auxiliar no desenvolvimento de uma pesquisa experimental. Assim, fizemos uso da metodologia de Romberg por apresentar conjecturas para um trabalho de campo na área da Educação Matemática. Paralelo a isso buscamos complementar a ideia aqui enfatizada com autores que apontam condicionantes no processo de construção do conhecimento da trigonometria.

Enfim, apresentamos nossas considerações sobre esta pesquisa e evidenciamos a viabilidade do processo ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo utilizando o espaço físico escolar.

2. A METODOLOGIA DA PESQUISA

Com a crescente melhoria do ensinar e aprender Matemática nos últimos anos vem sendo necessário estudos norteadores na área da Educação Matemática. Com esta finalidade, para que possamos ser conduzidos por um caminho que nos levará a pesquisar e discutir os processos diversos que a permeiam, tivemos a oportunidade de nos orientar por uma metodologia que enfatiza pontos estratégicos nesta área, de modo que sua aplicação seja pautada por uma hierarquia de pensamentos sobre o assunto, tornando o trabalho uma linha de raciocínio em que a cada etapa é necessária à reflexão do processo atual da pesquisa.

A metodologia tem o papel de nortear o trabalho desde a formulação do projeto até a aplicação e interpretação dos resultados. Assim, foi necessário verificar as existentes no ramo da Educação Matemática de modo a definir qual nos guiará durante a pesquisa.

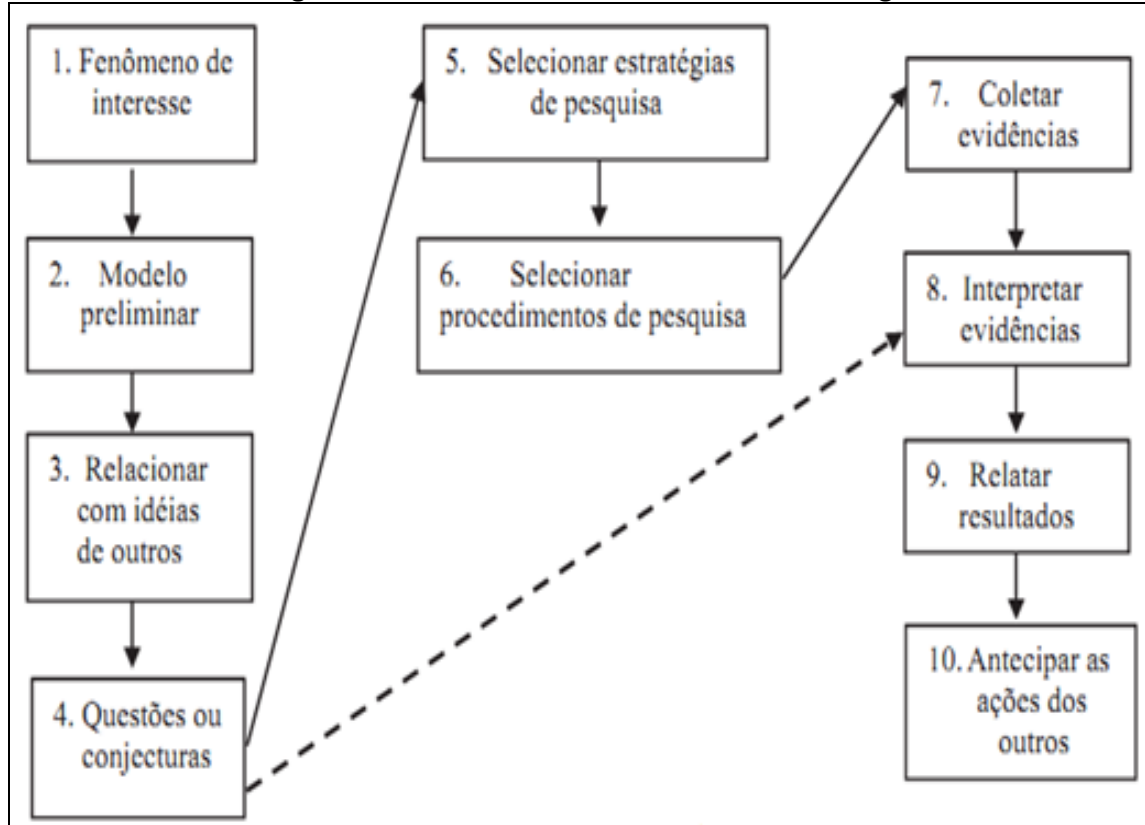
Uma vez que a pesquisa aqui esquematizada é do tipo qualitativa, baseada em aplicações, análises, avaliações e resultados, decidimos optar pela metodologia de Romberg, visto que ela apresenta dez etapas que conduzem a pesquisa perpassando desde a identificação do fenômeno de interesse até a interpretação e divulgação dos resultados para a comunidade acadêmica para, se possível, reavaliar algumas deficiências caso existam. As etapas que mencionamos foram conjecturadas durante o planejamento e desenvolvimento do trabalho.

Em seu artigo intitulado “*Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa*” Romberg (2007) procura, além de identificar nas ciências sociais as amplas tendências de pesquisa relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares, resumir a variedade de métodos de pesquisa utilizados atualmente. Ainda segundo Romberg (2007) é diferenciando a educação de uma disciplina e a entendendo como um campo de estudo com fenômenos, problemas e pessoas, que o fez pensar em um caminho mais envolvente no ato de pesquisar no campo da educação.

Assim, quando buscamos trabalhar com a Metodologia de Romberg somos levados a refletir sobre as conjecturas desencadeadas em cada etapa do trabalho, de modo

a estabelecer uma avaliação concisa, já que Romberg a determina como processos que devem ser construídos. A figura 1 descreve o percurso de Romberg.

Figura 1 - Modelo e Percurso de Romberg



Fonte: ROMBERG, 2007

Segundo Romberg (2007), o modelo apresentado acima nos permite a interação entre fatores tais como a intenção do pesquisador, as suposições, as conjecturas, a disponibilidade de informações, bem como os métodos a serem utilizados no trabalho. No entanto, apresentamos a ideia de Romberg em cada uma das dez etapas e delineamos a estrutura metodológica desta pesquisa dentro da metodologia de Romberg.

2.1 As etapas de Romberg

Na primeira etapa, Romberg propõe a *identificação de um fenômeno de interesse*, pois afirma que a decisão por querer pesquisar sobre algo é porque nos remeteu a inquietude sobre como este algo vem refletindo no mundo real e que de fato vem influenciando no desenvolvimento de um meio específico na sociedade, que no caso da educação remete ao processo de ensino e aprendizagem. Este fenômeno

segundo ele, envolve no caso específico da educação tanto os alunos e professores e o processo de interação entre eles e o envolvimento na construção do conhecimento que se pretende alcançar.

A segunda etapa do direcionamento que Romberg propõe, trata da *construção de um modelo preliminar* que o caracteriza como um conjunto de descrições de variáveis-chave e as relações implícitas entre elas. Assim, seria organizar as ideias que precisamos estudar, refletir e obter informações para traçar estratégias de pesquisa.

Na terceira etapa, Romberg propõe o *relacionamento entre o fenômeno e o modelo preliminar com as ideias de outros*. Enfatiza o entrelaçamento da ideia em questão com as de autores que se enveredaram pelo mesmo caminho.

Na quarta etapa, Romberg propõe *levantamentos de questões específicas ou uma conjectura baseada na razão*. Segundo ele, este é o momento crucial do trabalho, pois aqui devem estar esclarecidas quais as respostas se pretende alcançar para obter os resultados esperados na pesquisa.

Na quinta etapa, é proposto por Romberg que *selecione uma estratégia geral de pesquisa para coletar evidências*. Aqui, de acordo com a orientação do trabalho deve-se analisar a metodologia a ser desenvolvida para sua consecução. Para esta etapa é proposto por Romberg que se trabalhe com uma pesquisa de campo ou um estudo de caso.

Na sexta etapa, Romberg visa *selecionar procedimentos específicos*. Aqui, ele fala da coleta de informações, do modo a ser trabalhado, de como utilizar das informações no desenvolvimento do trabalho, ou seja, a estruturação e a execução da pesquisa.

Na sétima e oitava etapa, Romberg propõe a *coleta de informações para a construção do argumento que se busca atingir e a interpretação destas informações*.

Na nona etapa Romberg propõe a *transmissão dos resultados aos outros* principalmente aos membros da comunidade de pesquisa. Neste momento, acredita-se ser possível apresentar os dados do trabalho, seja finalizado ou parciais para, se necessário fazer alguns ajustes durante o processo.

Na décima e última etapa proposta por Romberg, deve-se *antecipar a ação de outros*. É o momento onde poderemos reunir com outros pesquisadores e basear-se de novas ideias para propor talvez um aprimoramento, reavaliação, elaboração de novos procedimentos. Com isso o objetivo é, além do trabalho ser bem desenvolvido para amostras de resultados convincentes e favoráveis, torná-lo uma base para futuras transformações que por ventura vierem acontecer no sistema de ensino e poder utilizá-la para políticas públicas de educação no país.

3. NOSSA PESQUISA DENTRO DA METODOLOGIA DE ROMBERG

3.1 Identificando um fenômeno de interesse

Ao desenvolvermos o estudo da trigonometria enquanto discente da graduação foi possível perceber como o conteúdo pode possibilitar a proximidade do estudante, na tomada de decisões em simples ações que podem desempenhar no dia a dia. Uma vez que o não estudo do conteúdo enquanto estudantes da Educação Básica foi um ponto em comum identificado por nós e por outro lado percebido no ensino nas escolas nas quais pudemos iniciar a docência, buscamos questionar o porquê não se tem possibilitado a construção eficaz do conhecimento trigonométrico nessas escolas. Pensando na amplitude do conteúdo trigonometria e analisando as propostas curriculares para o ensino elementar deste ramo, que apontam a necessidade de o estudante estar apto a criar estratégias pelo menos quanto ao triângulo retângulo, nos remeteu a inquietude de pesquisar sobre o ensino e aprendizagem do conteúdo firmando o seguinte fenômeno de interesse: **o ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo**.

3.2 Perguntas ou conjecturas

Uma vez identificado o fenômeno de interesse, fez-se necessário criar estratégias no processo de ensinar e aprender trigonometria no triângulo retângulo. Compreender os fatores que permeiam o estudo do conteúdo possibilitando o envolvimento do sujeito na construção do conhecimento seria aproximá-lo aos fenômenos que desencadeiam as aplicações do conteúdo. Mas como envolver o estudante num

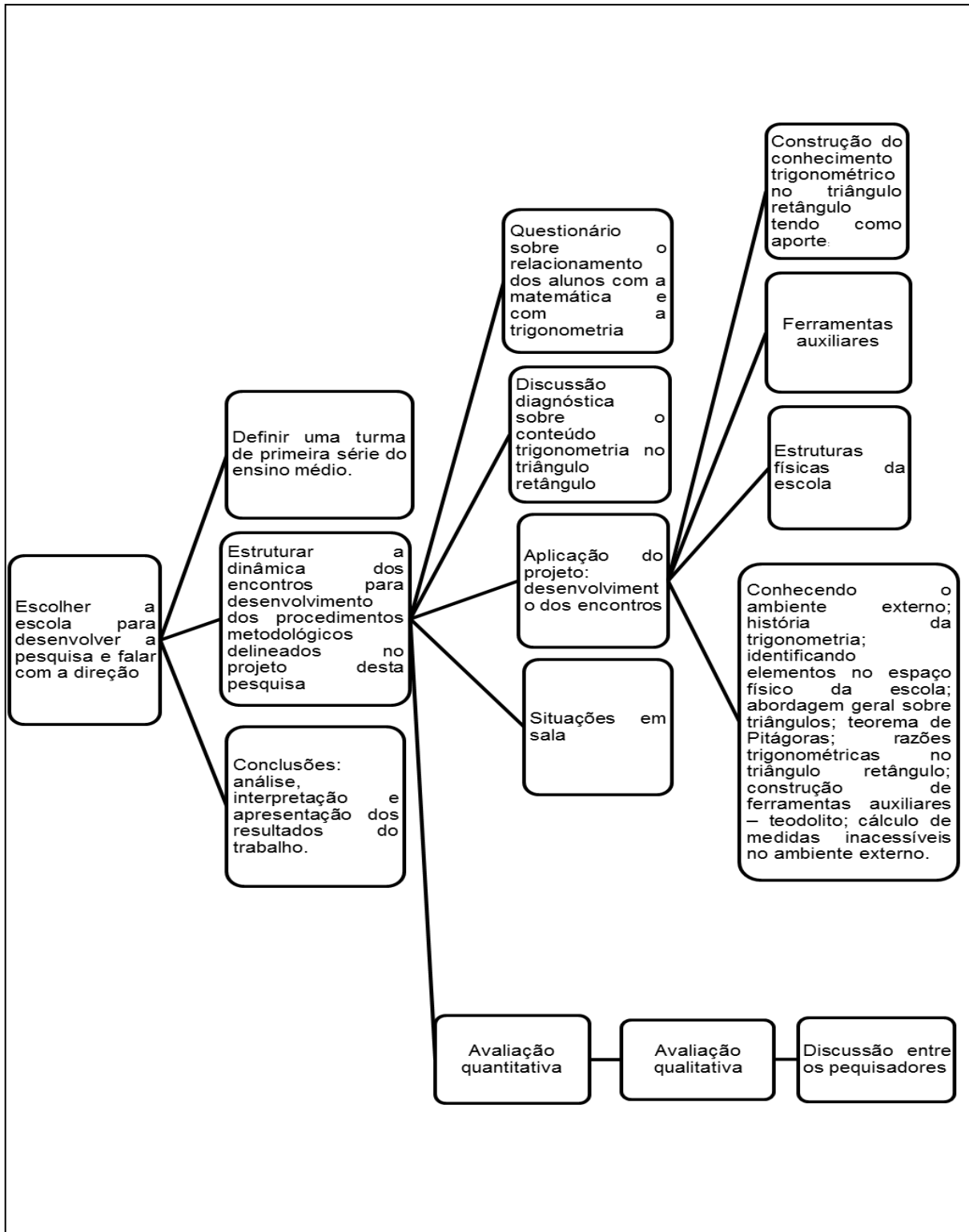
processo de aplicação do conteúdo sem o auxílio de recursos pedagógicos e tecnológicos? Para que exista uma metodologia de ensino que não se limite na lousa, mas que possibilite ao estudante envolver em processos similares aos apresentados nos livros didáticos na forma de “situações problema”, em que o próprio construa estratégias de solução para situações que ele mesmo conjecturou, seria necessário alternativas de ensino para facilitar o envolvimento do sujeito na construção do conhecimento trigonométrico. Assim, foi necessário estabelecer conjecturas e definir uma pergunta que fundamentaria o trabalho aqui desenvolvido, ou seja, pensar em quais alternativas envolveriam diretamente o estudante no processo. “Levantar questões ou fazer uma conjectura aceitável é um passo chave no processo da pesquisa porque, enquanto se examina um fenômeno particular, muitas questões potenciais inevitavelmente surgem”. (ROMBERG *apud* HUAMAN HUANCA, 2006, p.52).

Contudo, decidimos fazer uso das estruturas físicas da própria escola como elementos de aplicação ao estudar a trigonometria no triângulo retângulo aliada à construção de ferramentas auxiliares para o desenvolvimento do trabalho. Foi necessário estabelecer a seguinte pergunta de pesquisa: **o espaço físico escolar pode contribuir para o ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo?** Foi definido então, o objetivo de pesquisa deste trabalho: analisar a viabilidade de se trabalhar a trigonometria no triângulo retângulo na primeira série do ensino médio tendo como aporte as estruturas físicas da escola e ferramentas auxiliares construídas pelos próprios estudantes como, por exemplo, o teodolito caseiro e o uso da calculadora.

3.3 Modelo preliminar

Para tanto, foi necessário criar um esquema que nos permitiria delinear e desenvolver um trabalho de pesquisa sobre o fenômeno de interesse apontado. É o que Romberg identifica como modelo preliminar. Por ele, traçaremos condições de conjecturar todo o processo estrutural da pesquisa.

Figura 2 - Modelo preliminar



Fonte: Elaborado pelos autores

3.4 Relacionar com ideias de outros

De acordo com Huaman Huanca (2006), ao relacionar com ideias de outros, o pesquisador se depara com quem já trabalhou sobre o seu fenômeno de interesse, podendo assumir que as ideias deles podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou até mesmo alterar o modelo preliminar construído. Portanto, fizemos discussões conforme os tópicos seguintes: ensino-aprendizagem da matemática; história da trigonometria e seu ensino-aprendizagem; contribuições do espaço físico escolar no ensino-aprendizagem da matemática e por fim identificamos nossas conjecturas/perguntas de pesquisa.

3.4.1 Ensino-aprendizagem da matemática

Acredita-se que pelo percurso ensino-aprendizagem da matemática chega-se ao ensino-aprendizagem da trigonometria.

Quanto à matemática, apesar de todos conceberem sua importância e utilidade cada vez mais presente em todos os aspectos, é conhecida por seu rigor e complexidade com relação às demais disciplinas. Pela dificuldade que muitos estudantes apresentam durante sua vida escolar, esta discussão perpassa principalmente pelo modelo em que tradicionalmente a matemática é abordada, como afirma Gonçalves:

Esta carência é o reflexo de uma visão restrita da finalidade do ensino de Matemática na Educação Básica, voltada estritamente para o ensino de técnicas/procedimentos e algoritmos para a resolução de problemas sem qualquer conexão com o contexto sociocultural dos alunos ou, no máximo, com pontuais contextualizações artificiais. (GONÇALVES, 2013, p. 2)

O ensino da matemática desvinculada do saber cotidiano e dos aspectos socioculturais dos estudantes tem feito com que a mesma pareça sem sentido e até mesmo sem utilidade, já que os alunos não conseguem relacionar o que aprendem com os seus afazeres diários. Dessa forma Onuchic; Allevato (1999) discutem sobre a importância do ensino eficiente dessa disciplina:

Muitos esforços estão sendo feitos para tornar o ensino da Matemática mais eficiente. É preciso que muita gente saiba Matemática e a saiba bem.

Sempre houve muita dificuldade para se ensinar Matemática. Apesar disso, todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para se aprender o mundo e nele viver. (ONUICHIC; ALLEVATO, 1999, p.213).

Já Ponte, Brocardo e Oliveira compartilham da ideia de George Polya (2006) e do matemático português Bento de Jesus Caraça. Para eles a Matemática se mostra como a ciência rigorosa de Euclides, mas também apresenta outro lado, o qual se configura como uma ciência dinâmica...

A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (...) encarada assim, aparece como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social. (CARAÇA *apud* PONTE, 2009, p.16)

Com esta citação percebemos que a matemática pode ser vista para além de seu rigor, ou da concepção de uma ciência “engessada”. Ela pode ser apreciada a partir de suas formas, magnitude, beleza e movimento que a criam e a ampliam cada vez mais.

Ainda quanto à aprendizagem em matemática, Mendes afirma que o conhecimento é algo dinâmico e acontece sempre que o estudante partindo de suas próprias observações investigue e reinvente sua própria realidade:

[...] A produção do conhecimento, portanto, pressupõe uma criação inspirada e inovadora a partir de informações construídas, ao longo dos tempos, pela humanidade sempre numa perspectiva de reinvenção da realidade investigada. Nesse sentido o ensinar e aprender se justificam na pesquisa como meio de se conduzir a produção científica e educativa eliminando, de forma progressiva, a prática da cópia ou imitação. [...] (MENDES, 2009, p.124)

Neste sentido a matemática é algo intrínseco ao ser e sempre poderá ser renovada a partir de novas práticas. Além disso, seu ensino se define por vários fatores, entre eles a relação entre a prática e a finalidade atribuída por professores e alunos no processo. Segundo Fiorentini citado por Spacek:

[...] por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de matemática e de educação. O

modo de ensinar sofre influência também dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino da matemática, da forma como concebe a relação professor aluno e, além disso, da visão que tem de mundo, de sociedade e de homem. (FIORENTINI *apud* SPACEK, 2012, p. 24).

3.4.2 História da trigonometria e seu ensino-aprendizagem

Mas e a trigonometria, o que vem a ser esta ciência?

Segundo Dante (2005) “devido à sua característica de estabelecer as relações entre as medidas de ângulos e segmentos, a trigonometria foi considerada originalmente como uma extensão da Geometria”. No entanto, uma definição interessante para a palavra Trigonometria pode ser encontrada neste livro volume único para o ensino médio, no qual o autor estuda a gênese da palavra:

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: *tri* = três, *gonos* = ângulos e *metron* = medir. Daí o seu significado: medida dos triângulos. Inicialmente, então, a trigonometria era considerada a parte da Matemática que tinha como objetivo o cálculo das medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos). (DANTE, 2005, p.187).

Embora a definição acima nos remeta a apenas cálculos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1999) enfatizam “um ensino mais amplo, ressaltando a importância de um conhecimento que vá além dos cálculos e da memorização, mas que seja capaz de construir no estudante um olhar crítico que o permita observar, conjecturar, interpretar, prever e intervir”, ou seja, os PCNs propõem a formação de habilidades e competências que são requeridas para além da sala de aula.

Essa dinâmica do conhecimento pode ser verificada na história da trigonometria que assim como a história da matemática, nos remete à sua criação devido a necessidades de povos em situações diversas, como afirma Carvalho (1992, p.102): “ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo e para ser utilizada na navegação e na geografia”.

Segundo Eves (2011, p.202) “as origens da trigonometria são obscuras”. Já Boyer (1996), afirma que a criação da trigonometria não se deu por um homem ou nação,

havendo várias personalidades que contribuíram para que a trigonometria fosse como ela é hoje.

A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem - ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “Trigonometria”, a medida das partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos de cordas que se subtendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas do sol e da lua. (BOYER, 1996, p. 108).

Então, seguindo os registros da história da matemática, vamos encontrar nos escritos de Eves, a seguinte afirmação:

É bem provável que o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade tenha sido Hiparco, que viveu em torno de 140 a. C. Embora se tenha dados de um equinócio vernal registrado por Hiparco em Alexandria em 146 a. C., suas observações mais notáveis foram feitas no famoso observatório de Rodes, importante centro comercial. (...) o comendador Têon de Alexandria (sec.IV) atribui a Hiparco um tratado em 12 livros que se ocupa da construção de uma *tábua de cordas*. (EVES, 2011 p. 202)

Já Ávila, fazendo menção à astronomia na antiguidade, fala do fascínio dos seres humanos pelo espetáculo dos céus, levando a astronomia ao posto de primeira ciência onde a matemática provou sua eficácia como instrumento adequado à explicação dos fenômenos. E neste contexto atribui a Hiparco o início da trigonometria:

Um dos maiores astrônomos da Antiguidade foi Hiparco (190 – 120 a.C), que era natural de Rodes. Até sua época os astrônomos só utilizaram em seus trabalhos recursos numéricos e métodos geométricos. Com Hiparco tem início a Trigonometria, que seria um novo e poderoso recurso da Astronomia, sobretudo a chamada trigonometria esférica. (ÁVILA, 2010, p.118).

Além de Hiparco, outros estudiosos e povos também trabalharam com as questões relacionadas à trigonometria, aos astros e aos céus, principalmente os hindus, como afirma Eves (2011), que se consideravam astrônomos por natureza e dedicavam essencialmente à matemática, fazendo desta uma serva da astronomia.

Embora os hindus tenham tido mérito na astronomia, estes trataram a matemática em grande parte empiricamente, servindo a fenômenos do momento. Assim, raramente apresentavam demonstrações ou deduções, além de revestir os trabalhos com uma linguagem obscura e mística.

Outro povo que também se destacou foram os árabes. Estes como os hindus, também se dedicavam bastante à trigonometria, como afirma Eves:

Como os hindus, os matemáticos árabes consideravam-se a si mesmos primeiramente astrônomos e assim dedicava interesse considerável à Trigonometria. (...) Pode-se creditar a eles a utilização das seis funções trigonométricas e o aprimoramento das fórmulas de Trigonometria. (EVES, 2011, p.265)

Embora os registros da história da matemática evidenciem que assim como a semelhança de triângulos, o triângulo retângulo já era conhecido dos egípcios e babilônios, esta importante figura geométrica para o estudo da trigonometria, nos remete a Pitágoras com o seu teorema *“Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”*.

A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecidos pelo seu nome – que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Já vimos que esse teorema era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras. (EVES, 2011, p. 103)

E reserva a Tales, filósofo grego da antiguidade, as primeiras noções de semelhanças de triângulo:

O filósofo grego Tales de Mileto (640 – 549 a.C) demonstrou que entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes sempre haverá a mesma relação, independente do comprimento desses lados. Pela determinação da razão de semelhança entre triângulos retângulos, Tales efetivou a medição da altura de objetos por meio de sua sombra. Por volta de 600 a.C., Tales estava no Egito e foi chamado pelo Faraó para calcular a altura de uma pirâmide. Com uma vara fincada no solo, esperou o momento solar em que o comprimento da sombra da vara no chão medisse a sua altura. Então, pediu que medissem imediatamente a sombra da pirâmide. Ao comprimento da sombra, foi somada metade da medida da base da pirâmide, pois sendo muito grande, escondia parte da sombra. Assim, Tales demonstrou que a altura da pirâmide é igual a sua sombra mais a metade da base. (MENDES *apud* FORTES, 2012, p. 16).

Outras contribuições importantes à trigonometria foram dadas por notáveis astrônomos como:

Eratóstenes – segundo os escritos de Ávila (2010), foi um sábio de Alexandria, era natural de Cirene, mas passou grande parte de sua vida em Atenas, antes de vir a morar em Alexandria. Foi ele quem fez o cálculo do raio da Terra mais célebre da antiguidade.

Ptolomeu – Claudio Ptolomeu foi o último grande astrônomo da antiguidade. Sua famosa obra, *o Almagesto*, inclui, além de suas contribuições próprias, as de seus vários predecessores. Pelos fatos historicamente registrados sobre Ptolomeu, infere-se que ele teria vivido por volta do ano 150 de nossa era. Entre outros feitos, Ptolomeu propôs um método bastante engenhoso e simples para calcular a distância da Terra à Lua.

Aristarco – Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.), como mencionado por Ávila (2010), foi um ilustre astrônomo da antiguidade que deixou importantes contribuições como o livro sobre o cálculo das distâncias da Terra à Lua e ao Sol, bem como sobre o tamanho desses dois corpos celestes.

Ávila em (BRASIL, 2004) falando sobre a trigonometria coloca o poder da mesma na antiguidade, com a qual se podia medir o tamanho do Sol e da Lua, séculos antes de Cristo. Ele enfatiza que foram usadas ideias que são muito simples e geniais as quais deveriam servir de inspiração para o ensino desta disciplina, no entanto até algum tempo elas nem apareciam nos livros da Educação Básica.

A astronomia, que é a mais antiga das ciências, oferece excelentes exemplos de aplicações simples e interessantes de fatos geométricos elementares, que muito bem respondem ao “pra que serve” do aluno, estimulando ainda mais sua curiosidade científica e ajudando-o a bem entender o papel da Matemática como instrumento da ciência aplicada. (BRASIL, 2004, p. 167)

Diante dos fatos históricos que ajudaram na criação e aprimoramento da trigonometria, faz-se necessário discutir algumas questões relacionadas ao ensino-

aprendizagem, entre eles as investigações e as contribuições do espaço físico escolar, buscando analisar aspectos que colaborem para o estudo da trigonometria.

3.4.3 Contribuições do espaço físico escolar no ensino-aprendizagem da matemática.

Já não fazem experiências porque as pernas cansadas perderam até a lembrança da montanha que, há não muito tempo, escalavam com audácia triunfante, porque iam sempre além das ordens e das prescrições dos que se dedicavam a regular a ascensão em vez de vivê-la. Instalaram-se confortavelmente na planície, toda marcada de estradas e de barreiras, pretendendo julgar, segundo a sua própria medida, a ousadia das montanhas cujas agulhas parecem desafiar o azul. (FREINET *apud* COSTA, 2011, p. 46).

Como mencionado por Freinet, falta ao ensino atual as experiências, o que não é diferente no estudo da matemática que se apresenta cada vez mais abstrato, e seu ensino muitas vezes superficial, é quase incapaz de chamar a atenção dos estudantes. A esse respeito, Nunes e outros no livro intitulado “Na vida dez, na escola zero” discute esse distanciamento e propõem o uso de materiais concretos e do cotidiano dos estudantes.

[...] O conjunto de situações usado na escola para a aprendizagem dos conceitos pode ser restrito ou amplo, dependendo da prática pedagógica efetiva de cada professor. No entanto, essas situações estão sempre distanciadas das práticas diárias. Não resolvemos um problema sobre dinheiro na escola usando dinheiro. Não resolvemos um problema de cortar um pedaço de arame em partes iguais, medindo e cortando. Não resolvemos uma divisão de bolinhas de gude entre crianças, distribuindo bolinhas de gude. [...] (NUNES; CARRAHER; SCHLEIMANN 2012, p.68).

Nesse sentido, ao observar as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de trigonometria percebe-se o foco em um ensino dinâmico que priorize os temas fundamentais, os quais podem ser trabalhados em situações-problema e de forma prática.

O que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato deste conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na Agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o

conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo. (BRASIL, 2000, p. 122)

Como observado na consideração acima, o ensino da trigonometria deve provocar reflexões sobre as práticas pedagógicas, caracterizando o verdadeiro papel da educação. Assim é o desejo de criar, pela educação, um cidadão crítico, um ser pensante que seja senhor e não escravo das circunstâncias, que tenha autonomia e seja capaz de aplicar seus conhecimentos na melhoria de suas vidas e da sociedade. Pensando nesta educação mais qualitativa que quantitativa, Ponte enfatiza a importância do caráter investigativo nas aulas de Matemática:

o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE, 2009, p.23).

A proposta de trabalho para o tratamento da trigonometria no triângulo retângulo assume características investigativas do espaço físico escolar. Assim, cada situação-problema será colocada aos estudantes de forma que juntos vão se apropriando dos recursos presentes em seu contexto e utilizem das habilidades adequadas para então solucionar o problema proposto, tornando não só mais efetivo o conhecimento como também mais significativo. Como nos lembra D'Ambrósio (1996), “a maneira como aprendemos, que (re) elaboramos o conhecimento e matematizamos, também está ligada ao contexto sociocultural ao qual fazemos parte.” É nessa abordagem que Fainguelernt citando Hershkowitz (1999), diz sobre a visualização de elementos do espaço físico escolar que aqui se caracterizam como objetos de estudo:

O ensino de geometria parte da visão da mesma como exploração e descrição do espaço, trabalhando concretamente no espaço real e realizando diferentes atividades que desenvolvem a visualização, a intuição, a percepção e a representação, além de permitir que o aprendiz realize a passagem do espaço real para o espaço teórico, chegando à visão da geometria como uma estrutura lógica (HERSHKOWITZ *apud* FAINGUELERNT, 1999, p.51.)

E D'Ambrósio (1986), em seu livro “Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática” nos diz da espontaneidade da matemática ao afirmar:

(...) Isto nos conduz a atribuir a matemática o caráter de uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e consequentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido. (D'AMBROSIO, 1986, p.36)

Tais ideias fazem pensar na riqueza do ambiente que nos cerca, enumerando quantas são as possibilidades de problematizar os conteúdos a serem ensinados e quantas são as possibilidades de investigações que podem ser exploradas.

3.5 Identificações das conjecturas/perguntas de pesquisa

Concordando com as ideias colocadas e partindo de tópicos da história da trigonometria, discutiremos a contribuição do espaço físico escolar no processo de ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo por meio de problemas curiosos e intrigantes. Uma vez que a análise histórica nos convence que as maiores descobertas surgiram de curiosidades e problemas que intrigavam estudiosos no passado, assim questionamos: a trigonometria está sendo ensinada a partir de questões interessantes e curiosas como aquelas apresentadas no passado? É possível com os recursos do espaço físico escolar tornar as aulas de trigonometria no triângulo retângulo mais interessantes? Que estratégias de ensino devem ser pensadas para facilitar a aprendizagem e a resolução de situações-problema que envolvam as razões trigonométricas no triângulo retângulo?

3.6 Selecionando estratégias e procedimentos de pesquisa

Segundo Romberg *apud* Huaman Huanca (2006):

[...] a decisão sobre que métodos utilizar decorre diretamente das questões selecionadas, da visão do mundo onde as questões estão situadas, do 'modelo preliminar' que foi construído para explicar o 'fenômeno de interesse', e das conjecturas que se faz sobre a evidência necessária. (ROMBERG *apud* HUAMAN HUANCA, 2006, p. 56)

De maneira geral, as estratégias e procedimentos esclarecem os procedimentos metodológicos do trabalho, desde o fenômeno de interesse até a apresentação e interpretação dos resultados. Assim, definido por pesquisar a viabilidade do espaço físico da escola como contribuinte no processo ensino-aprendizagem de

trigonometria no triângulo retângulo, o trabalho estruturou-se nos aspectos apresentados a seguir.

3.6.1 Apresentação da proposta à escola pretendida

Foi escolhida a Escola Estadual “Josefina Pimenta” localizada no município de São João Evangelista/MG, para o desenvolvimento da pesquisa. A escola trabalha com aproximadamente 1100 estudantes divididos entre os anos finais do ensino fundamental e médio. Após apresentarmos a proposta de pesquisa à escola, definimos a primeira série do ensino médio para a execução do trabalho por ser proposto pelo Currículo Básico Comum (CBC) do estado de Minas Gerais, “que se trabalhe o conteúdo nesta etapa do ciclo médio de educação” (MINAS GERAIS 2007).

3.6.2 Escolha dos alunos participantes da pesquisa:

A escolha dos alunos foi feita através da: proposta de um curso preparatório para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) com relação a um conteúdo específico da matemática feita nas três turmas da primeira série do ensino médio, de modo que os estudantes demonstrassem interesse em participar do trabalho. A expectativa foi de dez (10) estudantes por turma de modo a formar uma turma completa, o que foi conseguido, a princípio com sucesso.

3.6.3 Orientações sobre a dinâmica do trabalho

Apresentamos as orientações da dinâmica do trabalho, aplicamos um questionário com o objetivo de analisar a relação dos estudantes com a matemática e com o conteúdo de trigonometria e definimos estratégias para os encontros.

3.6.4 Etapas de aplicação

Foi organizado na forma encontros cada um com duas aulas seguindo a mesma quantidade estipulada para a disciplina de Matemática da escola, uma vez que a proposta é analisar a viabilidade do trabalho durante a quantidade de aulas semanais definidas para se trabalhar a trigonometria em sala de aula. A organização das aulas nos encontros seguiu da seguinte maneira:

1. Aplicação de um questionário aos estudantes envolvidos na pesquisa com objetivo de identificar seus conhecimentos sobre a trigonometria no triângulo retângulo;
2. Abordagem histórica da trigonometria;
3. Reconhecimento do ambiente externo e buscar identificar nele os elementos favoráveis para a verificação dos resultados demonstrados em sala, produzir textos em Matemática constando o que pode ser utilizado ou não no ambiente e propor discussões e conclusões das variáveis de trabalho;
4. Abordagem geral sobre definição de triângulo, condição de existência e classificação;
5. Abordagem geral de semelhança de triângulos: demonstração dos principais casos (AA, LAL, LLL) e demonstração do Teorema de Pitágoras;
6. Conjecturas de estratégias para o cálculo de medidas inacessíveis de elementos do espaço físico da escola
7. Reconhecimento o seno, o cosseno e tangente como razões de semelhança e as relações entre elas;
8. Demonstração e cálculo do seno, o cosseno e a tangente dos arcos notáveis (30° , 45° e 60°);
9. Construção de um teodolito caseiro para ser utilizado durante as aulas de aplicação e providenciar materiais complementares;
10. Utilização dos conhecimentos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo e semelhança de triângulos para estimar o cálculo de medidas inacessíveis;
11. Verificação de resultados para medidas acessíveis supostas nas situações como “medidas inacessíveis”;
12. Situações em sala: exercícios propostos nos livros didáticos sobre o conteúdo trabalhado;

13. Avaliação quantitativa: questões abertas e fechadas com relação ao conteúdo trabalhado;
14. Avaliação qualitativa: opiniões dos estudantes sobre a dinâmica de aulas desenvolvidas durante o desenvolvimento da pesquisa.

3.7 Coletando evidências

A coleta e interpretação de evidências perpassaram o desenvolvimento deste trabalho e foram todas delineadas pelos pesquisadores na descrição da aplicação, de modo a responder e concluir a pergunta de pesquisa: **o espaço físico escolar pode contribuir para o ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo?** No entanto, as apresentamos a seguir.

3.7.1 Aplicação da Pesquisa

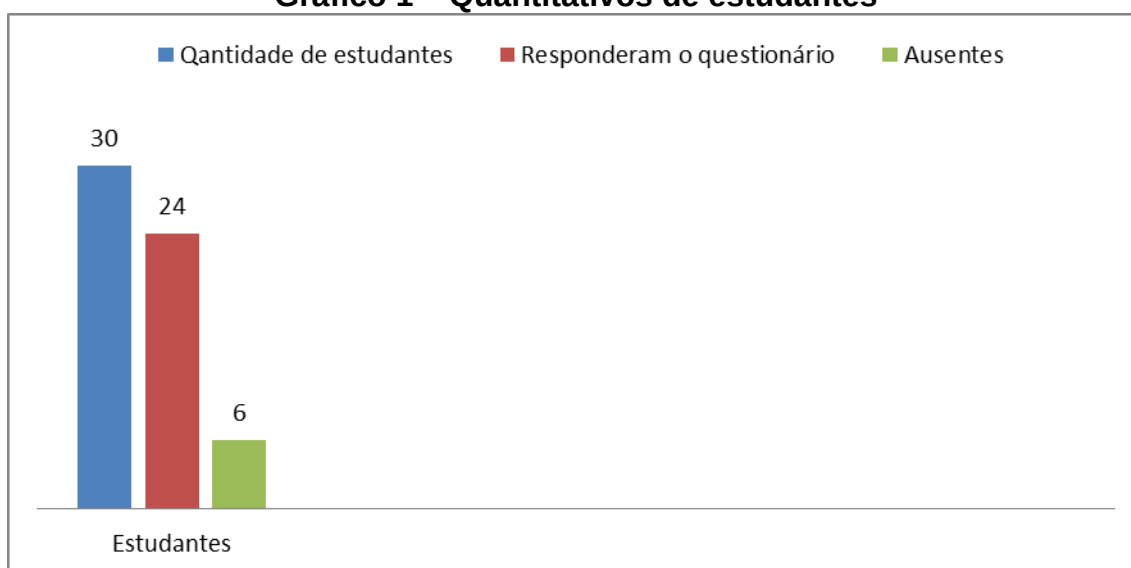
Após apresentar as discussões de autores que tratam do processo ensino-aprendizagem da Matemática e sistematizar suas ideias à construção dos conhecimentos trigonométricos e propor discussões quanto ao uso do ambiente externo, buscamos como significar na proposta a trigonometria no triângulo retângulo. Para tanto, tivemos como aporte o uso do espaço físico da escola e ferramentas complementares que auxiliaram na construção do conhecimento trigonométrico. Esta foi uma etapa minuciosa do trabalho, pois a partir dos resultados obtidos é que levantamos as considerações acerca da viabilidade ou não do uso desta metodologia no processo de construção do conhecimento, sobretudo ao mediar a aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo nas escolas públicas de Educação Básica.

O desenvolvimento da proposta foi executado com estudantes da primeira série do ensino médio da Escola Estadual Josefina Pimenta, na cidade de São João Evangelista/MG. A primeira série do ensino médio foi escolhida pelo fato do Currículo Básico Comum (CBC) do estado de Minas Gerais – MG propor o ensino do conteúdo nesta etapa do ciclo médio de educação.

[...] reconhecer o seno, o cosseno e a tangente como razões de semelhança e as relações entre elas, resolver problemas que envolvam as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente e calcular o seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° . (MINAS GERAIS, 2007, p. 48).

O trabalho seguiu na forma de encontros equivalente a duas aulas de 50 minutos de duração. O primeiro momento aconteceu com uma aula que teve como objetivo a aplicação de um questionário que buscou apontar e analisar a relação do estudante com a matemática e com o conteúdo de trigonometria para assim traçar ao final, uma comparação do aprendizado quanto ao conteúdo trabalhado e sua visão da matemática. Dos trinta (30) estudantes que manifestaram interesse em participar do trabalho, vinte e quatro compareceram no primeiro encontro para responder o questionário. A faixa etária dos estudantes é entre quinze e dezoito anos. Os gráficos de 1 a 16 a seguir apresentam os resultados quantitativos das interpretações obtidas pela análise do questionário.

Gráfico 1 – Quantitativos de estudantes



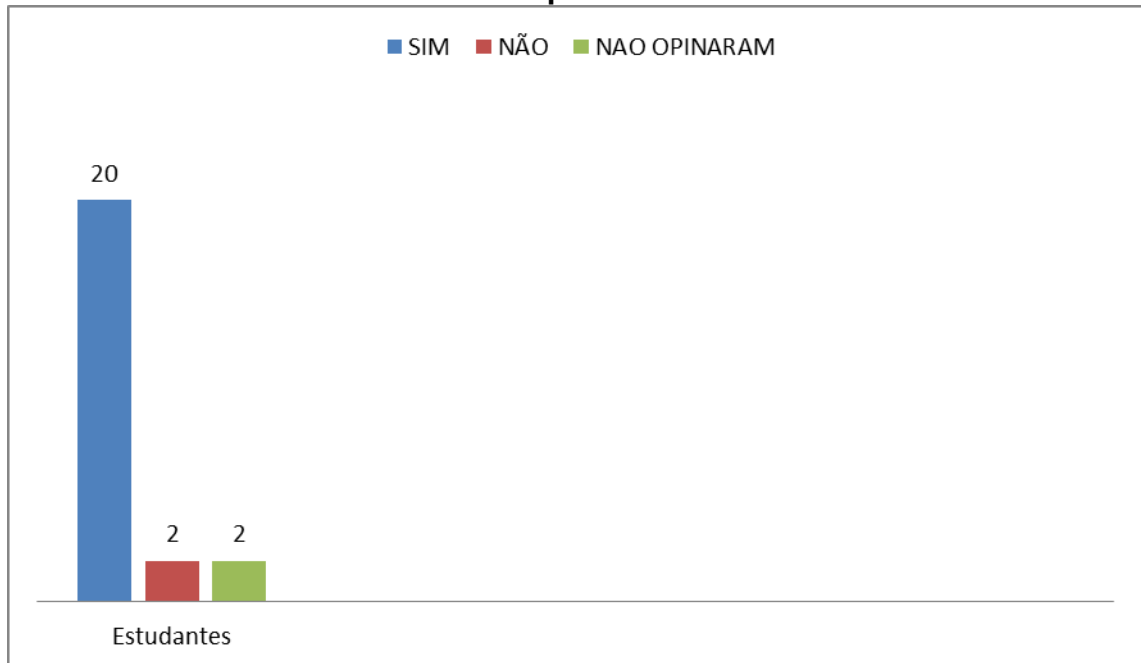
Fonte: Dados da pesquisa

3.7.1.1 Análise específica do questionário

A relação com a matemática

Questão 1) Você considera importante estudar Matemática?

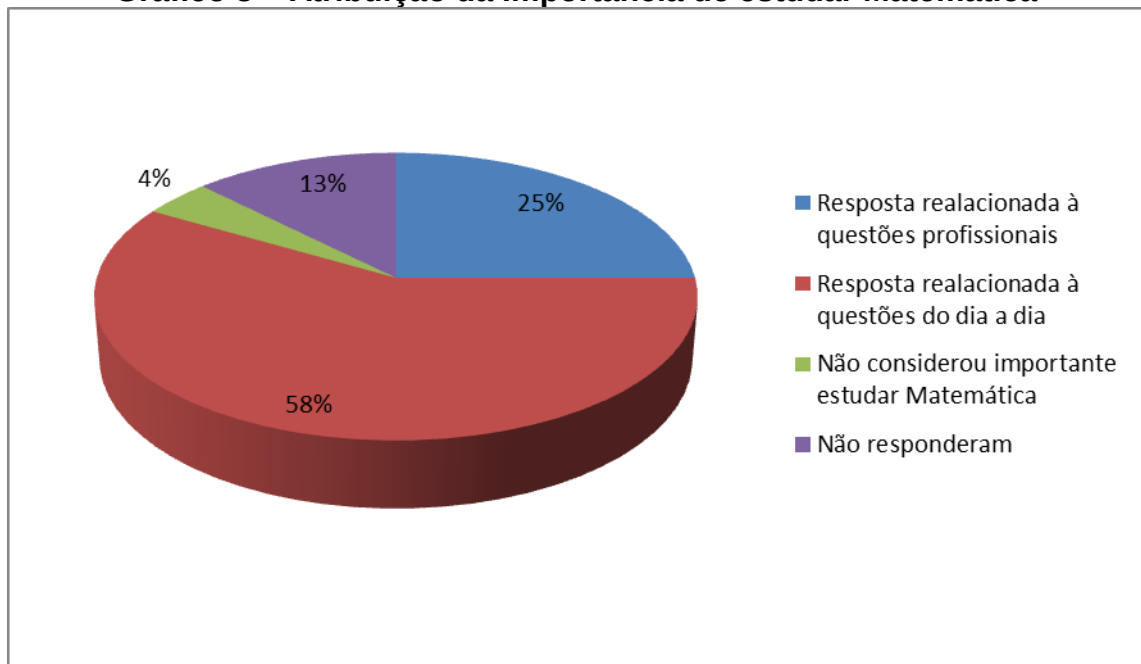
Gráfico 2 – Considera Importante estudar Matemática



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 2) Com relação à resposta do item anterior explique o porque?

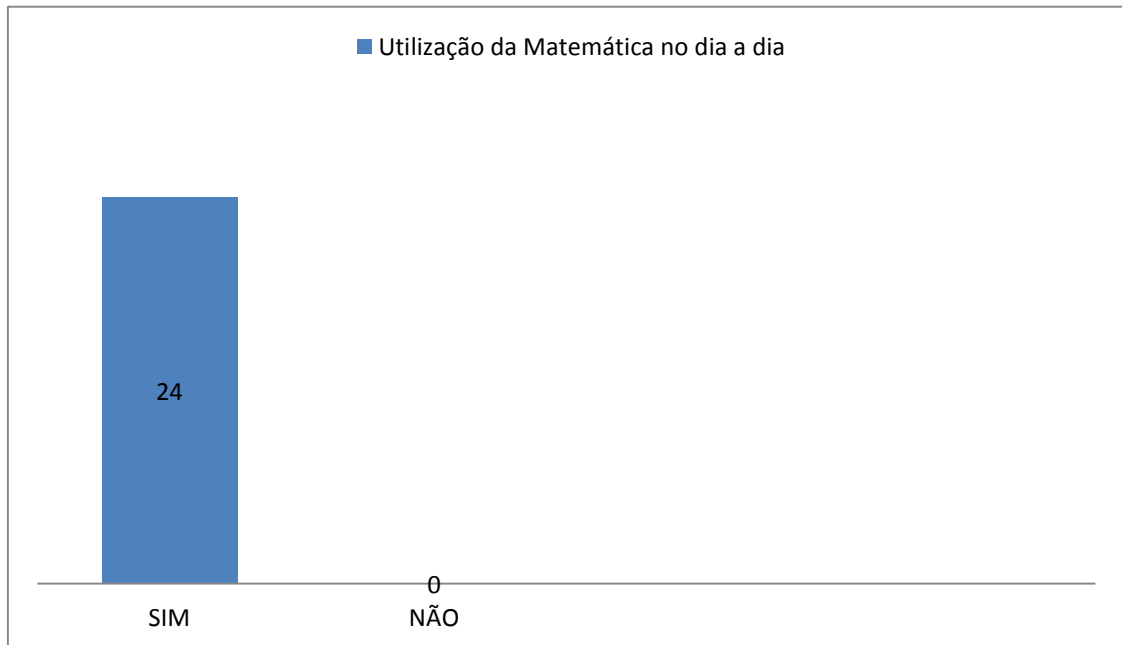
Gráfico 3 – Atribuição da Importância de estudar Matemática



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 3) Você utiliza a Matemática no seu dia a dia?

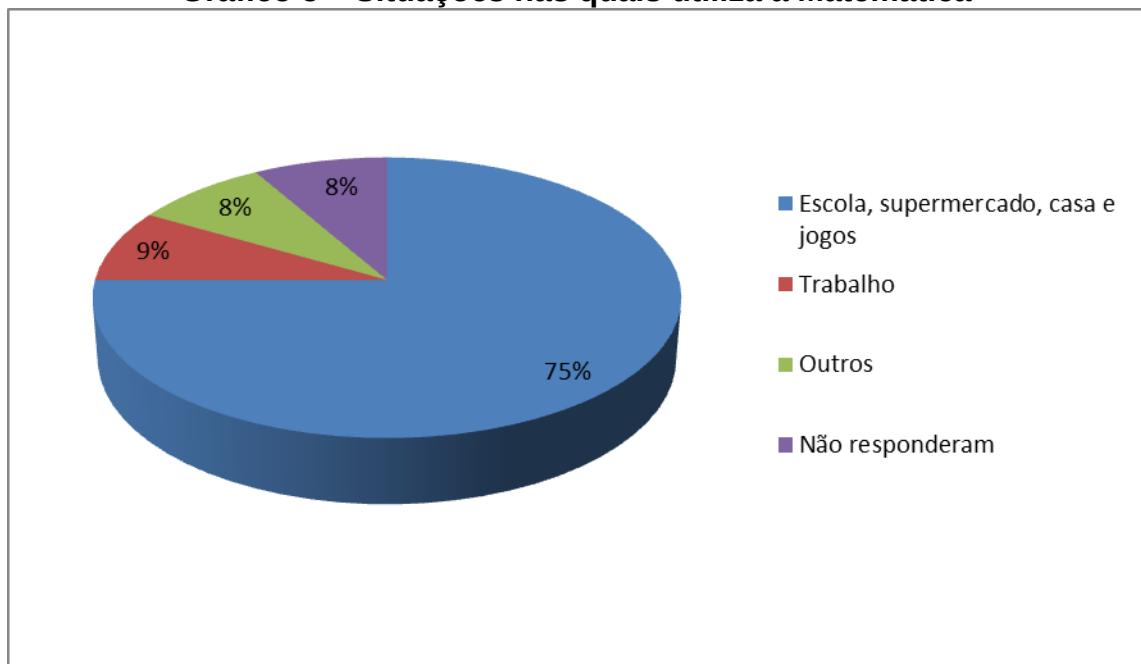
Gráfico 4 – Utilização da Matemática no dia a dia



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 4) Em quais situações você a utiliza?

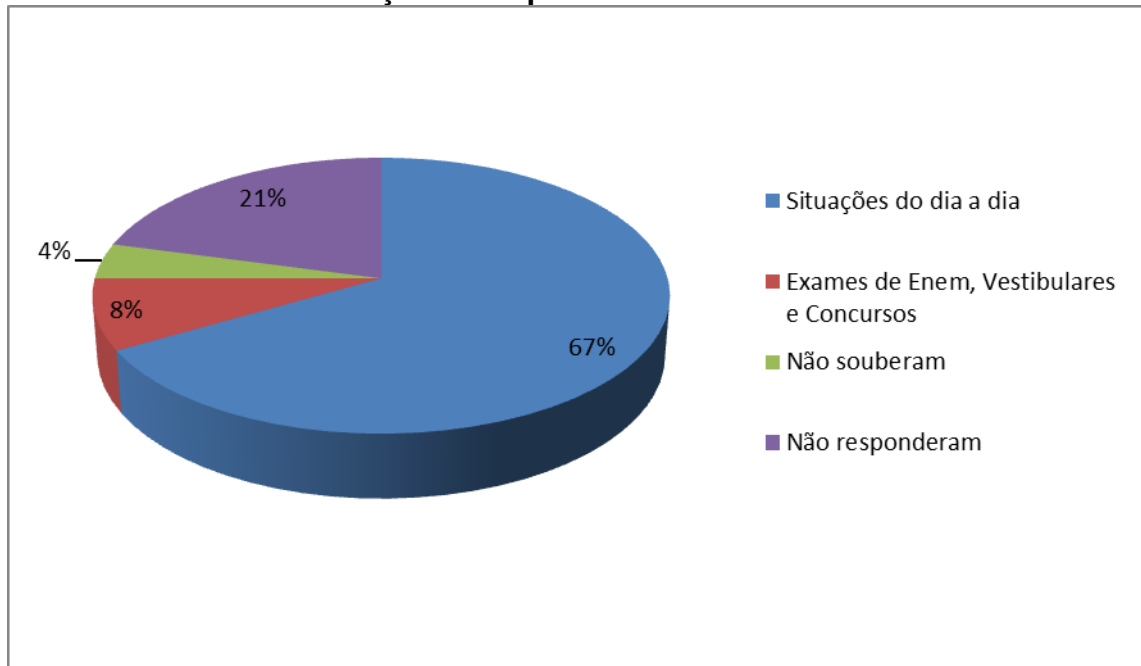
Gráfico 5 – Situações nas quais utiliza a Matemática



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 5) Em quais situações você acredita utilizar?

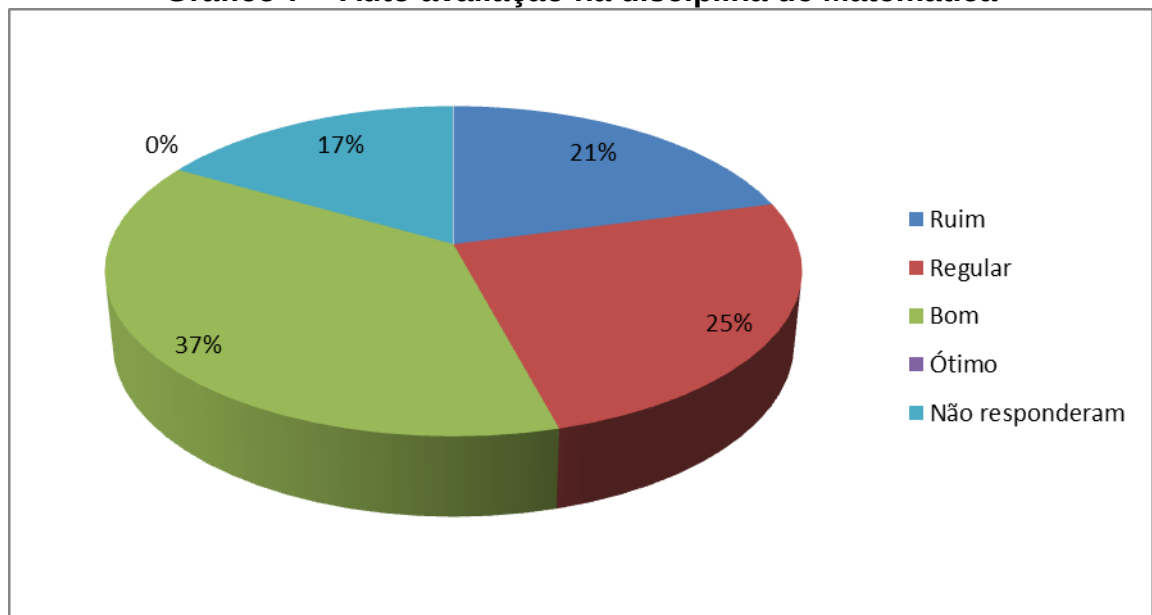
Gráfico 6 – Situações em que acredita utilizar a Matemática



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 6) Qual seria sua auto avaliação na disciplina de Matemática?

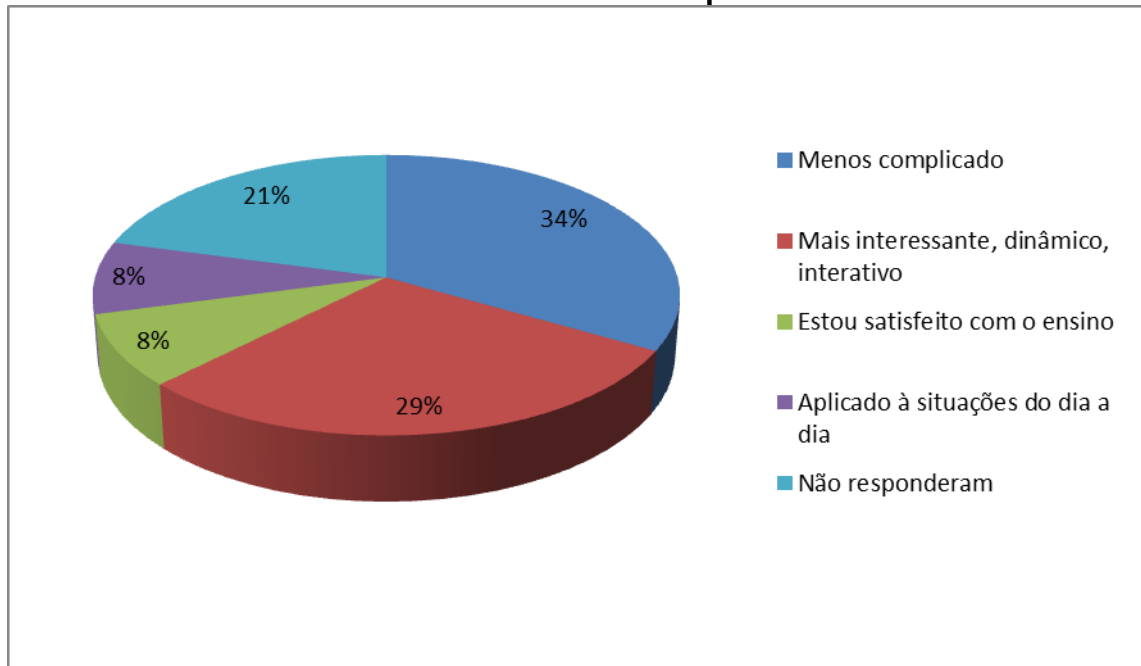
Gráfico 7 – Auto avaliação na disciplina de Matemática



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 7) Como você gostaria que fosse o ensino de Matemática?

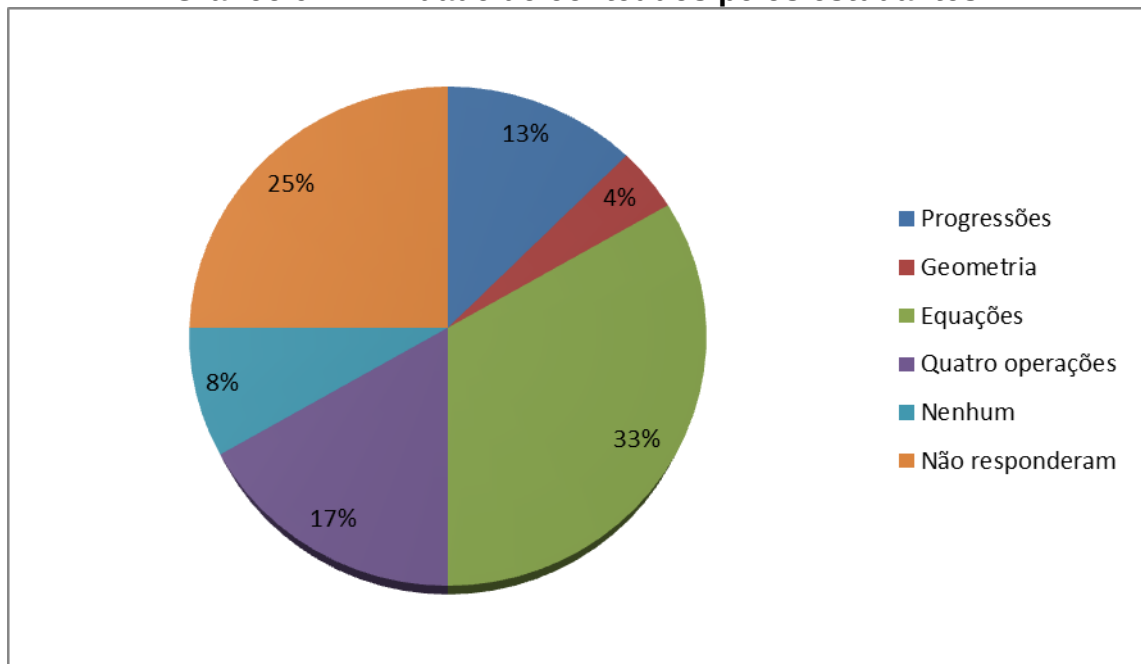
Gráfico 8 – O ensino de Matemática para os estudantes



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 8) Dos conteúdos estudados até hoje, com quais você mais se identificou?

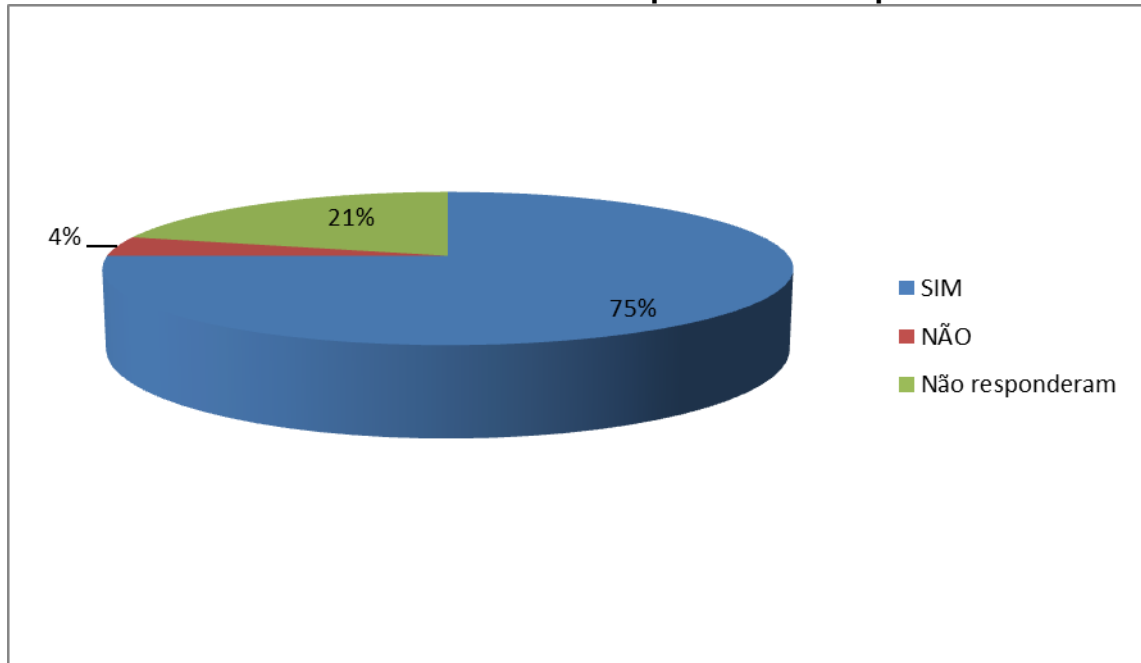
Gráfico 9 – Afinidade de conteúdos pelos estudantes



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 9) Você acredita que a tentativa de aproximar o ensino da Matemática a situações do dia a dia tornaria mais prazeroso o seu estudo nas escolas?

Gráfico 10 – Estudar Matemática seria mais prazeroso se aplicado ao dia a dia

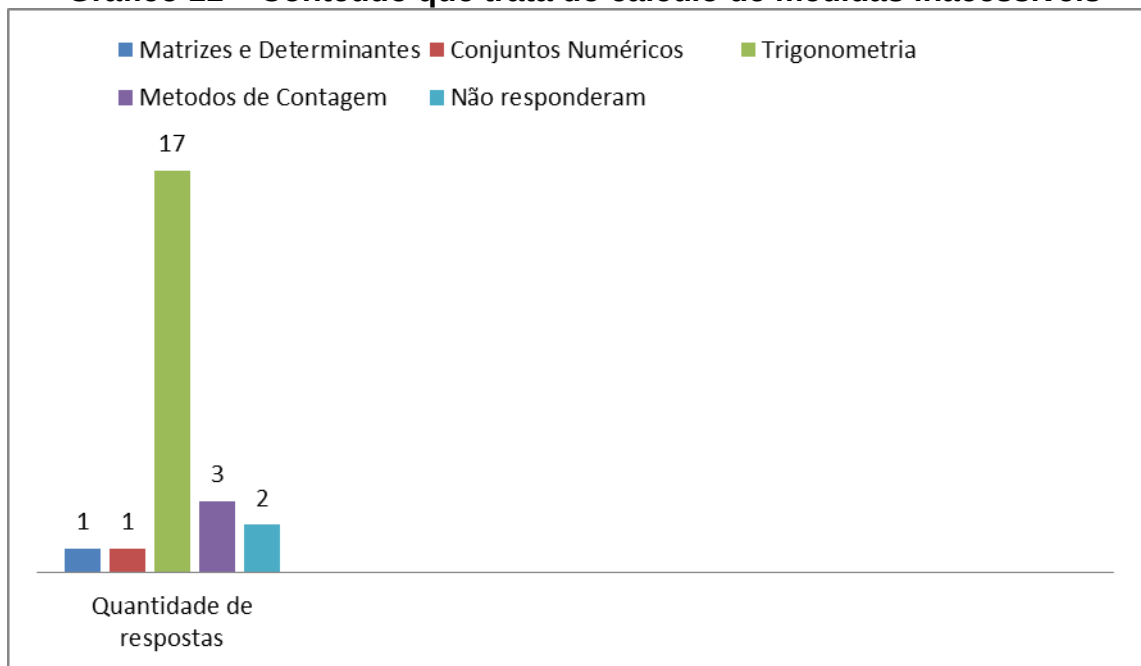


Fonte: Dados da pesquisa

A relação com o conteúdo

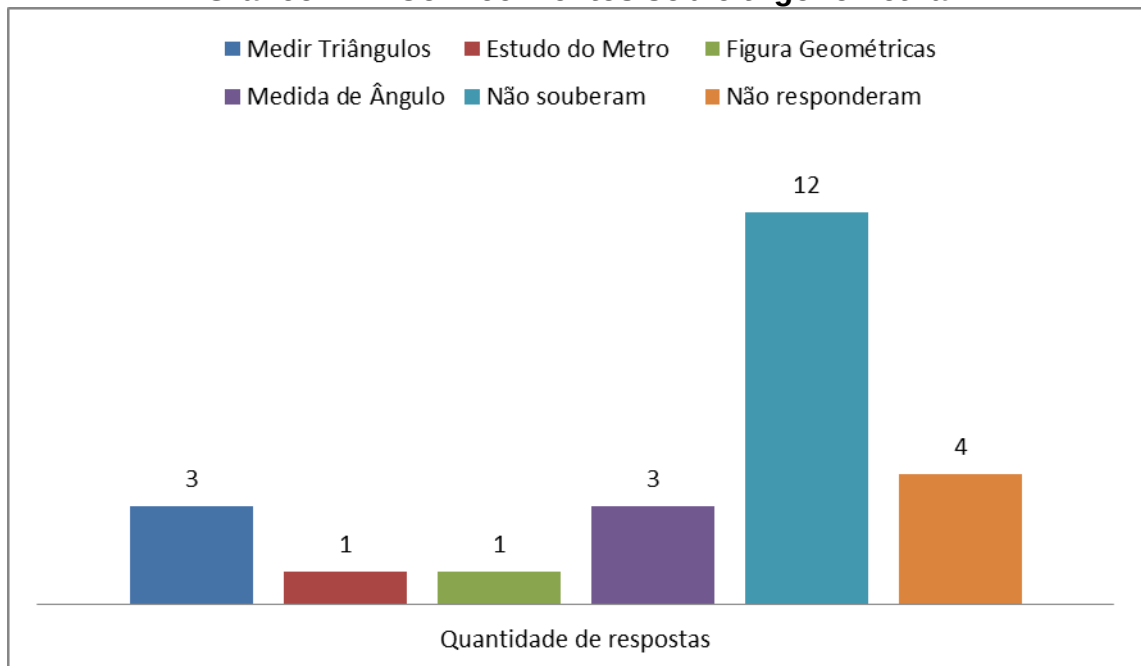
Questão 10) Das opções abaixo apenas **UMA** trata diretamente do *cálculo de medidas de ângulos e lados e suas relações em um triângulo*. De acordo com seus conhecimentos qual das opções você acredita ser a correta?

- a) Matrizes e Determinantes
- b) Conjuntos Numéricos
- c) Trigonometria
- d) Métodos de Contagem

Gráfico 11 – Conteúdo que trata do cálculo de medidas inacessíveis

Fonte: Dados da pesquisa

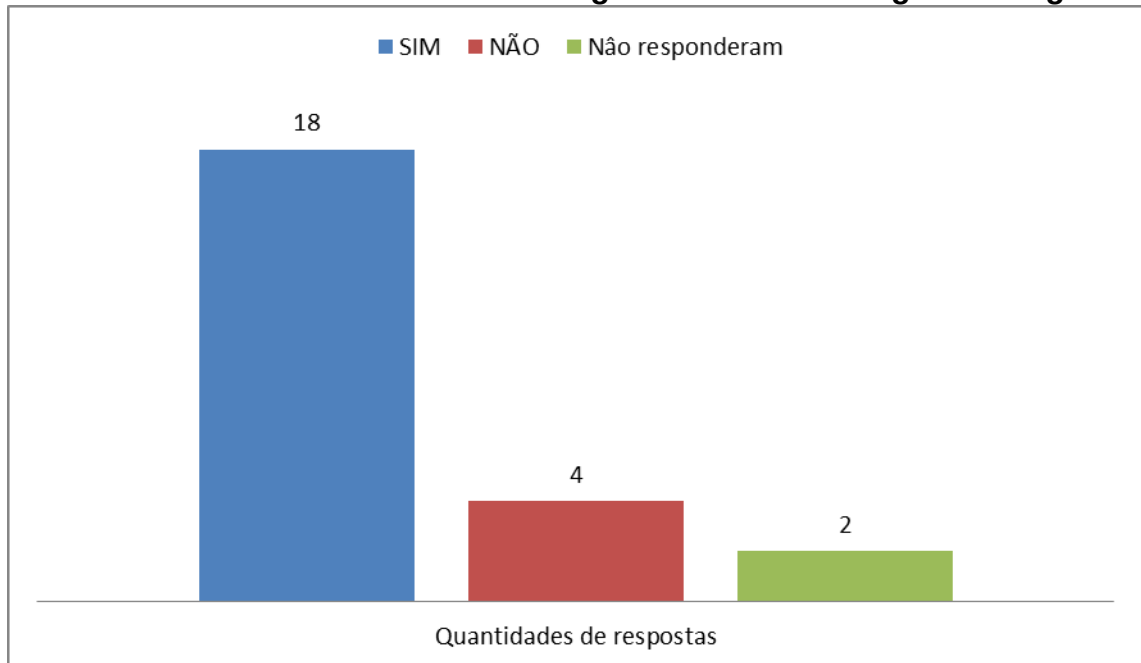
Questão 11) O que você entende por TRIGONOMETRIA?

Gráfico 12 – Conhecimentos sobre trigonometria

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 12) Você já ouviu dizer ou já estudou sobre a trigonometria no triângulo retângulo?

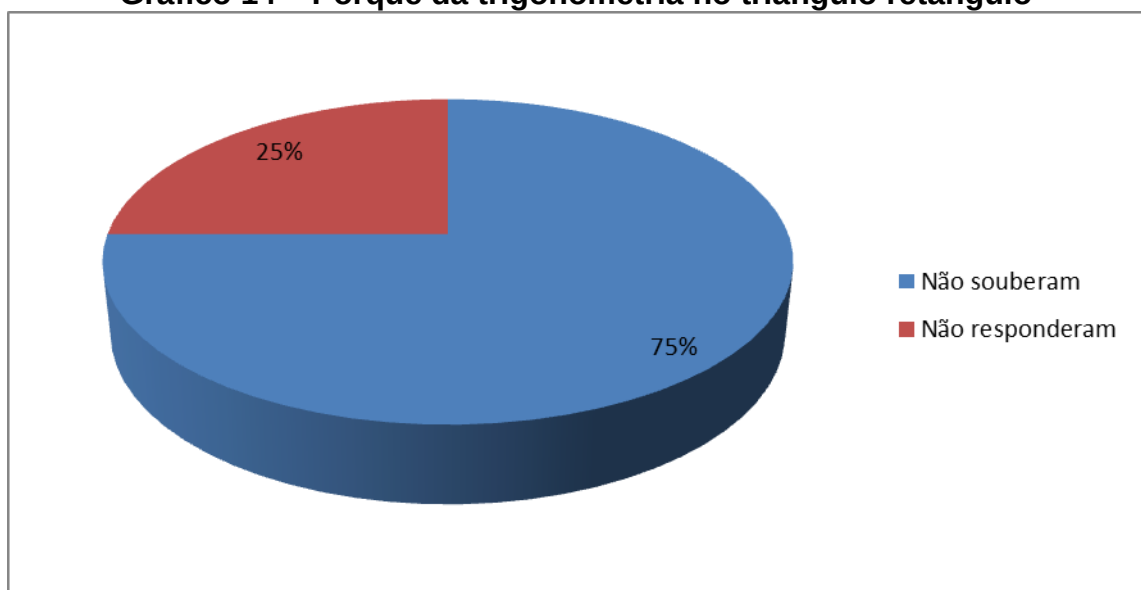
Gráfico 13 – Conhecimento sobre trigonometria no triângulo retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 13) Ainda que não tenha estudado, você saberia dizer o porquê da trigonometria no triângulo retângulo?

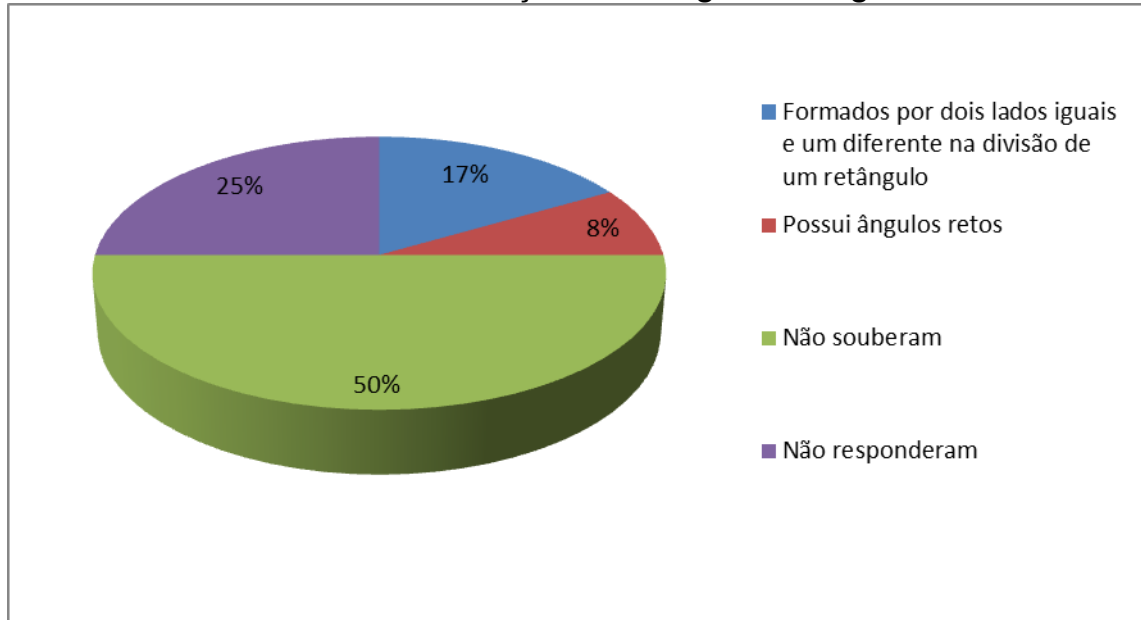
Gráfico 14 – Porquê da trigonometria no triângulo retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 14) Você sabe o que é um triângulo retângulo?

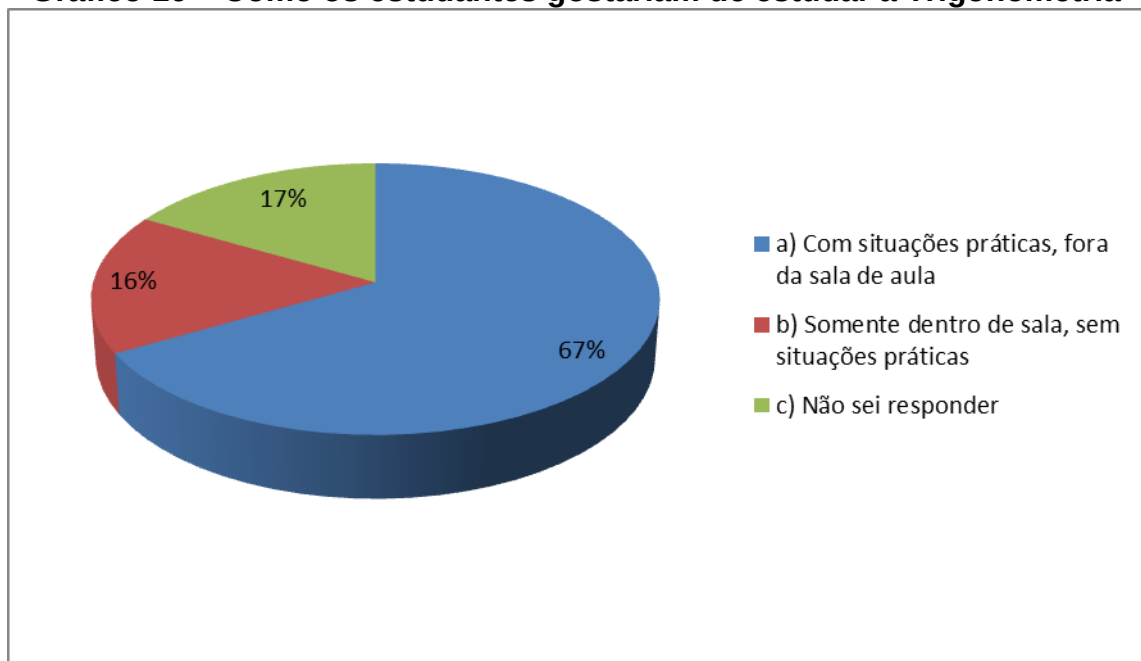
Gráfico 15 – Definição de triângulo retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 15) Como você gostaria de estudar a Trigonometria?

Gráfico 16 – Como os estudantes gostariam de estudar a Trigonometria



Fonte: Dados da pesquisa

Uma discussão detalhada sobre os dados apontados na interpretação das questões acima será apresentada nas considerações finais deste trabalho.

3.7.1.2 Primeiro encontro

Iniciamos com as orientações do conteúdo de Matemática proposto para se trabalhar neste nível de ensino. Explicamos que a proposta é tratá-lo além da sala de aula de modo que envolvam experiências práticas afim de extrair conclusões a respeito de como este ramo da Matemática é aplicado a situações do dia a dia. Também esclarecemos sobre alguns assuntos como o envolvimento no trabalho, a disciplina e assiduidade.

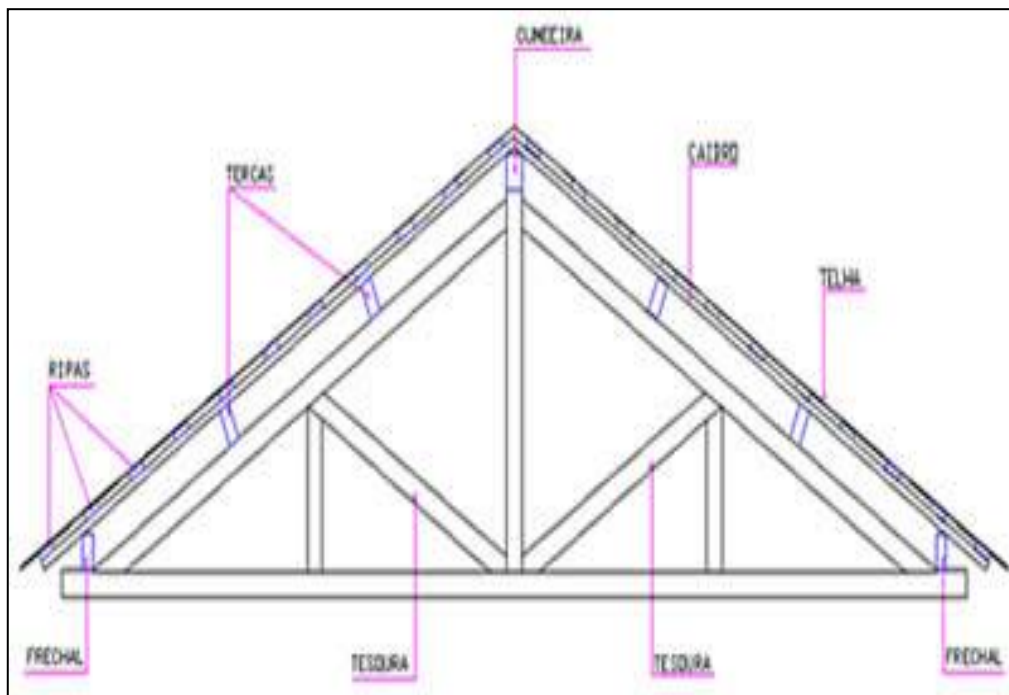
A seguir, os pesquisadores foram com os estudantes para o pátio principal da escola para um primeiro contato com os possíveis elementos de aplicação, embora esses ainda não soubessem qual conteúdo seria tratado. Ao observarem as estruturas físicas da escola, bem como os elementos que a compõe, foram instigados a evidenciar qual seria o conteúdo matemático que fosse passível de desenvolvimento a partir destes elementos. Foram unânimes em mencionar a Geometria, pois é fácil identificar as figuras geométricas formadas nas estruturas que compõe a construção da escola. Por exemplo, a estrutura de sustentação do telhado principal do pátio é formada por dois triângulos retângulos congruentes de altura comum aos dois, de modo que para reforçar ainda mais a estrutura formaram-se novas figuras cuja visualização é claramente possível. A exemplo disso é possível destacar quadriláteros, outros triângulos retângulos semelhantes aos dois principais, porém de áreas menores e triângulos quaisquer. As Figuras 3 e 4 apresentadas a seguir mostram respectivamente a cobertura do pátio e o modelo geométrico.

Figura 3 – Cobertura do pátio principal da escola



Fonte: Fotos dos autores

Figura 4 – Modelo geométrico do telhado do pátio



Fonte: SILVA, 2013

Explorando um pouco mais a conversa, solicitamos que falassem sobre novos elementos do espaço físico, mas que não se limitassem apenas em identificar as figuras geométricas, mas que tentassem fazer alguma analogia quanto a um possível trabalho de aplicação com tais estruturas. Observamos dificuldades quanto a esta questão e, no entanto citamos outros elementos do ambiente externo, como por exemplo, as árvores existentes neste espaço, como mostrado na Figura 5. Novamente foram instigados sobre qual trabalho seria possível desenvolver com relação àquelas árvores.

Figura 5 – Árvores do espaço físico da escola



Fonte: Fotos dos autores

Neste momento, foram recordados sobre uma questão proposta no questionário aplicado, que, como já dito, teve como objetivo analisar a relação dos estudantes com a matemática e com o conteúdo específico de trigonometria. A pergunta de número onze foi a seguinte: **o que você entende por trigonometria?** Pela análise quantitativa apresentada anteriormente pelo Gráfico 12 percebemos que a maioria não apresentou conhecimentos satisfatórios sobre o que é trigonometria.

Assim, apresentamos a trigonometria como próximo conteúdo a ser trabalhado e introduzimos seu estudo com um breve aspecto histórico e definições etimológicas.

3.7.1.2.1 Um pouco da história da trigonometria

De acordo com Dante (2005) a palavra Trigonometria vem de *tri* (três), *gonos* (ângulos) e *metron* (medida) e é um ramo da Geometria no qual se estudam métodos para calcular medidas de lados ou ângulos de um triângulo, a partir de algumas informações desse triângulo. Segundo Mendes citado por Fortes (2012) “a necessidade de relacionar medidas de distância com ângulos levou diferentes povos, como babilônios, gregos, árabes e hindus, a descobrirem a Trigonometria”.

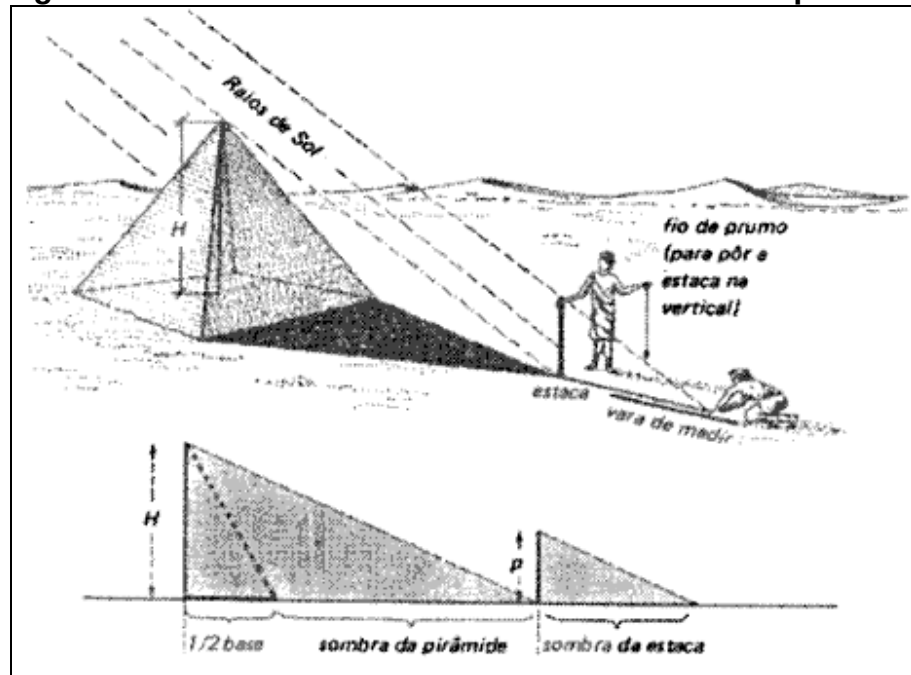
Os triângulos retângulos são essenciais para o estudo da Trigonometria. Remetem a Pitágoras e seu famoso teorema. Acredita-se que Pitágoras adquiriu seus conhecimentos com os agricultores egípcios, chamados de esticadores de cordas, pois assim demarcavam as margens do rio Nilo. (MENDES *apud* Fortes, 2012, p. 15).

Em 2000 a.C, os egípcios já tinham conhecimentos sobre o triângulo retângulo. Babilônios e egípcios sabiam vários teoremas sobre razões entre lados de triângulos semelhantes, porém não dominavam a teoria matemática.

Foram os gregos que iniciaram os estudos de sistematização teóricos, formando as bases de conhecimentos da Trigonometria. O filósofo grego Tales de Mileto (640 – 549 a.C) demonstrou que entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes sempre haverá a mesma relação, independente do comprimento desses lados. Pela determinação da razão de semelhança entre triângulos retângulos, Tales efetivou a medição da altura de objetos por meio de sua sombra. Por volta de 600 a.C., Tales estava no Egito e foi chamado pelo Faraó para calcular a altura de uma pirâmide. Com uma vara fincada no solo, esperou o momento solar em que o comprimento da sombra da vara no chão medisse a sua altura. Então, pediu que medissem imediatamente a sombra da pirâmide. Ao comprimento da sombra, foi somada metade da medida da base da pirâmide, pois sendo muito grande, escondia parte da sombra. Assim, Tales demonstrou que a altura da pirâmide é igual a sua sombra mais a metade da base. (MENDES *apud* FORTES 2012, p. 16).

A Figura 6 mostra o procedimento desenvolvido por Tales de Mileto (600 a. C) para calcular a altura da pirâmide usando a projeção da sombra.

Figura 6 – Tales de Mileto determinando a altura da pirâmide



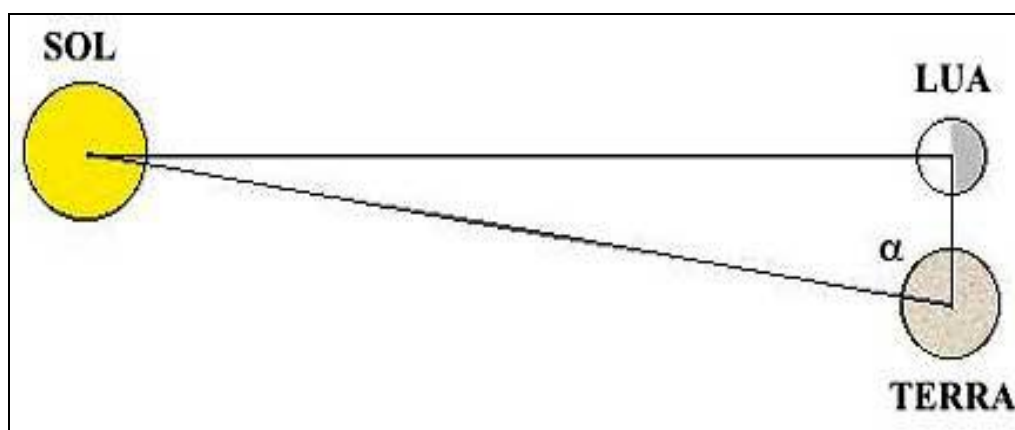
Fonte: MENDES, 2009

Hogben citado por Fortes (2012) diz que “[...] a cidade de Alexandria foi polo cultural da Antiguidade e importante marco para a história da Trigonometria. Lá viveram Aristarco de Samos (310 – 250 a.C.) e Hiparco de Nicéia (275 – 194 a.C.)”.

Aristarco fez a primeira estimativa das distâncias relativas do sol e da lua em relação à Terra. Hiparco fez a estimativa da circunferência da Terra e construiu a primeira tábua trigonométrica e a usou para calcular a distância da Terra à Lua. (HOGBEN *apud* FORTES 2012, p. 16).

O procedimento feito pelos matemáticos Aristarco e Hiparco é mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Modelo de Aristarco e Hiparco



Fonte: MEDEIROS, 2012

Contudo, proporcionamos aos estudantes conhecer sobre um ramo da matemática considerado de grande valia a situações práticas do dia a dia e suas contribuições em outras áreas como a Engenharia.

3.7.1.2.2 Retomando a discussão

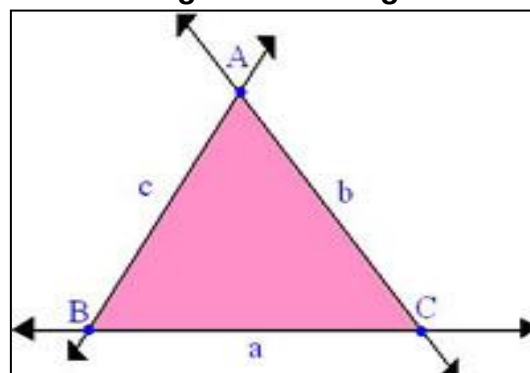
Após enfatizarmos um pouco da história da trigonometria, explicamos que seu estudo se evidencia em três momentos: no triângulo retângulo, num triângulo qualquer e na circunferência. E que aprofundaríamos o seu estudo, com relação ao triângulo retângulo e que o trabalho estaria voltado ao cálculo de medidas inacessíveis e de ângulos com relação a um triângulo retângulo como o feito por Aristarco (310 – 250 a.C) e Hiparco (275 – 194 a.C). Instigamos uma discussão sobre a pergunta quatorze do questionário (Gráfico 15): **o que é um triângulo retângulo?**

Pela análise dos resultados, é possível identificar que apenas oito por cento da turma tem algum conhecimento da classificação de um triângulo quanto aos seus ângulos e que dezessete por cento demonstraram algum conhecimento quanto aos seus lados. Aproveitamos a oportunidade para trabalhar a condição de existência e a classificação de um triângulo: quanto aos lados (isósceles, escaleno e equilátero) e quanto aos ângulos (agudo, reto e obtuso).

O que é um triângulo?

Segundo Dante (2011), triângulo é um polígono formado por três segmentos de retas que se cruzam duas a duas, formando três vértices, três ângulos internos e três lados.

Figura 8 - Triângulo



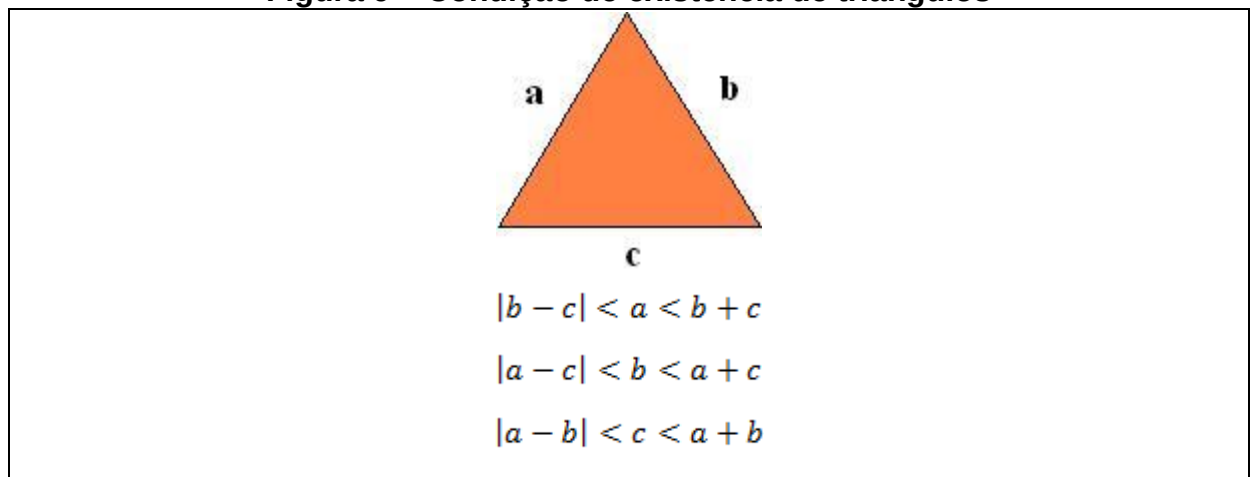
Fonte: MIRANDA, 2013

Polígono é uma linha fechada formada apenas por segmentos de reta que não se cruzam no mesmo plano (DANTE, 2011).

Condição de existência de um triângulo

Para construir um triângulo é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas (MIRANDA, 2013).

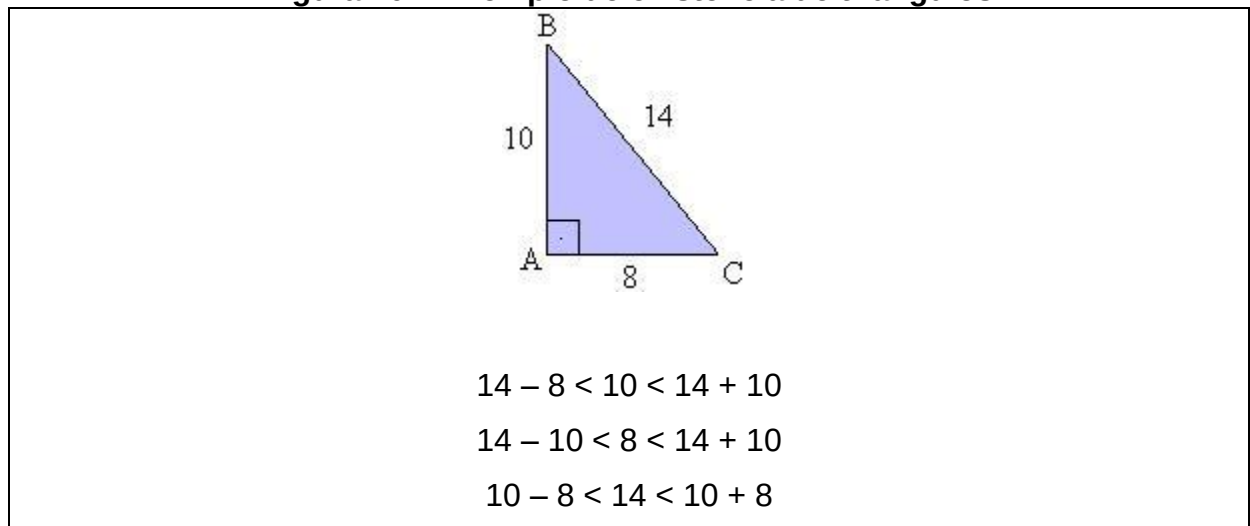
Figura 9 – Condição de existência de triângulos



Fonte: MIRANDA, 2013

Exemplo:

Figura 10 – Exemplo de existência de triângulos



Fonte: MIRANDA, 2013

Classificação dos triângulos

De acordo com Dante (2011), a classificação dos triângulos pode ser quanto à medida de seus lados e quanto à medida de seus ângulos.

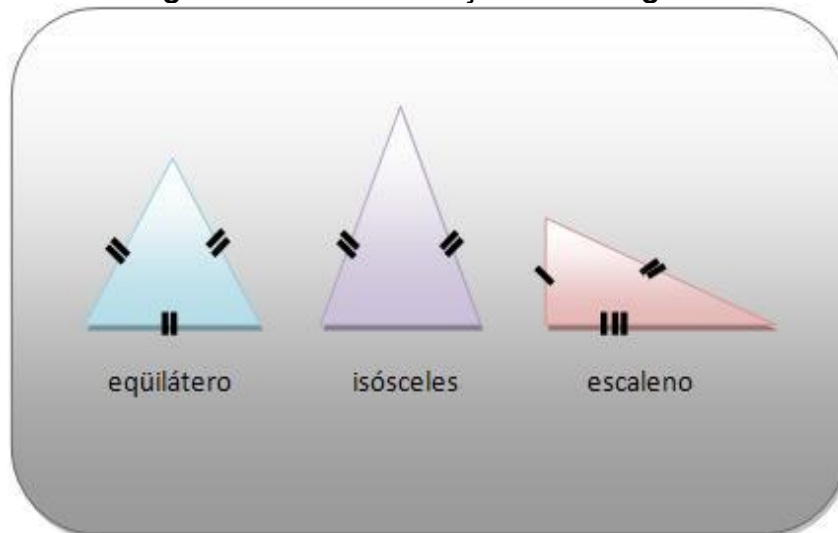
Quanto à medida de seus lados:

Equilátero: três lados iguais

Isósceles: dois lados iguais

Escaleno: três lados diferentes

Figura 11 – Classificação de triângulos



Fonte: CLASSIFICAÇÃO DOS... , 2012

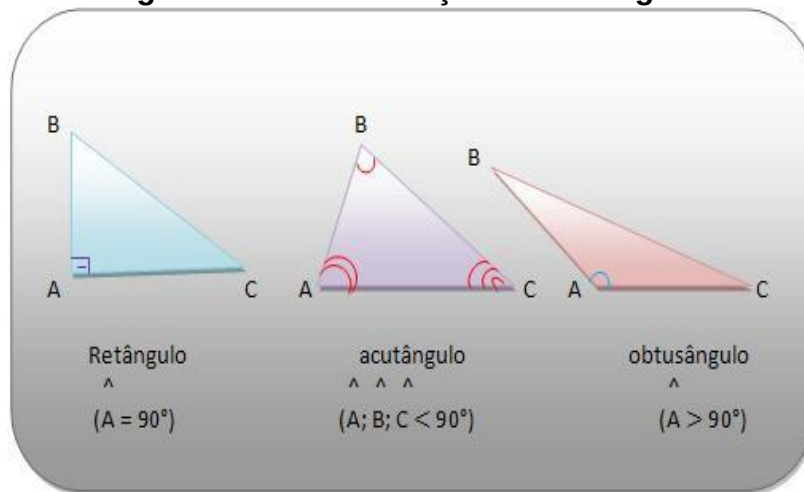
Quanto à medida de seus ângulos

Retângulo: quando possui um ângulo reto (ângulo com medida igual a 90°)

Acutângulo: quando possui os três ângulos agudos (ângulo com medida menor que 90°)

Obtusângulo: quando possui um ângulo obtuso (ângulo com medida maior que 90°)

Figura 12 – Classificação dos triângulos

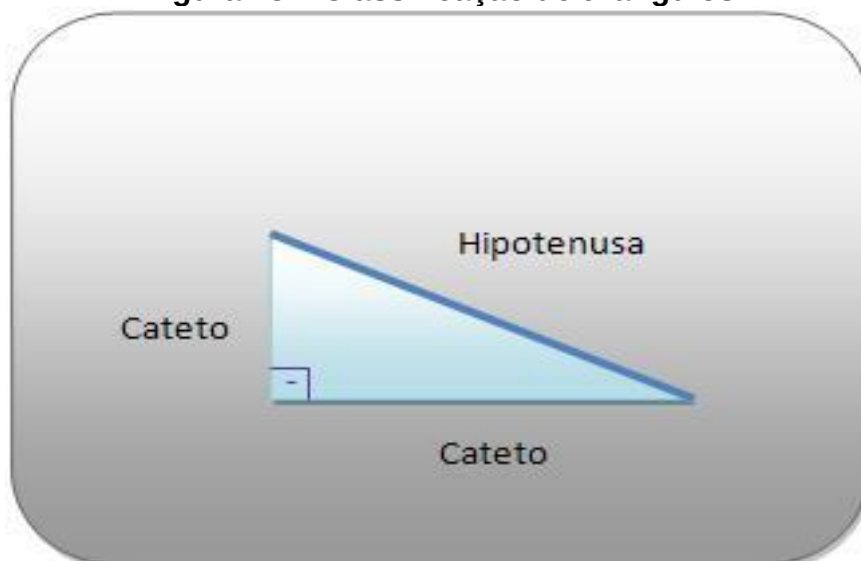


Fonte: CLASSIFICAÇÃO DOS... , 2012

Assim:

- Num triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto (90°) é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são os catetos deste triângulo

Figura 13 – Classificação de triângulos



Fonte: CLASSIFICAÇÃO DOS... , 2012

3.7.1.2.3 Identificando elementos no espaço físico da escola

Como último momento do segundo encontro, os estudantes foram convidados a percorrer o espaço da escola para que pudessem identificar elementos favoráveis a serem trabalhados ao estudar a trigonometria no triângulo retângulo.

O primeiro ponto em que concentramos foi no espaço encoberto da escola onde existem algumas árvores e uma quadra como mostra a Figura 14.

Figura 14 – Estudantes identificando elementos no espaço físico da escola



Fonte: Fotos dos autores

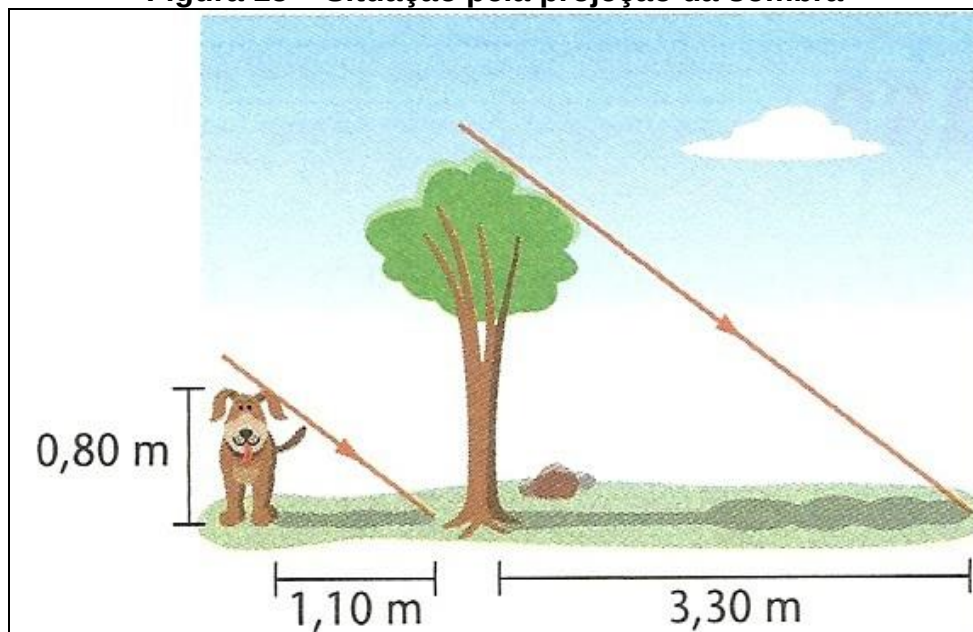
Neste momento os estudantes foram indagados sobre uma possível medida inacessível existente. Uma estudante questiona sobre **o que é uma medida inacessível** que entanto a definimos como:

Medida inacessível, segundo o dicionário Bechara é “um adjetivo e se refere ao que não se pode ter acesso”. (BECHARA, 2011, p. 720)

Assim que conversamos um pouco sobre medida inacessível, os estudantes perceberam que a altura de algumas árvores existentes no espaço realmente são medidas inacessíveis quando não se dispõe de recursos mais complexos para verificação de tais medidas. Neste momento, uma estudante pergunta se é possível medir a altura sem que se suba na árvore. Explicamos a eles que uma das alternativas é a utilização da trigonometria. Aproveitamos para instigá-los sobre a

seguinte questão: **como proceder para encontrar a altura da árvore utilizando os conceitos de trigonometria?** Obtivemos respostas tais como: “*é necessário utilizar o tamanho de uma pessoa e contar quantas vezes o seu tamanho daria a altura da árvore*”. Percebemos que a ideia da estudante ia de encontro à questão da projeção da sombra utilizada por Tales de Mileto (600 a. C) para determinar a altura da pirâmide. Desta maneira, a estudante fazia menção à semelhança de triângulos, porém não conseguindo explicar com tais relações. Uma situação como sugerida é apresentada na Figura 15.

Figura 15 – Situação pela projeção da sombra



Fonte: LIMA, 2013

No entanto, ao avançar as discussões, outra estudante mencionou com suas palavras exatamente a ideia desenvolvida pelo matemático, mas sem fazer relação à semelhança de triângulos: “*é só medir a sombra da árvore, pois podemos usar a sombra para medir o tamanho de uma determinada coisa usando a trigonometria*”.

Explicamos as ideias utilizadas pelo matemático Aristarco (310 – 250 a.C.) para calcular a distância da terra à Lua e ao Sol e por Tales de Mileto (600 a.C.) para o cálculo da altura de uma pirâmide, medindo as sombras projetadas e fazendo relações à triângulos semelhantes através de medidas acessíveis, como mostrado nas Figuras 6 e 7 .

Como não havíamos ainda teorizado as relações de semelhança justamente porque o objetivo não era o de trabalhar, neste momento, com cálculos de medidas inacessíveis usando semelhanças, e sim as razões trigonométricas no triângulo retângulo, lançamos outro questionamento: **qual seria outra alternativa para encontrar a altura da árvore sem usar a projeção da sombra?** Geramos uma situação problema que a identificamos como **situação 1** sendo a abertura para o trabalho de aplicação. Como ainda fosse necessário identificar outros elementos do espaço físico optamos por voltar à situação 1 nos próximos encontros.

Após estas discussões passamos para outro ponto da escola: a quadra coberta. Neste ponto, os estudantes geraram questionamentos interessantes a respeito da estrutura da quadra e as figuras geométricas formadas para demarcarem todos os espaços necessários no piso. A Figura 16 ilustra este momento.

Figura 16 – Estudantes identificando elementos na quadra da escola



Fonte: Fotos dos autores

Pedimos que identificassem triângulos retângulos e que discutissem sobre possíveis trabalhos a serem desenvolvidos neste espaço. Estruturas como a trave do gol e a marcação da quadra foram apresentadas.

Uma discussão interessante e aprofundada foi gerada, no momento em que uma estudante apresentou uma estrutura formada por um dos lados da grade da quadra na posição vertical, que se cruza perpendicularmente com outra estrutura do corrimão do mesmo lado, determinando um ângulo reto. Para garantir ainda mais a

sustentação da grade, traçaram uma terceira estrutura de modo que esta concorresse em dois pontos (um em cada lado) gerando internamente dois ângulos agudos, já que as outras duas concorriam perpendicularmente, formando perfeitamente um triângulo retângulo, como mostra a figura 17.

Figura 17 – Estudantes identificando elementos geométricos na quadra



Fonte: Fotos dos autores

Com a percepção da estudante foi possível levá-los ao conhecimento de alguns fatores importantes através do diálogo gerado entre pesquisadores e estudantes.

Pesquisadores – Será que o triângulo é retângulo?

Estudantes – Sim.

Pesquisadores – O que nos garante tal fato?

Estudantes – As retas que se cruzam na vertical e na horizontal.

Pesquisadores – Já que um de seus ângulos mede 90° , qual é a soma dos outros dois ângulos internos?

Estudante – Cada um mede 45° .

Pesquisadores – Por quê?

Estudante – Porque são iguais.

Pesquisadores – O que nos garante que cada um dos ângulos agudos do triângulo tem medida igual a 45° ? (Mesmo não podendo afirmar que o ângulo é de 45° , é evidente que ela sabe que sua soma é 90° , porém não consegue explicar).

Estudante – Porque são iguais.

Pesquisadores – A sua fala deixa implícita que a soma dos ângulos internos é 90° , mas se dissermos que um mede 30° e o outro 60° , ou 80° e 10° a soma ainda seria 90° ?

Estudante – Sim.

Pesquisadores – O que nos garante a igualdade entre os ângulos?

Estudante – Não sei explicar.

Indagamos novamente quanto valeria a soma dos ângulos internos deste triângulo. Outra estudante responde:

- Se o triângulo é retângulo, dois destes determina um retângulo que tem 360° , assim se partirmos ao meio teremos dois triângulos de 180° , logo é porque a soma dos ângulos do triângulo é 180° .

Pesquisadores – Será que os dois pontos que determinaram o terceiro lado do triângulo são equidistantes em relação ao vértice que gerou o ângulo reto? Este fato poderia nos levar a descobrir se os ângulos são de 45° , como afirma a colega?

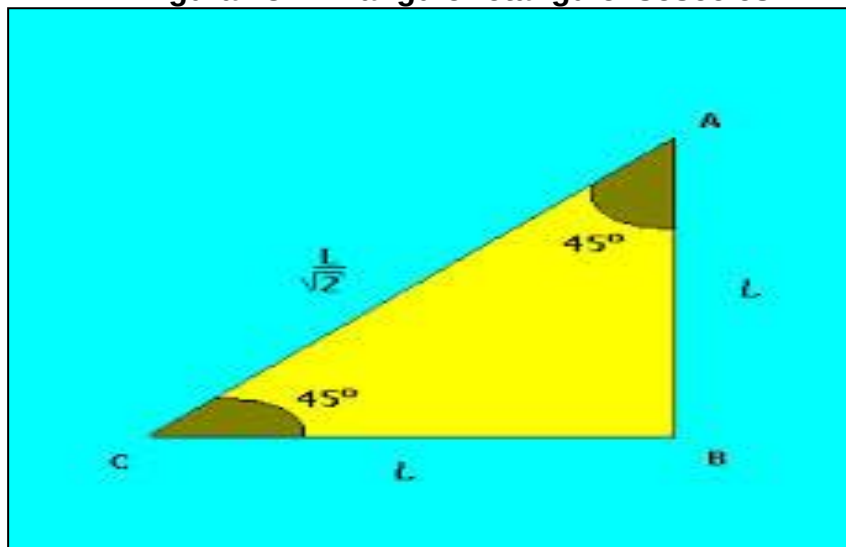
Estudantes – Não sabemos o que são pontos equidistantes.

Uma definição adequada para pontos equidistantes foi apresentada. Segundo o Dicionário online de Português (2013) “a palavra equidistante como adjetivo na

Matemática trata-se de igual distância”. Exemplo apresentado: todos os pontos da circunferência são equidistantes do centro.

Assim, quando queremos saber se os dois pontos que determinaram o terceiro lado do triângulo são equidistantes em relação ao vértice que gerou o ângulo reto (90°) queremos saber se os catetos deste triângulo retângulo têm a mesma medida. Ou seja, se num triângulo ABC, retângulo em B, a distância de A até B é igual a distância de B até C, o que garantiria que este triângulo é isósceles, como mostra a Figura 18.

Figura 18 – Triângulo retângulo isósceles



Fonte: MACHADO, 2006

Pesquisadores – Se eles são equidistantes o triângulo ainda poderá ser retângulo?

Estudantes – Não sabemos responder.

Pesquisadores – Já que as medidas que determinam o triângulo são acessíveis, que tal medirmos para verificarmos se os pontos são equidistantes e responder à pergunta anterior?

Estudantes – Ok.

Ao voltar para verificar a igualdade ou não entre os catetos deste triângulo, concluímos que ele não pode ser isósceles já que as medidas dos seus catetos medem 2,30 m e 2,90 m. Contudo, se o triângulo não pode ser isósceles, os ângulos internos deste triângulo também não podem ter medidas de 45° cada, o que exclui a possibilidade levantada pela estudante. Por outro lado, o triângulo não deixará de ser retângulo, pois o que o classifica como retângulo são seus ângulos e não seus lados.

Como última proposta para este encontro discutimos sobre quais trabalhos de aplicação poderiam ser desenvolvidos neste espaço. E concluíram encontrar novas medidas inacessíveis como a altura da quadra. Quanto às técnicas do futebol, discutimos sobre um possível trabalho sobre a inclinação adequada de partida da bola ao se bater uma cobrança de pênalti. **Com qual ângulo deve partir a bola com relação à quadra de modo que ela bata no travessão?** Todos estes questionamentos foram tratados nos encontros seguintes aqui são identificados como **proposta complementar 1**. Os primeiros passos da situação são mostrados na Figura 19.

Figura 19 – Estudantes trabalhando na situação: inclinação da bola



Fonte: Fotos dos autores

3.7.1.3 Segundo encontro

Ao extrairmos conclusões para todos os questionamentos gerados no encontro anterior o terceiro ponto percorrido no espaço físico da escola foi o pátio principal, onde os estudantes identificaram figuras geométricas como dito no início do segundo encontro. Neste momento, foi proposto novamente que discutissem sobre possíveis aplicações. E sugeriram a altura da cobertura do pátio, situação que aceitamos e que identificamos como **proposta complementar 2**. Os primeiros passos da situação são mostrados nas imagens abaixo.

Figura 20 – Estudantes trabalhando na situação: altura da cobertura do pátio



Fonte: Fotos dos autores

Como já haviam identificado anteriormente figuras geométricas na estrutura principal, criamos uma discussão com o grupo fazendo a seguinte pergunta: na estrutura da cobertura do pátio podemos observar alguns quadriláteros com algumas de suas diagonais; usando dois lados de um desses quadriláteros e essa diagonal obtemos triângulos; **podemos dizer que esses triângulos são retângulos?** A Figura 21 ilustra o quadrilátero mencionado na discussão.

Figura 21 – Estudantes identificando figuras geométricas no pátio da escola



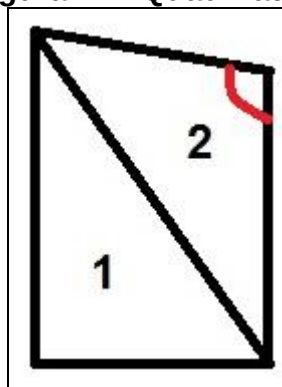
Fonte: Fotos dos autores

Um estudante perguntou sobre o que é um quadrilátero e uma diagonal. Uma definição para ambos foi apresentada.

Os **quadriláteros** são polígonos (linha fechada formada apenas por segmentos de reta que não se cruzam no mesmo plano) de quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos internos (DANTE, 2011).

Apresentaram dificuldades em identificar a situação sob uma visão matemática. Levamos a questão para uma representação matemática para facilitar o entendimento. A situação representada geometricamente é apresentada na Figura 22.

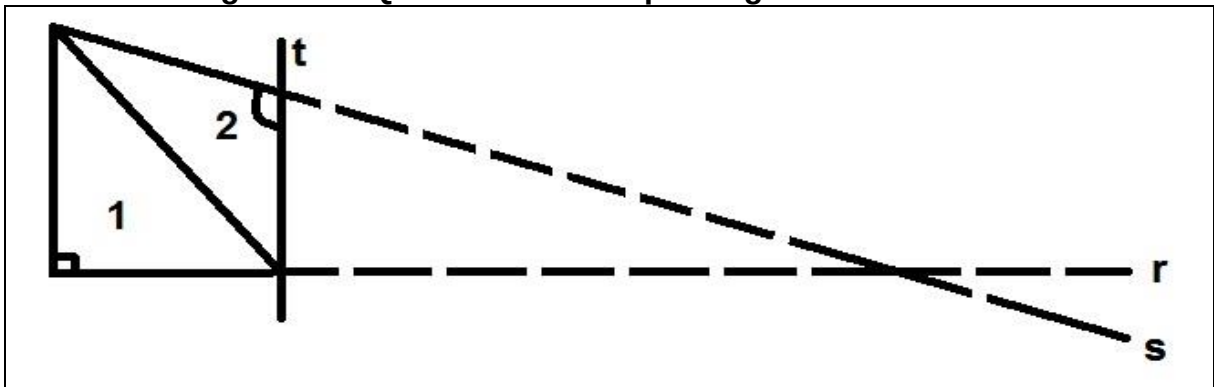
Figura 22 - Quadrilátero



Fonte: Elaborado pelos autores

Após compreenderem o que os pesquisadores perguntaram, houve discordâncias entre os dois triângulos serem retângulos ou apenas um. Na verdade, o triângulo formado pela parte debaixo da diagonal (1) era facilmente identificado como retângulo pelos estudantes, o que na verdade é, já que a base do triângulo (assim chamada por uma estudante com relação ao segmento horizontal que concorre com um vertical em relação ao telhado) determina um ângulo reto com a altura (assim chamada pela mesma estudante com relação a um segmento na vertical que se cruza com outro na horizontal com relação ao telhado) como mostrado na Figura 22. A discussão maior foi em relação ao triângulo formado pela parte de cima da diagonal (2), uma vez que não se pode garantir a perpendicularidade entre os segmentos como é possível observar na Figura 22. O que garante que o ângulo indicado na Figura 22 tem medida igual a 90° ? Seria a reta superior do quadrilátero não ser uma paralela com relação à inferior pelos seus prolongamentos, o que impediria o ângulo formado entre a reta superior e a lateral direita do quadrilátero não ser reto?

Figura 23 – Quadrilátero com prolongamentos de retas



Fonte: Elaborado pelos autores

O fato das retas r e s se cruzarem, ou seja, serem concorrentes ao invés de paralelas, nos garante que o ângulo indicado em (2) não pode ser reto, já que a reta t que corta r e s é perpendicular somente a r não determinando com s uma perpendicularidade. Assim, concluímos com os estudantes que neste quadrilátero apenas o triângulo (1) é retângulo.

Fechado o momento da discussão, fomos para o quarto ponto do espaço físico da escola. Desta vez nos concentramos no corredor interno que dá acesso as salas de aulas como mostra a Figura 24.

Figura 24 – Estudantes identificando elementos no corredor central da escola



Fonte: Fotos dos autores

Ao discutirmos sobre a possibilidade de desenvolvermos algum trabalho neste ponto não tiveram ideias, uma vez que a altura da cobertura do corredor é acessível, de modo que uma pessoa com altura aproximada de 1,7m consegue alcançar com as mãos a estrutura da cobertura, o que a torna acessível para eles. Deste modo, explicamos que o trabalho não teria necessariamente que fazer ligações apenas com alturas, mas, o que deve ser entendido é que se trata de medidas de distâncias quaisquer, o que também caracteriza a altura como distância, como por exemplo, a distância do chão ao telhado do pátio. Para que entendesse melhor como seria um trabalho de aplicação naquele espaço, propusemos a seguinte situação: calcular a distância entre a primeira pilastra (próxima ao pátio) do corredor central de acesso a salas até a última pilastra do mesmo corredor (próxima ao portão) considerando acessível a altura da pilastra. Como não tínhamos tratado ainda sobre os mecanismos para a resolução de situações deste tipo, apenas explanamos de maneira geral alguns procedimentos e combinamos voltar a situação nos próximos encontros, situação esta que denominamos como situação 2.

Passamos então para o último ponto a ser alisado e última etapa deste encontro. Desta vez, no jardim da escola, onde existem árvores do tipo palmeira, de altura inacessível como mostra a Figura 25.

Figura 25 – Estudantes identificando elementos no jardim da escola



Fonte: Foto dos autores

Neste momento, discutimos sobre as palmeiras e escolhemos três delas para um possível trabalho de aplicação que denominamos como situação 3.

3.7.1.4 Terceiro encontro

O terceiro encontro seguiu com a divisão dos estudantes em três grupos menores para iniciarmos o processo de resolução prática das situações e propostas complementares. Fomos para o espaço encoberto da escola onde está a árvore identificada para a situação 1. Neste momento, a ideia foi a de escalar cada grupo para uma situação ou atividade complementar. Por outro lado, tratava-se das considerações iniciais, pois ainda não havíamos teorizado os conhecimentos geométricos e trigonométricos necessários nas situações propostas.

Como era de nosso interesse que todos estivessem envolvidos nas situações 1, 2 e 3, deixamos um grupo responsável com as primeiras considerações com relação à altura da árvore principal. Ao outro atribuímos as considerações iniciais da proposta complementar 1 e ao terceiro as considerações iniciais da proposta complementar 2. Assim, conseguimos levantar os questionamentos iniciais das três situações mencionadas, até que se chegou numa representação matemática onde discutimos sobre a necessidade de outros elementos da trigonometria, de maneira que interrompemos esta etapa para irmos em busca de tais elementos.

Figura 26 – Estudantes discutindo as situações propostas



Fonte: Fotos dos autores

As discussões geradas em cada grupo aqui identificadas como “Pergunta dos Pesquisadores – PP” e Respostas Esperadas – RE”, estão descritas a seguir:

GRUPO 1: Calcular a altura da árvore

PP: Quais as primeiras iniciativas que o grupo deve tomar?

RE: Dividir tarefas e analisar a situação.

PP: Com relação à árvore, que tipo de medida é procurado?

RE: A altura (h).

PP: Tal medida está em qual posição com relação ao chão?

RE: Posição vertical.

PP: É necessário e possível recorrer a alguma medida acessível, qual?

RE: Sim, a distância da árvore ao ponto observado.

PP: Como obter tal medida?

RE: Usando uma trena, ou metro.

PP: A medida acessível está em qual posição com relação à árvore?

RE: Perpendicular.

PP: Com as informações da posição da árvore e da medida acessível é possível levar a questão para uma representação matemática?

RE: Sim.

PP: Qual a representação geométrica de tal situação?

RE: Um triângulo retângulo.

PP: Na representação criada onde está representada a altura procurada e a medida identificada?

RE: A altura está no segmento da vertical e a medida identificada na base do triângulo.

PP: E agora, com os conhecimentos geométricos é possível solucionar? O que ainda nos falta?

RE: Não, são necessários elementos complementares tais como teodolito e razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Figura 27 – Estudantes trabalhando na situação da árvore



Fonte: Fotos dos autores

Neste momento, foi possível mostrar até onde podemos ir sem os outros elementos complementares. Explicamos que mesmo sendo relacionadas duas grandezas num triângulo retângulo, seria necessário relacioná-las sob os ângulos agudos desse triângulo. Ao contrário, seria possível se relacionarmos tais grandezas desenvolvendo o procedimento da sombra projetada pela árvore como o desenvolvido por Tales (600 a.C) como mostrado na Figura 6, pois seria possível medir estas sombras. Já da maneira que foi proposta é necessário determinar um dos ângulos agudos do triângulo gerado. Como estamos no plano no qual se encontra a árvore, o ideal é determinar o ângulo do qual seja possível visualizar o topo. Foram indagados a pensar: como obter este ângulo? Não apresentaram conhecimento a respeito da questão. Com isso, explicamos a necessidade de um equipamento que nos permita visualizar o topo da árvore com uma inclinação x . Conversamos a respeito do teodolito e o definimos como se segue.

Figura 28 - Teodolito



Fonte: COORDENADOR E... , 2013

Segundo Rosana Camilo da Rosa (2007) em seu livro intitulado “Trigonometria e Números Complexos”, teodolito é um instrumento óptico de precisão para medir ângulos horizontais e verticais.

Em áreas de grande extensão, o topógrafo precisa muitas vezes imaginar triângulos em pontos inacessíveis. Medindo três elementos desses triângulos, sendo que pelo menos um deles é um lado, ele pode encontrar as demais dimensões necessárias para uma aplicação prática. (ROSA, 2007, p. 33)

GRUPO 2: Qual deverá ser a inclinação de partida de uma bola ao bater um pênalti de modo que ela bata no travessão? E nas traves? Calcular a altura do gol considerando-a como inacessível.

PP: Quais as primeiras iniciativas o grupo deve tomar?

RE: Entender e criar estratégias para a situação.

PP: Onde a bola deverá estar posicionada?

RE: No ponto indicado para a cobrança do pênalti.

PP: Se a distância e altura influenciarem deverá encontrá-las primeiro?

RE: Pode-se preocupar em apenas observar a altura sob a inclinação da bola.

PP: Qual situação deverá ser solucionada primeiro a da inclinação ou da altura?

RE: Da inclinação.

PP: O que dependerá de que?

RE: O cálculo da altura dependerá da inclinação.

PP: É necessário levar a questão para uma representação matemática?

RE: Sim

PP: Com as respostas anteriores já é possível bater o pênalti e calcular a altura?

RE: Não. É necessário um equipamento que nos possibilite observar tal ângulo.

Figura 29 – Estudantes desenvolvendo a situação da bola



Fonte: Fotos dos autores

A partir de todas as discussões apresentadas anteriormente, foi possível gerar nos estudantes o questionamento quanto aos pré-requisitos na solução de situações diversas. Buscamos levá-los ao entendimento e este foi se completando a cada discussão, que o ideal, ao iniciar um processo de solução, é criar estratégias e ter iniciativas, e por isso estavam em grupo. A divisão de tarefas é essencial, pois conseguirão perceber a necessidade destes elementos complementares, ao saber que o papel de cada um deverá entrar no trabalho. Também discutimos que iniciativas simples devem ser percebidas facilmente pelo grupo a partir dos

conhecimentos de mundo, como nesta proposta, saber o lugar certo que a bola deve estar quando se cobra um pênalti.

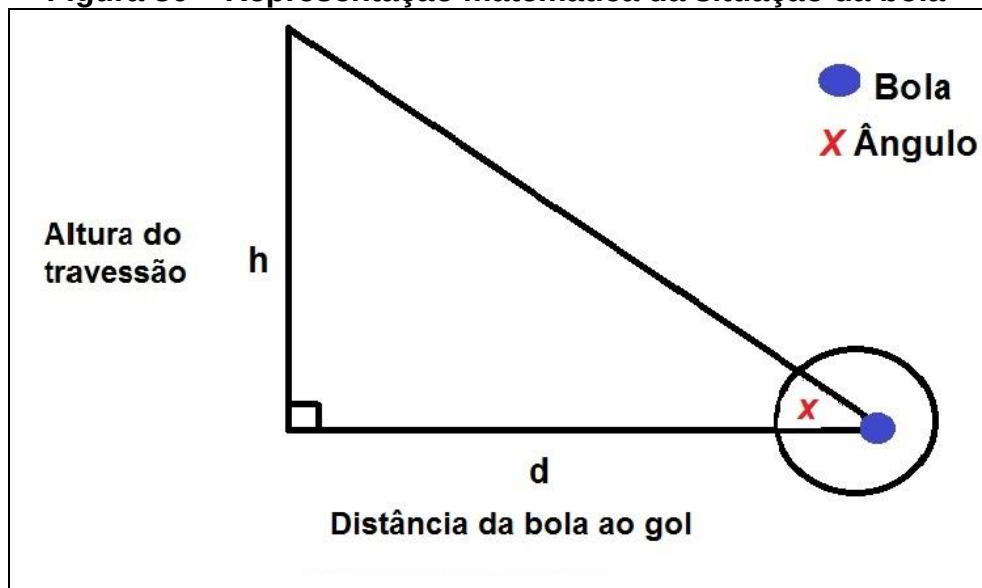
Quanto à distância da bola ao gol, a discussão buscou concluir, que por mais que esta distância influencie, tudo dependerá da inclinação, o que na verdade é fator principal da questão, da mesma forma que altura, ou seja, a inclinação será estabelecida no momento em que a bola já estiver posicionada, de modo que esta inclinação leva a visualizar a altura.

Por outro lado, buscamos explicar que, usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, as medidas da distância e altura deverão estar em mãos, pois a única variável isolada deverá ser o ângulo do qual se observa a inclinação (ângulo x), pois uma vez que a distância é acessível, é possível obtê-la usando a trena ou o metro.

Outro fator foi entender que não necessariamente deve-se calcular a altura do gol para depois obter o ângulo, mas que se tivermos um equipamento que nos leve a visualizar esta altura sob este ângulo x procurado, resolveríamos o problema da bola, pois queremos que ela bata no travessão, o que é justamente a altura procurada. Ao contrário, se buscarmos primeiro a altura, a inclinação seria necessária antes mesmo da altura, o que a torna dependente do ângulo x . Assim, o próximo passo seria encontrar a inclinação na qual sairá a bola.

Propusemos a eles no momento, que levassem a questão para uma representação matemática, pois seria mais fácil perceber como ficaria a questão na sua forma geométrica. Onde estaria o ângulo x , a altura e a distância de modo que fizessem relações e utilizassem os conceitos trigonométricos.

Figura 30 – Representação matemática da situação da bola



Fonte: Elaborado pelos autores

Com a questão na forma de uma representação matemática, o próximo passo foi discutir que mesmo sabendo que devem procurar o ângulo de inclinação, devem-se também saber associar as grandezas altura e distância ao ângulo de inclinação da bola, ainda que não tenha a altura neste momento, mas que começassem a entender o princípio das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Com estas discussões, o próximo passo foi discutir como obter o ângulo. Uma estudante afirmou ser o ângulo de 30° o ângulo x procurado. Ao indagarmos o porquê, tivemos como resposta apenas “*imaginei o ângulo com medida de 30°* ”. Explicamos que apenas supor não garante que o ângulo seja de 30° . E portanto não teríamos garantia de que a bola bateria no travessão. Desta forma, a altura também não será a correta em relação ao ângulo real, mas sim com relação ao ângulo suposto de 30° . A partir daí não tiveram mais opiniões a respeito de como obter o ângulo. Foi quando intervimos para falar sobre o equipamento teodolito definido anteriormente.

Grupo 3: Calcular a altura máxima do telhado do pátio principal

PP: Quais as primeiras iniciativas o grupo deve tomar?

RE: Criar estratégias para a situação e dividir tarefas.

PP: Onde o grupo deverá estar posicionado de modo que tenha um melhor desempenho do trabalho?

RE: A uma distância acessível da altura desejada.

PP: Deverá recorrer a alguma medida acessível?

RE: Sim.

PP: Que medida seria esta?

RE: A distância entre o observador e objeto observado.

PP: Quais recursos necessários para tais medidas?

RE: Trena ou metro.

PP: Qual relação existente entre a medida acessível e a inacessível?

RE: O ângulo o qual seja possível visualizar o objeto de interesse.

PP: É necessário levar a questão para uma representação matemática?

RE: Sim.

PP: A quais elementos geométricos e trigonométricos serão necessários recorrer?

RE: Triângulo retângulo e razões trigonométricas no triângulo retângulo.

PP: Bastaria o princípio de trigonometria no triângulo retângulo?

RE: Sim.

PP: Já é possível encontrar a altura máxima do pátio?

RE: Não. É necessário um equipamento que permita visualizar tal altura sob um determinado ângulo, o que relacionada as duas grandezas.

Figura 31 – Estudantes na situação telhado do pátio



Fonte: Fotos dos autores

Como discutido nos grupos anteriores, criar estratégias e dividir tarefas é relevante quando se quer caminhar na busca por soluções em matemática. Talvez, o essencial, no momento, fosse o próprio grupo discutir qual a melhor posição para se concentrarem, uma vez que nos encontrávamos no espaço encoberto da escola. Foram necessárias intervenções e alguns esclarecimentos, pois o grupo escolheu uma distância muito grande com relação à estrutura que queriam medir. Explicamos que a distância na qual o grupo estava posicionado era muito maior que a altura procurada, e que se consideravam inacessível tal altura, poderia a distância também ser inacessível gerando um trabalho muito maior.

Outro fator muito questionado foi da visualização do ponto máximo do telhado em relação aonde estavam. Uma vez que se encontravam a uma distância muito maior da medida procurada, tornava a situação muito mais trabalhosa. Explicamos que aproximar-se do objeto escolhido (pátio) facilitaria bastante o trabalho, sobretudo, na determinação da medida acessível, uma vez que tal medida é a distância entre a

altura do pátio e o ponto onde o grupo se encontrava posicionado. Esta medida poderia ser obtida com o auxílio da trena que utilizavam.

Outra discussão levantada foi de como trabalhar num triângulo para encontrar o valor para uma de suas medidas quando se conhece outra desse mesmo triângulo. Explicamos que no triângulo retângulo é possível relacionar duas medidas quaisquer. Porém relacionar tais medidas com relação a quê? Justamente com o ângulo de inclinação que nos permite visualizar o topo do telhado. Assim, no triângulo duas medidas se relacionam a um de seus ângulos. Propomos que levassem a questão para uma representação matemática e que verificassem a formação de um triângulo retângulo. Contudo, buscamos saber dos estudantes onde estaria o ângulo y procurado e qual o próximo passo para obter tal ângulo.

Figura 32 – Representação matemática da situação altura do telhado do pátio



Fonte: Fotos dos autores

Explicamos a necessidade de um equipamento que nos permita visualizar o topo do telhado com uma inclinação γ . Conversamos a respeito do teodolito.

Contudo, explicamos nos três grupos que como se trata de um procedimento pedagógico é viável que seja construído um teodolito do tipo caseiro com recursos possíveis de serem trabalhados dentro do ambiente escolar e que a próxima tarefa seria criar estratégias para construir o equipamento que os permitiria obter os ângulos desejados.

3.7.1.5 Quarto encontro

3.7.1.5.1 Construindo o teodolito caseiro

Nesta aula nos atemos em construir o equipamento que nos permitiu identificar ângulos nas situações que foram propostas e nas demais. No primeiro momento deste encontro, procuramos passar todas as instruções sobre a construção de um teodolito proposto pelos pesquisadores. Na verdade trata-se de uma proposta de Roger Ruben Huaman Huanca (2006) em sua dissertação intitulada “A Resolução de Problemas no Processo Ensino – Aprendizagem - Avaliação de Matemática na e Além da Sala de Aula” como mostrado na Figura 33.

Figura 33 – teodolito caseiro



Fonte: Fotos dos autores

Quanto a construção do teodolito apresentamos os materiais necessários para sua confecção, como segue:

- Base de isopor 20x20 cm;
- Pote de manteiga circular com tampa 250 g;
- Canudo de plástico maior que o diâmetro do pote de manteiga;
- Palito para churrasco;
- Cola quente;
- Transferidor 360°;
- Régua;
- Estilete.

Apresentamos também o passo a passo para a confecção do teodolito, (FIG. 33).

- Corte da base (fazer um corte no isopor obtendo uma base 20x20 cm);
- Traçar as mediatrizes dos lados do quadrado de modo a encontrar o seu centro;
- Centralizar e colar o transferidor de modo que os ângulos de 0°, 90°, 180° e 270° estejam sobre as mediatrizes dos lados deste quadrado;
- Colar a tampa do pote sobre o transferidor de modo que o encaixe fique para cima;
- Encontrar o diâmetro do fundo do pote e colar o canudo sobre o diâmetro que será utilizado para observar o ponto desejado;
- Fazer dois furos na borda superior do pote, de maneira que os furos estejam paralelos ao diâmetro inferior do pote;
- Passar um palito para churrasco pelos dois furos da borda superior, que servirá de referência para definir o ângulo de observação do ponto;
- Encaixar o pote na tampa.

O próximo passo foi disponibilizar os materiais para cada grupo de modo que, ao dividirem as tarefas pudessem confeccionar o teodolito como nas instruções. Cada grupo recebeu a base quadrada pronta e os demais materiais. Direcionamos as

ações junto aos grupos de acordo com o passo a passo descrito acima e começaram a desenvolver o trabalho de construção.

Figura 34 – Estudantes construindo o teodolito caseiro



Fonte: Fotos dos autores

Percebemos muitas dificuldades dos estudantes durante a construção do equipamento, sobretudo ao desenvolverem alguns conceitos geométricos necessários. Surgiram questionamentos como: o que é diagonal, como traçar a diagonal de um quadrado, o que é mediatriz, como encontrar as mediatrizes de um quadrado, o que é vértice, ponto médio. Outro fato que gerou muitas dúvidas foi com relação a determinação o diâmetro de uma circunferência de centro desconhecido.

Diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes foi necessária uma intervenção com relação a alguns conceitos geométricos. Ainda que estivessem no

planejamento de aulas algumas teorizações, estas não estariam voltadas a aspectos mais específicos da geometria e sim àqueles que nos auxiliariam no estudo da trigonometria no triângulo retângulo. Deste modo, decidimos por intervir naquele momento, esclarecendo as dúvidas relativas a conceitos necessários para a construção do teodolito. Após os esclarecimentos das dúvidas, foi possível que desenvolvessem a construção do teodolito caseiro mostrado na Figura 33.

Após a construção do teodolito apresentamos aos estudantes as instruções com relação a sua utilização. Explicamos como e onde marcar o ângulo e por onde visualizá-lo. Como último momento deste encontro foram realizados alguns exemplos testes de utilização do equipamento como mostra a Figura 35.

Figura 35 – Estudantes aprendendo a utilizar o teodolito caseiro



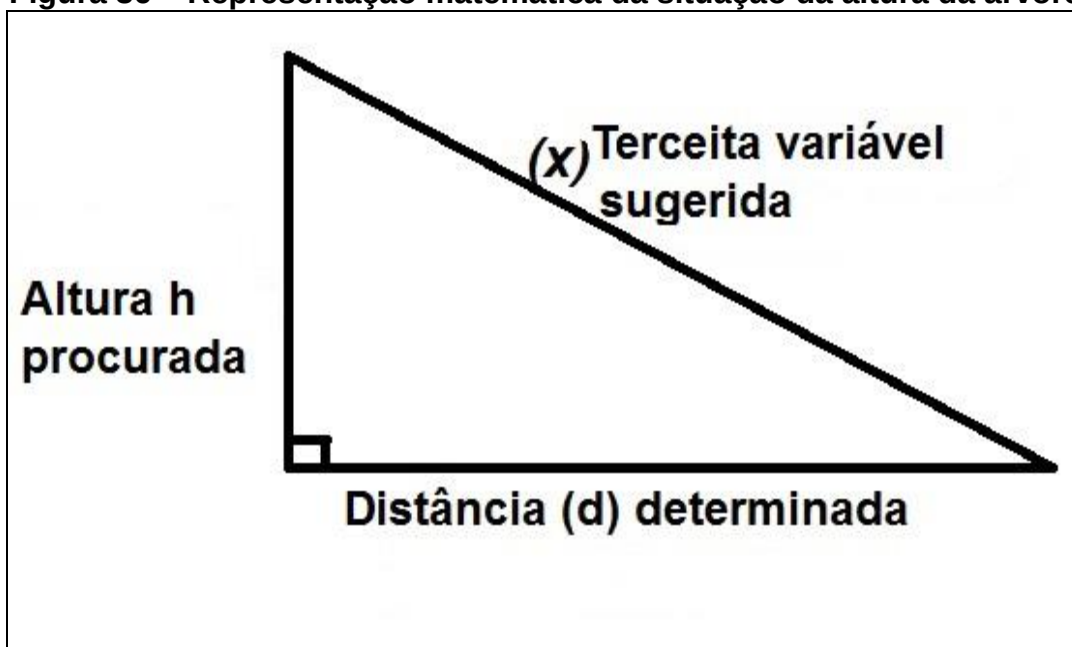
Fonte: Fotos dos autores

3.7.1.6 Quinto encontro

Em todas as três propostas apresentadas aos estudantes buscamos articular de modo que fosse possível levantar todas as conjecturas até que se chegasse a uma representação matemática da situação. Identificaram a variável desconhecida e buscaram alternativas que os possibilitou uma medida acessível para cada situação proposta. Mesmo tendo discutido com os estudantes no encontro anterior sobre a

visualização das alturas procuradas sob um ângulo qualquer e desenvolvido a proposta da construção do teodolito, ferramenta que nos possibilitaria visualizar e determinar tal ângulo (FIGURA 33) surgiu o questionamento de um estudante quanto à possibilidade de se trabalhar com o terceiro lado do triângulo gerado na representação da situação da árvore. O questionamento foi com relação à distância entre o observador e o observado o que caracterizava a hipotenusa do triângulo retângulo como representado na Figura 36.

Figura 36 – Representação matemática da situação da altura da árvore



Fonte: Elaborado pelos autores

Diante dos questionamentos feitos pelo estudante quanto à questão, os pesquisadores definiram o próximo momento como uma teorização sobre as relações métricas no triângulo retângulo e teorema de Pitágoras, de modo a voltarem e testarem a viabilidade de solucionar a questão pelos métodos indicados pelo estudante.

Como já havíamos tratado da classificação de um triângulo com relação aos lados e ângulos, antes se demonstrarmos as relações métricas no triângulo retângulo e através de tais relações, o teorema de Pitágoras, fizemos um momento para tratar

em especial, dos casos de semelhança de triângulos utilizando alguns recursos pedagógicos: triângulos em feltro e EVA (FIGURA 37).

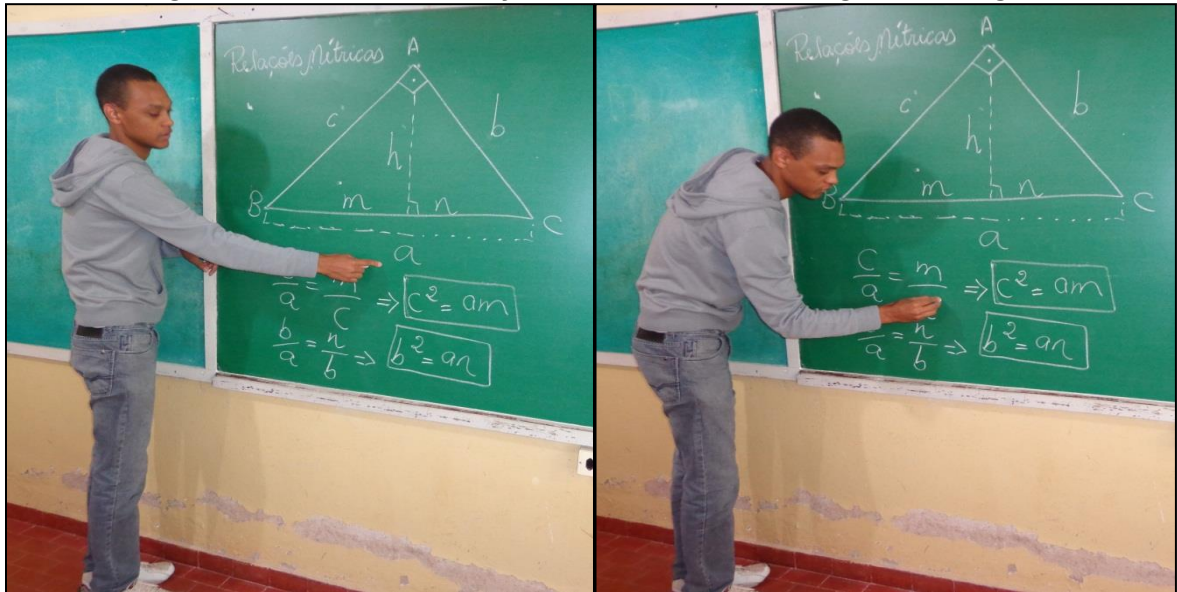
Figura 37 – Aula de semelhança de triângulos



Fonte: Fotos dos autores

Apesar de as relações métricas num triângulo retângulo, serem abordadas no momento em que desenvolvemos esta aula prática com os recursos pedagógicos citados, decidimos por enfatizá-las também sob uma teorização com a utilização da lousa verificando tais relações com o objetivo de demonstrarmos o teorema de Pitágoras, uma vez que seria feito usando o princípio de semelhança de triângulos. A aula como foi desenvolvida é mostrada na Figura 38.

Figura 38 – Aula de relações métricas no triângulo retângulo



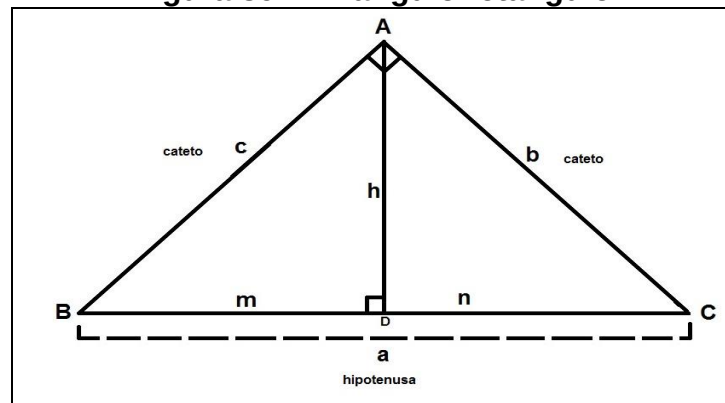
Fonte: Fotos dos autores

3.7.1.6.1 Demonstrando o Teorema de Pitágoras

“Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados de seus catetos”.

Dem.: Considere um triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$ e a lei de Tales que diz: “se dois triângulos tiverem medidas iguais para um de seus ângulos agudos e outro ângulo também agudo comum aos dois, então esses triângulos são semelhantes”.

Figura 39 – Triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pelos autores

Pelo teorema da Lei de Tales temos que o triângulo ABD é semelhante ao triângulo ABC ($\triangle ABD \sim \triangle ABC$). Assim,

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am \text{ (I)}$$

Analogamente, temos que o triângulo ACD é semelhante ao triângulo ABC ($\triangle ACD \sim \triangle ABC$). Assim,

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an \text{ (II)}$$

A partir das duas relações estabelecidas anteriormente foi possível mostrar aos estudantes a validade do teorema de Pitágoras já que o triângulo ABC trabalhado é retângulo em Â. Então explicamos o seguinte.

Somando as duas equações I e II obtidas anteriormente temos:

$$\begin{array}{l} c^2 = am \\ b^2 = an \end{array} \Rightarrow c^2 + b^2 = am + an = a(n + m) = a.a = a^2$$

O que mostra que $a^2 = b^2 + c^2$ (quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados de seus catetos – **Teorema de Pitágoras**).

Logo, em todo triângulo retângulo vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$ (III).

Depois da demonstração do teorema de Pitágoras mostramos aos estudantes outras duas relações métricas no triângulo retângulo, fazendo uso de tal teorema.

Seja h um dos catetos dos triângulos ABD e ACD. Pela relação de Pitágoras temos que,

$$\triangle ABD): h^2 = c^2 - m^2 = am - m^2 = m(a - m) = m.n \Rightarrow h^2 = m.n \text{ (IV)}$$

Ou ainda, ($h = \sqrt{mn}$), ou seja, a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa no triângulo ABC.

Consideremos novamente as relações $c^2 = am$ (I) e $b^2 = an$ (II)

Fazendo o produto entre I e II obtemos,

$$c^2 \cdot b^2 = am \cdot an = a^2(mn) = a^2 h^2 \Rightarrow c^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot h^2$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da equação $c^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot h^2$ temos que:

$$\sqrt{c^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2 \cdot h^2} \rightarrow bc = ah \text{ (V)}$$

Assim, apresentamos o resumo das relações existentes em um triângulo retângulo (QUADRO 1).

Quadro 1 – Relações métricas

$$(I) \quad c^2 = am$$

$$(II) \quad b^2 = an$$

$$(III) \quad a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

$$(IV) \quad h = \sqrt{mn} \text{ (Altura do triângulo)}$$

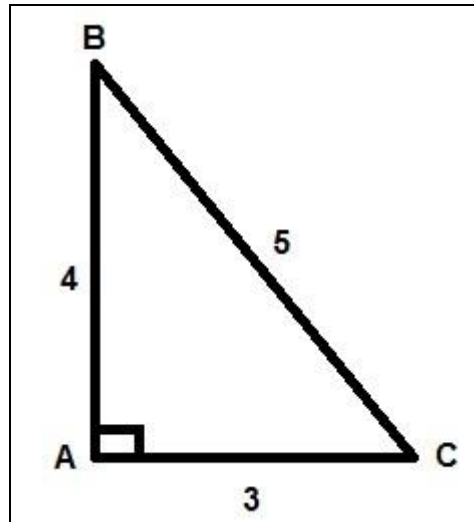
$$(V) \quad bc = ah$$

Fonte: Elaborado pelos autores

Após teorizarmos esta parte do conteúdo na lousa e antes que voltássemos a campo, verificamos a validade do teorema de Pitágoras com alguns exercícios técnicos na sala de aula. Tais exercícios são apresentados a seguir.

Exercício 1. No triângulo retângulo abaixo, verificar a validade do teorema de Pitágoras.

Figura 40 – Triângulo retângulo 1



Fonte: Elaborado pelos autores

Resolução.

Se o triângulo é retângulo então vale o teorema de Pitágoras que diz: $a^2 = b^2 + c^2$.

Verificando a validade da relação acima temos que,

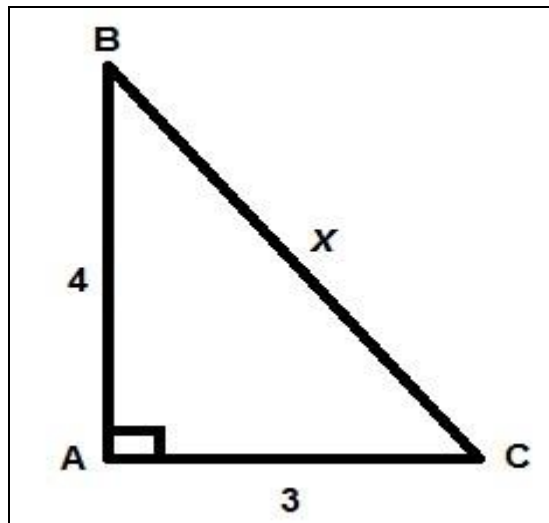
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$25 = 25$ (V), o que conclui a validade da relação.

Exercício 2. Determinar o valor de x no triângulo abaixo.

Figura 41 – Triângulo retângulo 2



Fonte: Elaborado pelos autores

Resolução

Pelo teorema de Pitágoras temos que,

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$x^2 = 9 + 16$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

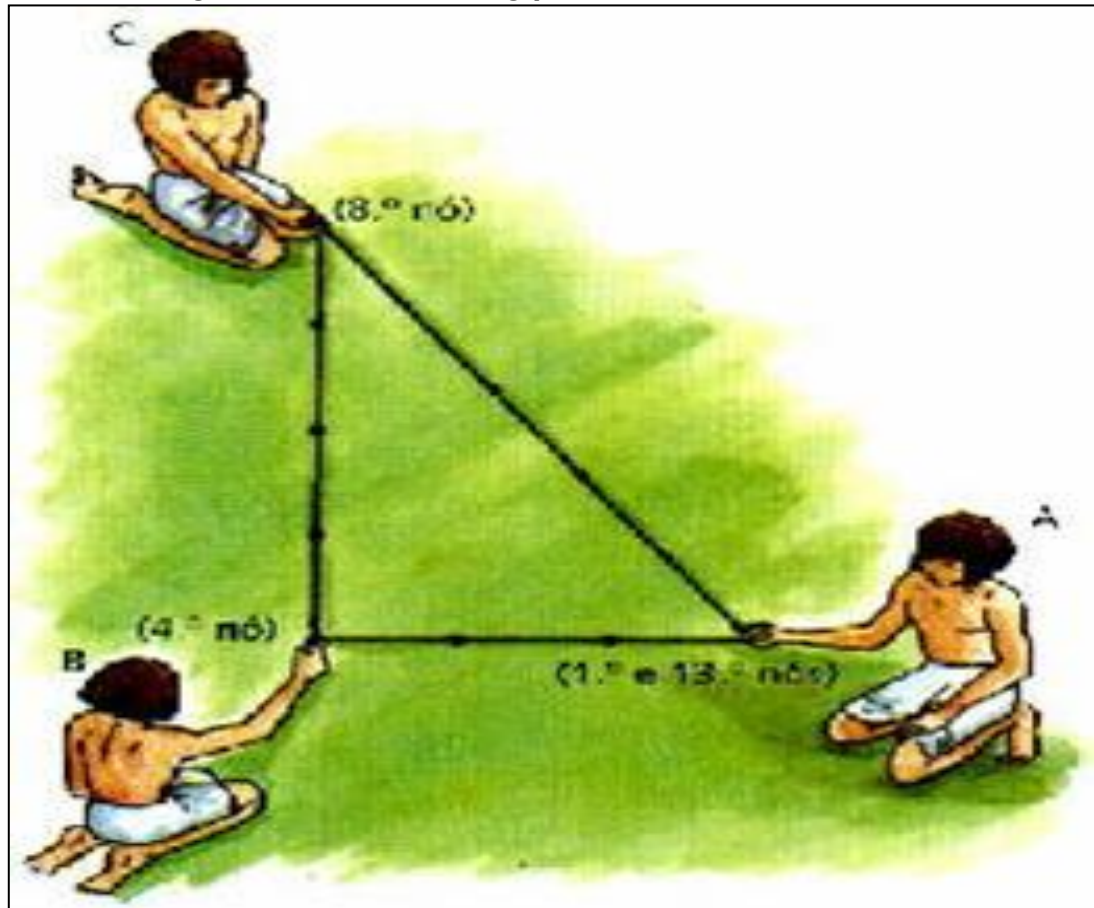
$$\boxed{x = 5}$$

Logo, concluímos que o valor da variável x é 5, o que é verdade, pois no exercício 1 o valor da hipotenusa é 5.

O próximo passo do nosso encontro foi voltarmos novamente ao campo de aplicação. E antes de retomarmos a discussão levantada pelo estudante quanto à utilização da terceira variável da situação-problema com relação à altura da árvore, propomos aos estudantes a verificação do teorema de Pitágoras, agora utilizando o princípio da corda graduada em doze unidades como feito pelos egípcios e mostrado

na Figura 42. Depois fizemos a comparação num triângulo retângulo com as medidas conhecidas.

Figura 42 – Ideia dos egípcios da corda de 12 nós



Fonte: LOPES, 2013

No primeiro método utilizamos um barbante com doze nós distribuídos a cada 50 cm. Solicitamos aos estudantes que amarrassem o extremo do barbante em um palito de churrasco e o fixasse em um ponto qualquer do solo. Em seguida instruímos em demarcar um segundo ponto de modo que a distância entre os dois pontos fosse igual a três, quatro ou cinco nós. O próximo passo foi solicitar a marcação de um terceiro ponto no solo de modo que a distância entre o segundo e o terceiro ponto tivesse medida diferente da primeira. E por último unir os extremos do barbante definindo um triângulo e um ângulo reto. A Figura 43 ilustra o desenvolvimento desta aula.

Figura 43 – Estudantes verificando a relação de Pitágoras pela corda de 12 nós



Fonte: Foto dos autores

A outra maneira com a qual buscamos trabalhar esta verificação ocorreu na quadra coberta da escola. Definimos um triângulo retângulo usando a metade da quadra e pedimos aos estudantes que determinassem a diagonal do retângulo utilizado, partindo do ponto central da lateral da quadra (vértice do triângulo) até o ponto onde se cobra o escanteio da lateral oposta (vértice oposto) utilizando um barbante. Em seguida solicitamos aos estudantes que medissem a diagonal formada, a lateral que determinou um dos lados do triângulo e a linha de fundo utilizando uma trena de 30 m. Com as medidas em mãos verificamos a validade do teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo qualquer.

Figura 44 – Estudantes verificando a relação de Pitágoras na quadra da escola



Fonte: Fotos dos autores

Após a verificação da validade do teorema de Pitágoras, retornamos às situações propostas anteriormente, buscando solucioná-las utilizando tal relação.

Neste momento, os pesquisadores decidiram não mais trabalhar com grupos distintos de estudantes em situações diferentes, como nos encontros anteriores, pois julgaram relevante que todos estivessem envolvidos em todas as situações. Assim, as três propostas anteriores foram desenvolvidas em momentos distintos, de maneira que as situações da inclinação da bola e a de calcular a altura do pátio principal ficaram como proposta complementar 1 e 2. No entanto, buscou-se desenvolver as situações 1, 2 e 3 com relação à altura da árvore, da distância do corredor central de acesso as salas de aula e a altura da palmeira no jardim da escola, como mencionado anteriormente.

Voltando à situação de determinar a altura da árvore, instigamos os estudantes a perceberem a inviabilidade da utilização da relação de Pitágoras, já que trabalharíamos com duas variáveis desconhecidas (h e x), uma vez que a distância entre observador e observado (x) é considerada uma medida inacessível (FIGURA 36). Utilizando a relação de Pitágoras nesta situação, encontramos a seguinte equação:

$$x^2 = h^2 + d^2$$

Concluimos que apesar de termos o valor absoluto de d^2 era inconveniente isolar a variável h , uma vez que x não é uma medida conhecida. Assim, descartamos a possibilidade de solucionar a situação pela relação de Pitágoras, como sugerido pelo estudante. No entanto, explicamos novamente, como já enfatizado no encontro anterior, que para se trabalhar com duas grandezas em que uma é desconhecida é necessário relacioná-las a uma terceira grandeza conhecida. Diante destas considerações, instigamos novamente questionamentos relativos a esta terceira possível grandeza e relembramos que a mesma estaria relacionada ao ângulo de observação do ponto máximo da árvore, como discutido nos encontros anteriores. Para tanto, reforçamos a necessidade de se observar o topo a partir de uma inclinação qualquer e conhecê-la, o que demandou a utilização de uma ferramenta que fosse capaz de medir esta inclinação, o teodolito, já construído no encontro anterior (FIGURA 33).

Concluída esta etapa do trabalho, levamos os estudantes para o pátio encoberto da escola onde existem as árvores, inclusive, a proposta na situação¹. Solicitamos a eles que retornassem novamente à situação como uma representação matemática. Para tanto, com o auxílio de um barbante, traçaram a distância da árvore e o local onde todos se encontravam. Pedimos que dividissem as tarefas e enquanto uns observavam o ponto mais alto da árvore com o teodolito, outros, com o auxílio de uma trena de 30 m mediam a distância acessível da árvore até o ponto onde se encontrava o observador, enquanto outros se encarregaram de anotar todas as informações como mostra a Figura 45.

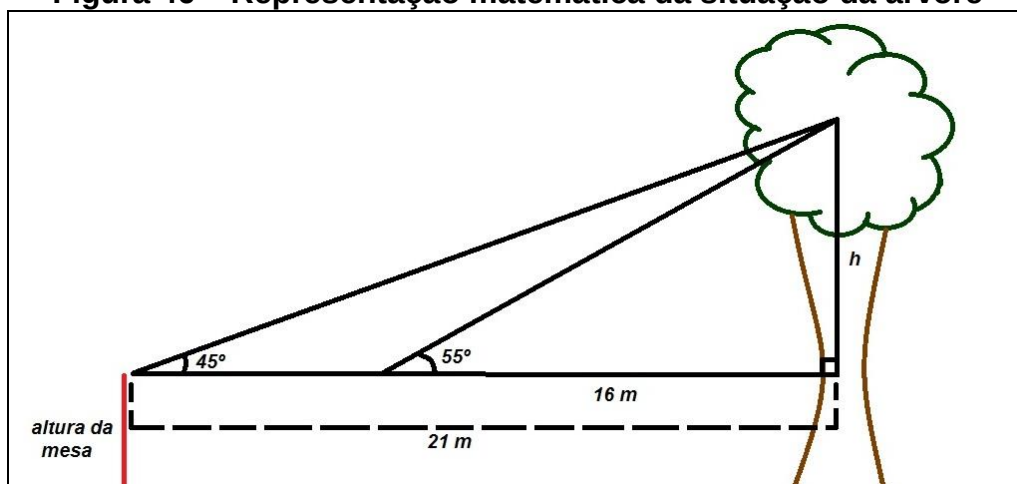
Figura 45 – Estudantes desenvolvendo a situação da altura da árvore



Fonte: Fotos dos autores

Para a mesma situação, optamos por desenvolver o mesmo trabalho com observação sob dois pontos diferentes. A primeira estudante conseguiu observar o topo da árvore sob uma inclinação de 45° e com distância entre a árvore e o ponto observado de 21 m. Em seguida, solicitamos que aproximassem um pouco mais da árvore e observassem novamente seu ponto máximo. Sob este novo ponto, o topo da árvore pôde ser visualizado sob um ângulo de 55° a uma distância de 16 m, como mostrado da Figura 46.

Figura 46 – Representação matemática da situação da árvore



Fonte: Elaborado pelos autores

Com as novas informações foi possível estabelecer mecanismos que os possibilitassem determinar a altura da árvore. No entanto, havia ainda uma questão delicada a ser instigada nos estudantes e trabalhada pelos pesquisadores. Na verdade, apesar de saberem que a relação entre a altura (h) procurada e a distância conhecida teriam que se relacionar ao ângulo de observação, não conseguiram determinar como deveria ser esta relação. Foi quando os pesquisadores identificaram a necessidade de novas teorizações de conteúdo, desta vez, as razões trigonométricas no triângulo retângulo (*seno*, *cosseno* e *tangente*). Contudo, considerando a relevância em questionar sobre cada etapa do trabalho, foi julgado necessário pelos pesquisadores que se interrompesse novamente o trabalho para desenvolver na lousa as demonstrações e verificações necessárias quanto às razões trigonométricas no triângulo retângulo e os ângulos notáveis (30° , 45° e 60°). Um momento de sala de aula foi desenvolvido com os estudantes, onde procuramos esclarecer as relações existentes de catetos e hipotenusa em relação a um determinado ângulo e os respectivos valores para tais grandezas. O desenvolvimento desta aula é esquematizado a seguir.

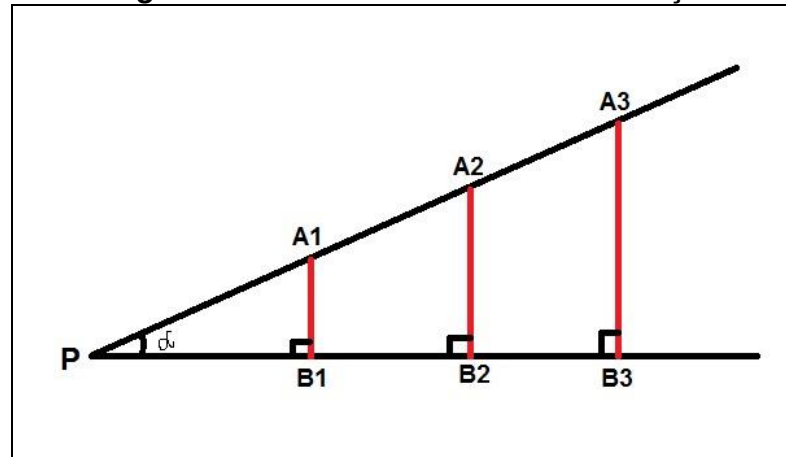
3.7.1.6.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Para este momento, fizemos uso das propriedades de semelhança de triângulos trabalhada com os estudantes anteriormente para reconhecermos as razões seno, cosseno e tangente como casos de semelhança, estabelecendo relações entre elas.

AULA: Identificando as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

Considere três triângulos retângulos (1,2 e 3) semelhantes como mostra a Figura 47.

Figura 47 – Aula razões de semelhança



Fonte: Elaborado pelos autores

Consideremos agora um automóvel se deslocando ao longo de três planos distintos. Representaremos por PA1, PA2 e PA3 os percursos do automóvel em cada plano respectivamente, A1B1, A2B2 e A3B3 as alturas deste automóvel em cada plano respectivamente e PB1, PB2 e PB3 os afastamentos do automóvel em cada plano respectivamente. Pela lei de Tales, os triângulos PA1B1, PA2B2 e PA3B3 são semelhantes, já que os três possuem um ângulo com a mesma medida (igual a 90°) e um ângulo comum (ângulo α). Daí, se os triângulos são semelhantes, as medidas de seus lados são proporcionais com relação ao ângulo de inclinação α comum aos três. E essa razão é a constante (K) de proporcionalidade entre dois segmentos desse triângulo que serão sempre constantes. Assim é possível estabelecer as seguintes relações.

$$(I) \quad \frac{A1B1}{PA1} = \frac{A2B2}{PA2} = \frac{A3B3}{PA3} = K$$

(constante de proporcionalidade, que chamaremos de $\sin \alpha$)

Logo, sendo α a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, chama-se **seno α** a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida da hipotenusa.

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$(II) \quad \frac{PB1}{PA1} = \frac{PB2}{PA2} = \frac{PB3}{PA3} = K_1$$

(*constante de proporcionalidade, que chamaremos de **cos α***)

Logo, sendo α a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, chama-se **cosseno α** a razão entre a medida do cateto adjacente a α e a medida da hipotenusa.

$$\text{cosseno } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

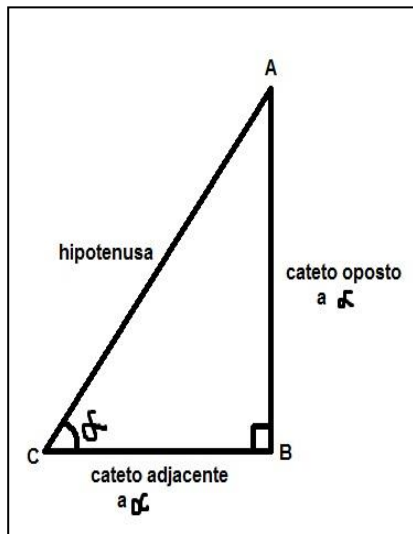
$$(III) \quad \frac{A1B1}{PB1} = \frac{A2B2}{PB2} = \frac{A3B3}{PB3} = K_2$$

(*constante de proporcionalidade, que chamaremos de **tangente α***)

Logo, sendo α a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, chama-se **tangente α** a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida do cateto adjacente a α .

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medidada do cateto adjacente a } \alpha}$$

Quadro 2 - Resumo das razões trigonométricas no triângulo retângulo



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

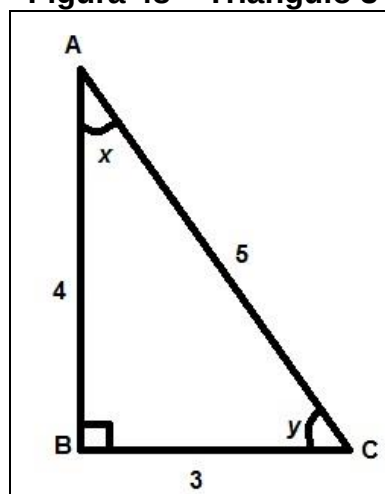
$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Após reconhecermos as razões *seno*, *coseno* e *tangente*, desenvolvemos alguns exercícios técnicos aplicando as razões estudadas. Estes exercícios estão apresentados a seguir.

Exercício 3. Calcular as razões *seno*, *coseno* e *tangente* relativos aos ângulos agudos no triângulo retângulo abaixo.

Figura 48 – Triângulo 3



Fonte: Elaborado pelos autores

Resolução

$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } x}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\tan x = \frac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida do cateto adjacente a } x} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{\text{medida do cateto oposto a } y}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\operatorname{cos} y = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } y}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\tan y = \frac{\text{medida do cateto oposto a } y}{\text{medida do cateto adjacente a } y} = \frac{4}{3} = 1,33$$

Observe que a tangente de um ângulo também pode ser entendida como a razão entre o seno e cosseno deste mesmo ângulo. Veja como ficaria a tangente calculada desta forma no exemplo anterior.

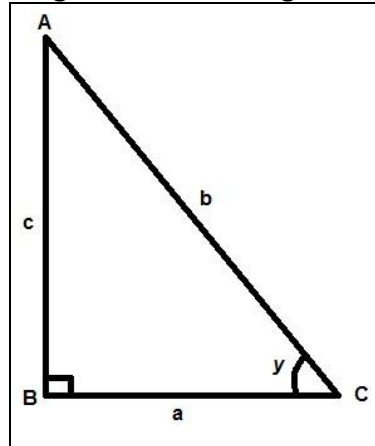
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{cos} y} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1,33$$

Assim, verifica-se os mesmos valores encontrados na primeira maneira de resolução. No entanto, em situações nas quais não seja possível obter a tangente na forma da razão entre cateto oposto e cateto adjacente de um ângulo, mas existirem valores para seno e cosseno deste mesmo ângulo, basta fazer uso da segunda maneira de calcular a tangente de um ângulo.

Exercício 4. Calcular, em função de **a**, **b** e **c**, o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de medida **y**, no triângulo retângulo abaixo.

Figura 49 – Triângulo 4



Fonte: Elaborado pelos autores

Resolução

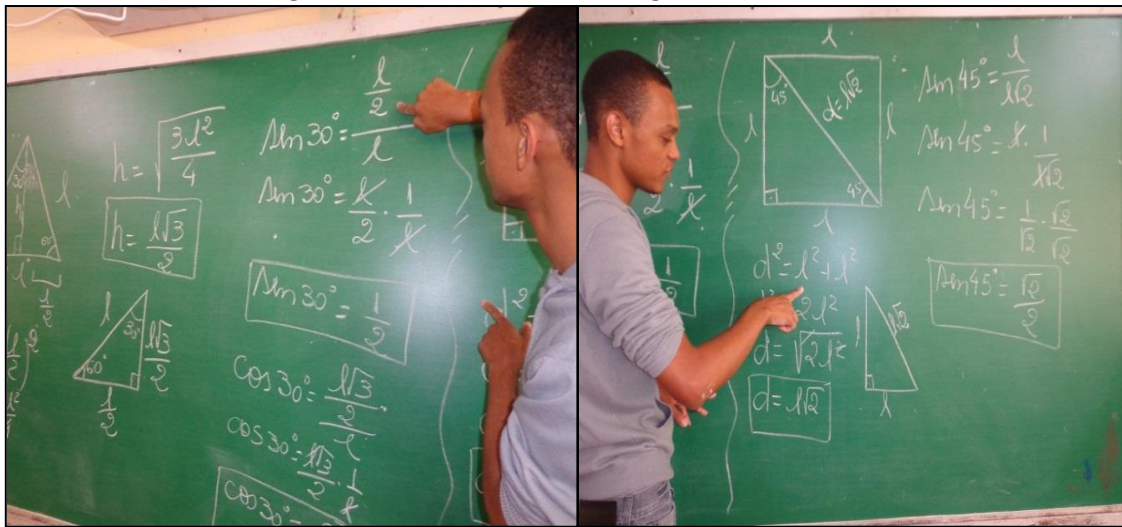
$$\text{sen } y = \frac{\text{medida do cateto oposto a } y}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cos } y = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } y}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan x = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{c}{a}$$

Após identificarmos as razões trigonométricas no triângulo retângulo, os estudantes foram instigados a verificarem a relação existente entre medidas de lados e valores para as razões *seno*, *cosseno* e *tangente* de um ângulo. Explicamos que quando se conhece o ângulo com o qual devemos trabalhar é possível determinar o valor das razões trigonométricas desse ângulo, ou seja, qual o valor do seno, cosseno e tangente desse ângulo. Falamos da existência dos ângulos conhecidos como *ângulos notáveis* e que tais ângulos são os de 30°, 45° e 60°. Com simples alternativas nos triângulos mostramos na lousa as razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

Figura 50 – Aula sobre ângulos notáveis



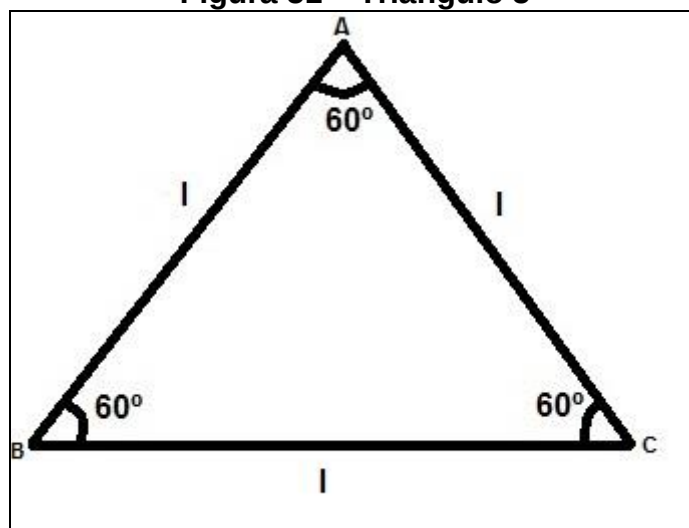
Fonte: Fotos dos autores

AULA: Identificando os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis (30° , 45° e 60°).

Razões de 30° e 60°

Considere um triângulo ABC (FIGURA 51) equilátero com lado de medida igual a l .

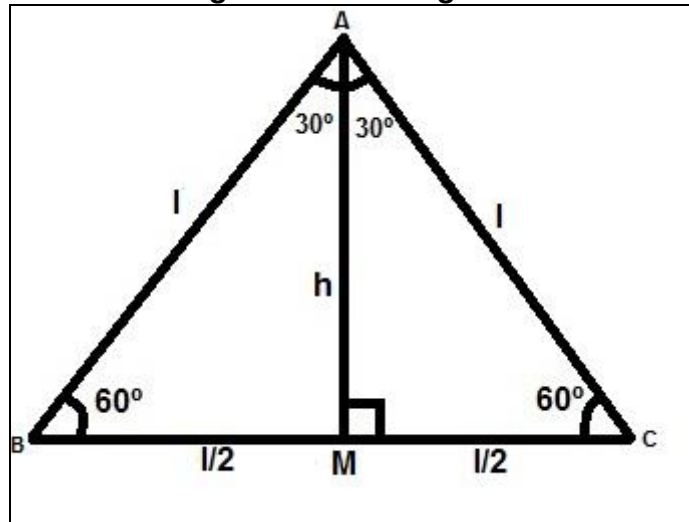
Figura 51 – Triângulo 5



Fonte: Elaborado pelos autores

Em um triângulo equilátero, a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, a mediana do triângulo relativa ao lado BC e a altura relativa ao vértice A são coincidentes. Ao traçá-las obtemos dois triângulos retângulos congruentes com ângulos agudos medindo 30° e 60° como mostra a Figura 52

Figura 52 – Triângulo 6



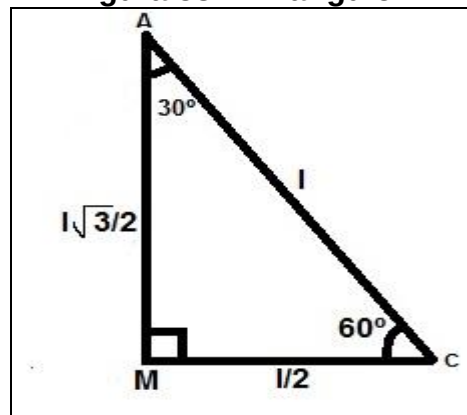
Fonte: Elaborado pelos autores

Como os novos triângulos obtidos são retângulos, é possível determinar a altura h em função de l fazendo uso da relação de Pitágoras. Assim,

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

Com os triângulos com todos os lados em função de l (FIGURA 53) é possível utilizá-los para demonstrarmos as razões de 30° e 60° .

Figura 53 – Triângulo 7



Fonte: Elaborado pelos autores

Razões de 30°

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 30^\circ}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } 30^\circ}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan } 30^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 30^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 30^\circ} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \times \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Razões de 60°

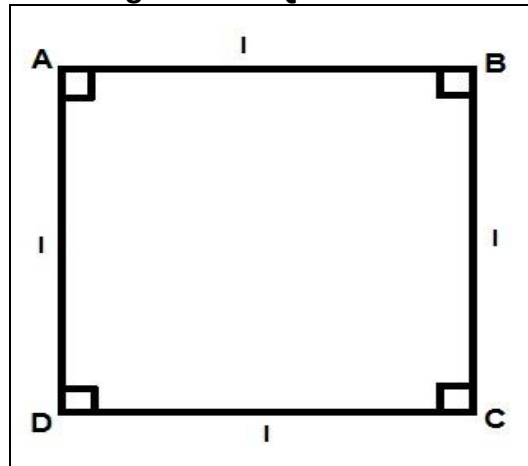
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 60^\circ}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } 60^\circ}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tan } 60^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 60^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 60^\circ} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{l} = \sqrt{3}$$

Para demonstrar as razões de 45° consideremos um quadrado A, B, C, D de lado com medida igual a l .

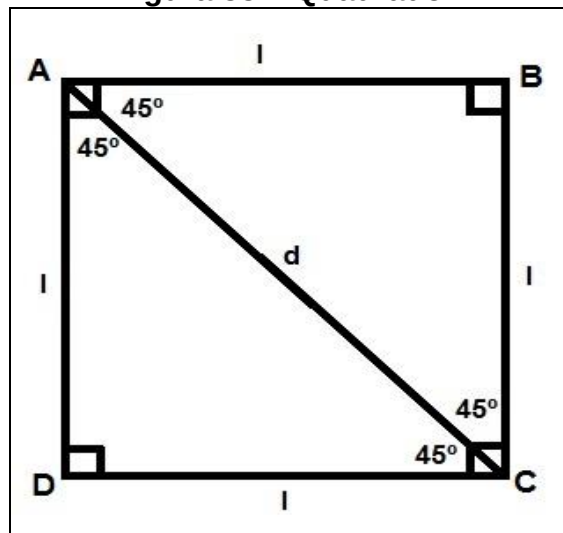
Figura 54 – Quadrado 1



Fonte: Elaborado pelos autores

Ao traçarmos uma de suas diagonais internas, obtemos dois triângulos retângulos congruentes com ângulos internos medindo 45° .

Figura 55 – Quadrado 2



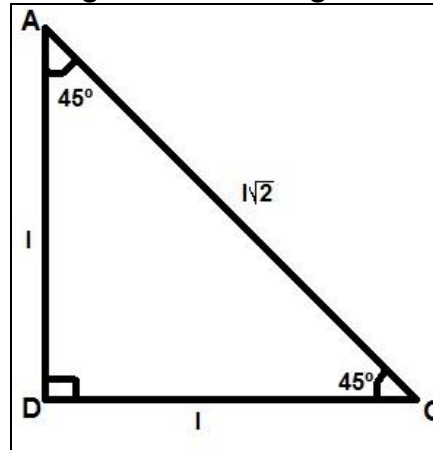
Fonte: Elaborado pelos autores

Já que o triângulo é retângulo podemos fazer uso da relação de Pitágoras para encontrarmos o valor da diagonal do quadrado em função de l . Assim,

$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2l^2} \Rightarrow d = l\sqrt{2}$$

A partir do triângulo ADC, identificamos valores para as razões trigonométricas de 45° .

Figura 56 – Triângulo 8



Fonte: Elaborado pelos autores

Razões de 45°

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 45^\circ}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } 45^\circ}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tan } 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 45^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 45^\circ} = \frac{l}{l} = 1$$

Quadro 3 - Resumo das razões trigonométricas dos ângulos notáveis

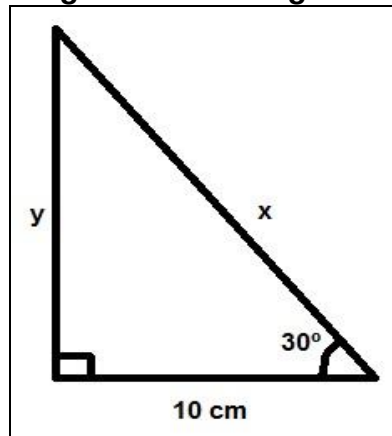
	30°	45°	60°
<i>seno</i>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>coseno</i>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<i>tangente</i>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborada pelos autores

Após o cálculo do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis de medidas 30° , 45° e 60° , propomos aos estudantes algumas atividades.

Exercício 5. No triângulo retângulo a seguir, determine:

Figura 57 – Triângulo 9



Fonte: Elaborado pelos autores

- a) O valor de x
- b) O valor de y

RESOLUÇÃO

- a) Para determinar o valor da medida de x no triângulo acima devemos relacionar a grandeza $\frac{\text{medida } x \text{ procurada}}{\text{medida dada}}$, ao ângulo dado. Assim sendo, 10 centímetros (cm) é a medida dada; logo o que relaciona o cateto adjacente com a hipotenusa com relação ao ângulo de 30° é a razão *cosseno*. Logo,

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } 30^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Pela tabela de valores dos ângulos notáveis tem-se:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = 2 \times 10 \Rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{20\sqrt{3}}{3}}$$

b) Analogamente, para o valor de y devemos relacionar a grandeza $\frac{\text{medida } Y \text{ procurada}}{\text{medida dada}}$ ao ângulo dado. Sendo 10 cm a medida dada, o que relaciona o cateto oposto com o cateto adjacente com relação ao ângulo de 30° é a razão *tangente*. Então,

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 30^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 30^\circ}$$

Pela tabela de valores dos ângulos notáveis, tem-se:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{10} \Rightarrow 3y = 10\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{10\sqrt{3}}{3}}$$

Observe que na letra **b** do exercício fizemos uso da relação *tangente*. Mas nada impede, uma vez obtido o valor de x , utilizá-lo para obter o valor da variável y . Neste caso, a razão trabalhada seria o *seno* 30° . Veja como ficaria o cálculo utilizando essa razão.

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 30^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Pela tabela de valores dos ângulos notáveis, tem-se:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow 2y = 1x \Rightarrow y = \frac{1x}{2} \Rightarrow y = \frac{1 \times \frac{20\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{10\sqrt{3}}{3}}$$

No que se refere a valores para as razões trigonométricas de ângulos agudos não notáveis, apresentamos aos estudantes duas alternativas para obterem valores

aproximados para tais razões: a tabela de razões trigonométricas de ângulos agudos e a calculadora científica. Após apresentarmos aos estudantes tais recursos, passamos as instruções de como utilizá-los.

3.7.1.6.3 Conhecendo e utilizando a tabela de razões trigonométricas

Figura 58 – Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017 5	0,999 8	0,017 5	46°	0,719 3	0,694 7	1,035 5
2°	0,034 9	0,999 4	0,034 9	47°	0,731 4	0,682 0	1,072 4
3°	0,052 3	0,998 6	0,052 4	48°	0,743 1	0,669 1	1,110 6
4°	0,069 8	0,997 6	0,069 9	49°	0,754 7	0,656 1	1,150 4
5°	0,087 2	0,996 2	0,087 5	50°	0,766 0	0,642 8	1,191 8
6°	0,104 5	0,994 5	0,105 1	51°	0,777 1	0,629 3	1,234 9
7°	0,121 9	0,992 5	0,122 8	52°	0,788 0	0,615 7	1,279 9
8°	0,139 2	0,990 3	0,140 5	53°	0,798 6	0,601 8	1,327 0
9°	0,156 4	0,987 7	0,158 4	54°	0,809 0	0,587 8	1,376 4
10°	0,173 6	0,984 8	0,176 3	55°	0,819 2	0,573 6	1,428 1
11°	0,190 8	0,981 6	0,194 4	56°	0,829 0	0,559 2	1,482 6
12°	0,207 9	0,978 1	0,212 6	57°	0,838 7	0,544 6	1,539 9
13°	0,225 0	0,974 4	0,230 9	58°	0,848 0	0,529 9	1,600 3
14°	0,241 9	0,970 3	0,249 3	59°	0,857 2	0,515 0	1,664 3
15°	0,258 8	0,965 9	0,267 9	60°	0,866 0	0,500 0	1,732 1
16°	0,275 6	0,961 3	0,286 7	61°	0,874 6	0,484 8	1,804 0
17°	0,292 4	0,956 3	0,305 7	62°	0,882 9	0,469 5	1,880 7
18°	0,309 0	0,951 1	0,324 9	63°	0,891 0	0,454 0	1,962 6
19°	0,325 6	0,945 5	0,344 3	64°	0,898 8	0,438 4	2,050 3
20°	0,342 0	0,939 7	0,364 0	65°	0,906 3	0,422 6	2,144 5
21°	0,358 4	0,933 6	0,383 9	66°	0,913 5	0,406 7	2,246 0
22°	0,374 6	0,927 2	0,404 0	67°	0,920 5	0,390 7	2,355 9
23°	0,390 7	0,920 5	0,424 5	68°	0,927 2	0,374 6	2,475 1
24°	0,406 7	0,913 5	0,445 2	69°	0,933 6	0,358 4	2,605 1
25°	0,422 6	0,906 3	0,466 3	70°	0,939 7	0,342 0	2,747 5
26°	0,438 4	0,898 8	0,487 7	71°	0,945 5	0,325 6	2,904 2
27°	0,454 0	0,891 0	0,509 5	72°	0,951 1	0,309 0	3,077 7
28°	0,469 5	0,882 9	0,531 7	73°	0,956 3	0,292 4	3,270 9
29°	0,484 8	0,874 6	0,554 3	74°	0,961 3	0,275 6	3,487 4
30°	0,500 0	0,866 0	0,577 4	75°	0,965 9	0,258 8	3,732 1
31°	0,515 0	0,857 2	0,600 9	76°	0,970 3	0,241 9	4,010 8
32°	0,529 9	0,848 0	0,624 9	77°	0,974 4	0,225 0	4,331 5
33°	0,544 6	0,838 7	0,649 4	78°	0,978 1	0,207 9	4,704 6
34°	0,559 2	0,829 0	0,674 5	79°	0,981 6	0,190 8	5,144 6
35°	0,573 6	0,819 2	0,700 2	80°	0,984 8	0,173 6	5,671 3
36°	0,587 8	0,809 0	0,726 5	81°	0,987 7	0,156 4	6,313 8
37°	0,601 8	0,798 6	0,753 6	82°	0,990 3	0,139 2	7,115 4
38°	0,615 7	0,788 0	0,781 3	83°	0,992 5	0,121 9	8,144 3
39°	0,629 3	0,777 1	0,809 8	84°	0,994 5	0,104 5	9,514 4
40°	0,642 8	0,766 0	0,839 1	85°	0,996 2	0,087 2	11,430 1
41°	0,656 1	0,754 7	0,869 3	86°	0,997 6	0,069 8	14,300 7
42°	0,669 1	0,743 1	0,900 4	87°	0,998 6	0,052 3	19,081 1
43°	0,682 0	0,731 4	0,932 5	88°	0,999 4	0,034 9	28,636 3
44°	0,694 7	0,719 3	0,965 7	89°	0,999 8	0,017 5	57,290 0
45°	0,707 1	0,707 1	1,000 0				

Fonte: TONSIS, 2011

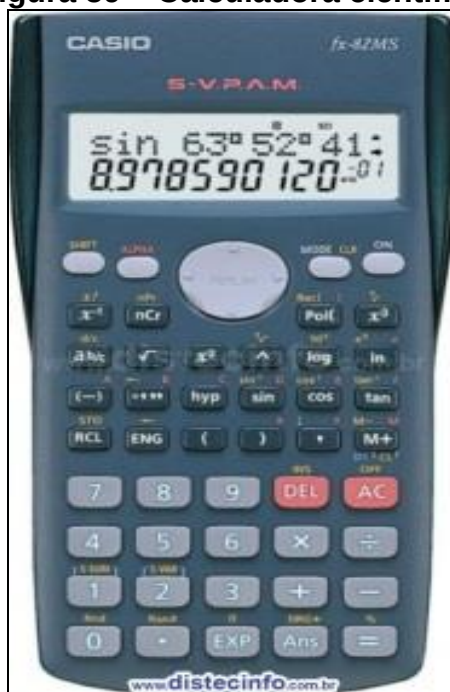
Exemplo: Determinar o $\text{sen } 27^\circ$ e $\text{cos } 53^\circ$ utilizando a tabela de razões trigonométricas.

$$\text{sen } 27^\circ \text{ (coluna seno, linha } 27^\circ) = 0,4540$$

$$\text{cos } 53^\circ \text{ (coluna cosseno, linha } 53^\circ) = 0,7986$$

3.7.1.6.4 Conhecendo e utilizando o recurso “calculadora científica”

Figura 59 – Calculadora científica



Fonte: CALCULADORA CIENTÍFICA..., 2013

Exemplo: Calcular as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de 45° utilizando a calculadora científica.

Razão seno: Aperte a tecla **sen**, digite o número 45 e aperte a tecla igual.

$$\text{sen } 45 = 0,707106781$$

Razão cosseno: Aperte a tecla **cos**, digite o número 45 e aperte a tecla igual.

$$\text{cos } 45 = 0,707106781$$

Razão tangente: Aperte a tecla **tan**, digite o número 45 e aperte a tecla igual.

$$\tan 45 = 1$$

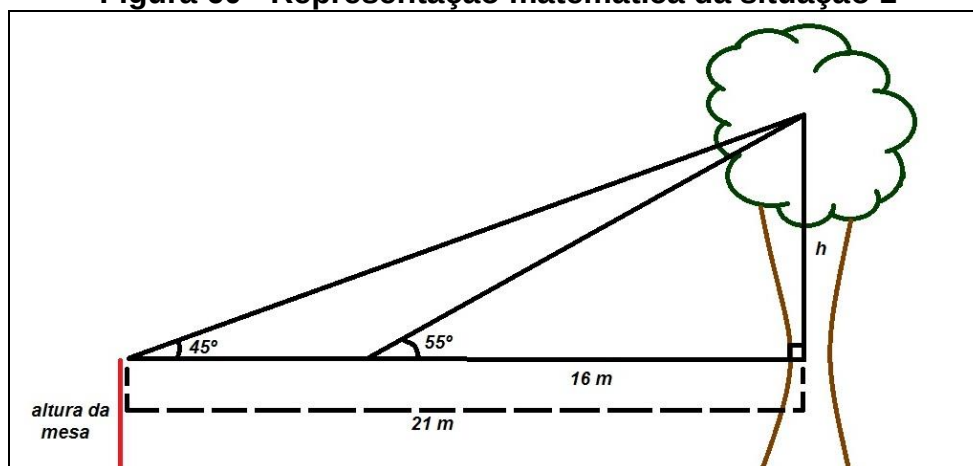
3.7.1.7 Sexto encontro

Após apresentarmos aos estudantes a ideia de Razões trigonométricas e enfatizarmos os ângulos notáveis e não notáveis, acreditávamos já ser possível solucionar a situação 01 (determinar a altura da árvore), já que o último entrave era com relação a valores de razões de ângulos observados. Assim voltamos novamente para o espaço físico da escola com o objetivo de solucionar o problema. Solicitamos aos estudantes que tornassem novamente a situação como uma representação matemática e que criassem um plano de resolução para a questão.

3.7.1.7.1 Voltando ao problema da altura da árvore

Na Figura 60 está representada novamente a representação matemática da situação 1.

Figura 60 - Representação matemática da situação 1



Fonte: Elaborado pelos autores

Percebemos, neste momento, um avanço significativo com relação à compreensão da situação. Os estudantes conseguiram perceber a relação existente entre os catetos desse triângulo e o ângulo observado. Ao perguntarmos qual a razão que relaciona o cateto oposto com o cateto adjacente ao ângulo de 45° identificaram facilmente a razão *tangente*. Porém, apresentaram ainda dificuldades quanto ao algoritmo de resolução da questão. Por apresentarem deficiência quanto a conceitos elementares da matemática, foram verificados pequenos entraves na resolução técnica da questão, mas o que percebemos é que não mais se tratava de elementos da trigonometria e sim de conceitos básicos da matemática, como por exemplo, o princípio multiplicativo. Isto mostra que no que diz respeito a trigonometria não havia impedimento à solução da questão. Com o auxílio dos pesquisadores, foi possível que se chegasse a uma conclusão para a situação 1. A resolução detalhada de como foi solucionada a questão é apresentada abaixo.

RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO PROPOSTA

(Com relação ao ângulo de 45°)

Tomando como base as razões trigonométricas estudadas percebemos na situação, que a relação entre altura h procurada e a distância sob a qual foi observado o ponto máximo da árvore é a *tangente de 45°* . Assim,

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 45^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 45^\circ}$$

Pela tabela de valores dos arcos notáveis temos que o valor da razão tangente de 45° é 1. Logo,

$$1 = \frac{h}{21} \Rightarrow h = 1 \times 21 \Rightarrow \underline{h = 21m}$$

Porém foi utilizada uma mesa como apoio para que se observasse o ponto desejado, o que perceberam facilmente ao serem indagados. No entanto deviam considerá-la.

Ao medirem a altura da mesa concluíram que tinha ela 70 cm. Assim, adicionando tal medida à altura da árvore obtiveram: $21m + 70 \text{ cm} = 21,70m$.

Portanto, concluíram que a altura da árvore é de 21,70 m.

R = 21,70 m

(Com relação ao ângulo de 55°)

Analogamente a R1 temos que,

$$\tan 55^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 55^\circ}{\text{cateto adjacente a } 55^\circ}$$

Utilizando o recurso tabela de razões trigonométricas ou calculadora científica para estimarmos valores para razões de ângulos não notáveis, temos que o valor da razão *tangente* de 55° é aproximadamente 1,43.

Logo,

$$1,43 = \frac{h}{16} \Rightarrow h = 1,43 \times 16 \Rightarrow \underline{h = 22,88m}$$

Adicionando o valor da altura da mesa (70 cm), temos: 22,88 + 70 = 23,58 m

Portanto concluímos que o valor para a medida da altura da árvore é 23,58 m.

R = 23,58 m

Contudo, percebeu-se nessa situação uma discrepância nos dois valores encontrados, o que pode ser relacionado ao equipamento utilizado para observação do objeto, uma vez que tal equipamento não é de alta precisão.

Ainda na situação 1 (calcular a altura da árvore) os pesquisadores propuseram agora o cálculo da menor distância entre o observador e o ponto mais alto do objeto

observado, com o objetivo de trabalhar na mesma situação as outras razões com relação ao ângulo observado.

Ao identificar que a menor distância entre o observador e o ponto mais alto do objeto observado caracterizava a hipotenusa e sendo conhecida a medida do cateto adjacente ao ângulo observado foi possível relacionar a razão cosseno. Por outro lado, como já haviam identificado anteriormente a altura do objeto, puderam então fazer a relação da razão seno, ou seja, relacionar o cateto oposto ao ângulo observado com a hipotenusa, que é a menor distância entre o observador e o ponto máximo da árvore (FIG. 60).

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } 45^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{21}{x} \Rightarrow \sqrt{2}x = 2 \times 21 \Rightarrow x = \frac{42}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{42\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = 21\sqrt{2}}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 45^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{21,70}{x} \Rightarrow \sqrt{2}x = 2 \times 21,70 \Rightarrow x = \frac{43,40}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{43,40\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = 21,70\sqrt{2}}$$

Neste momento, feito na prática as razões seno, cosseno e tangente, os pesquisadores consideraram interessante fazer uso do teorema de Pitágoras, uma vez que com as experiências anteriores já se conhecia duas das medidas do triângulo retângulo. Isso permitiu verificar que a relação é válida para triângulos retângulos. A verificação para a situação 1 (FIG. 60) na forma com que foi feita é apresentada a seguir.

- Tomaremos $x = 21\sqrt{2}$
- Tomaremos $h = 21$

- Tomaremos d (*distancia dada*) $d = 21$

$$x^2 = h^2 + d^2$$

$$(21\sqrt{2})^2 = 21^2 + 21^2$$

$$882 = 441 + 441$$

$$882 = 882 \text{ (V)}$$

Logo, foi verificada a relação de Pitágoras na situação 1 proposta.

É importante ressaltar que para a situação 1 desenvolvemos todo o trabalho de aplicação utilizando o espaço físico da escola. Na verdade, esquematizamos outras situações, porém, o aprofundamento dado no trabalho se concentrou nesta situação. Com esta dinâmica de trabalho buscamos proporcionar aos estudantes a compreensão dos significados durante cada etapa do trabalho. A intenção era levar os estudantes aos questionamentos: Como comportar diante de tal situação? Qual o primeiro passo na busca de solução? A que devo recorrer? Quais embasamentos teóricos deverão buscar para favorecer nas situações propostas? A fim de criar mecanismos que os envolvam nas situações, intervimos a todo o momento sobre a situação trabalhada para irmos à busca de elementos que nos favorecesse e nos permitisse continuar, até que compreendessem os fundamentos por trás de situações como essa.

Contudo, acreditamos que tal situação possibilitou aos estudantes o entendimento de todo o processo desenvolvido e que agora eles seriam capazes de criar iniciativas que os possibilitem solucionar novas situações propostas. Quanto aos conteúdos da trigonometria no triângulo retângulo, a resolução da situação 1 possibilitou o estudo, entendimento e aprimoramento de maneira que possam fazer uso de tais conteúdos para agirem diante de novos problemas.

3.7.1.7.2 Voltando à situação do corredor central

A proposta deste momento foi encontrar a distância entre as duas pontas do corredor central de acesso às salas de aula, supondo que exista uma inacessibilidade entre as pontas do corredor. Nesta atividade, os estudantes já estavam um pouco mais familiarizados com as iniciativas a serem tomadas para resolverem a situação. Observaram uma das pontas do corredor utilizando o teodolito construído, de modo a identificarem sob qual inclinação fosse possível visualizar o ponto mais alto do corredor, o que foi concluído com sucesso (FIG 61).

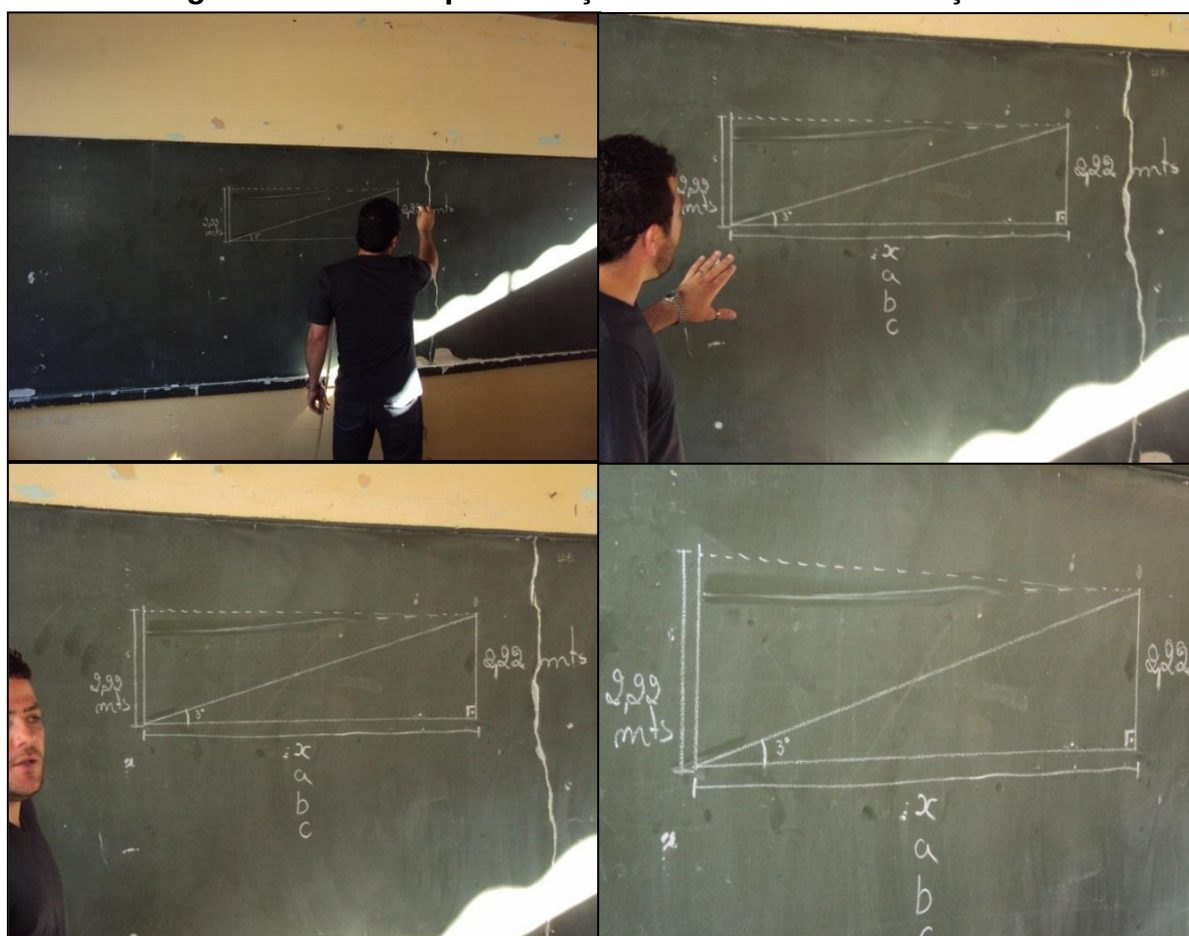
Figura 61 – Estudantes observando com o teodolito



Fonte: Fotos dos autores

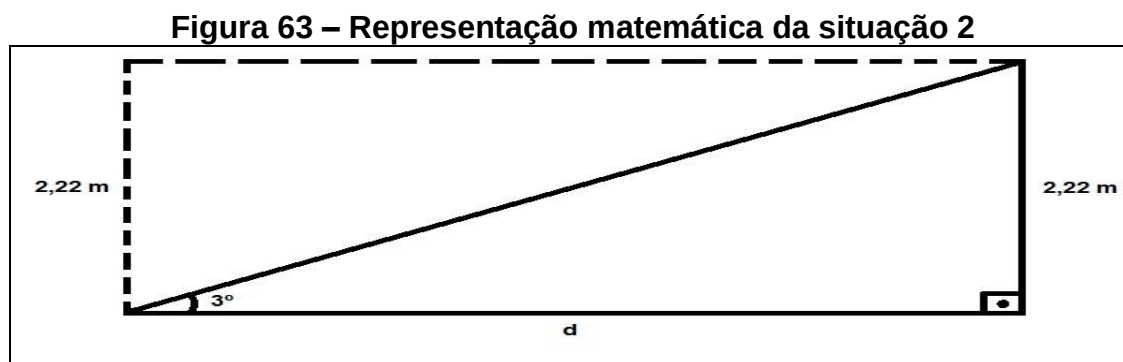
Nesta situação, a única dificuldade identificada pelos pesquisadores com relação aos estudantes foi identificar qual seria a medida acessível, pois não mais se tratava da distância entre o observador e o objeto, mas da altura do solo à pilastra do telhado, já que esta é considerada uma medida acessível. O problema maior não foi identificar que esta seria a medida (altura) acessível, mas a dificuldade era em acreditar que tal altura estaria do outro lado (ponto observado) que pela situação não fosse possível chegar, possibilitando que não percebessem que a altura do solo à pilastra no ponto onde se encontravam era a mesma observada do outro lado. Contudo, foi necessária uma intervenção dos pesquisadores no intuito de os levarem a compreender tal situação. Assim, direcionamos a uma sala de aula de modo a esquematizarmos a situação do contexto em que se seguiu. Tal situação em sua representação matemática é mostrada na Figura 62.

Figura 62 – Aula representação matemática da situação 2



Fonte: Foto dos autores

Contudo, somente ao mostrar o esquema da situação na lousa é que os estudantes compreenderam o contexto, tendo condições de evidenciar estratégias para a solução. A representação matemática da situação, bem como a solução do problema como foi desenvolvido, é apresentada na Figura 63.



Fonte: Elaborado pelos autores

Antes que desenvolvessem o cálculo algébrico da questão desenvolvemos o seguinte diálogo com os estudantes através de Pergunta dos Pesquisadores – **PP** e respostas Dadas – **RD**.

PP: Qual a medida procurada?

RD: d.

PP: Qual medida é acessível?

RD: 2,22 m.

PP: A que devo relacionar as duas medidas?

RD: Ao ângulo de 3° .

PP: Como devo relacionar as duas medidas ao ângulo?

RD: Pelas razões trigonométricas.

PP: Com relação ao ângulo de 3° , a medida 2,22 m representa o que no triângulo?

RD: Cateto oposto.

PP: E a medida d?

RD: Cateto adjacente.

PP: Qual razão relaciona cateto oposto com cateto adjacente ao ângulo de 3°?

RD: A tangente de 3°.

PP: Como encontrar o valor da tangente de 3°?

RD: Usando a calculadora.

PP: Quanto vale a tangente de 3°?

RD: Aproximadamente 0,005.

Resolução da questão:

$$\tan 3^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 3^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 3^\circ}$$

$$0,05 = \frac{2,22}{d}$$

$$0,005d = 2,22$$

$$d = \frac{2,22}{0,005}$$

$$\boxed{d = 44,4 \text{ m}}$$

Após solucionarem algebricamente a situação 2, pedimos que voltassem novamente para o campo de aplicação da situação proposta e verificassem a medida da distância procurada fazendo uso de uma trena de 30m. A Figura 64 ilustra a situação.

Figura 64 – Estudantes verificando o comprimento do corredor central



Fonte: Foto dos autores

Utilizando a trena para verificar tal distância encontraram 43,5 m. No entanto, fizemos uma breve discussão sobre a discrepância dos valores encontrados nas duas medidas encontradas. Explicamos novamente que o equipamento utilizado para observar os ângulos não é de alta precisão e que tal fato influenciou nos valores encontrados.

No próximo e último momento deste encontro foi proposto aos estudantes que criassem estratégias para solucionar a situação 3 a qual consistia em identificar um elemento do espaço escolar para que verificassem as razões seno, cosseno e tangente, bem como o teorema de Pitágoras já apresentados. Para esta situação, os estudantes escolheram trabalhar no cálculo da altura da árvore palmeira no jardim interno da escola já mencionada anteriormente como tal situação. Utilizaram objetos do espaço físico escolar para os quais deveriam traçar estratégias que os levassem a descobrir sua altura. Os pesquisadores solicitaram que os estudantes verificassem se a altura estava correta a partir da medição por outro ângulo, além disso eles deveriam representar geometricamente, seja por desenhos ou barbantes (pelo menos dois ângulos para cada árvore), e ao final cada participante deveria responder a uma indagação relacionada ao trabalho feita pelos pesquisadores ou por um colega. Momentos desta aula são mostrados nas Figuras 65 e 66.

Figura 65 – Estudantes desenvolvendo situação 3



Fonte: Foto dos autores

Figura 66 – Estudantes analisando dados da situação 3



Fonte: Foto dos autores

Os estudantes identificaram pontos estratégicos para observação do objeto, observaram o objeto com a ferramenta teodolito sob dois pontos distintos e mediram com o auxílio de uma trena de 30m a medida acessível (distância entre o observador e o objeto observado). Uma vez familiarizados com as situações, levantaram conjecturas, discutiram entre eles, representaram matematicamente as diferentes situações geradas, algebrizaram os cálculos necessários a cada problema e encontraram as medidas procuradas (FIG. 67).

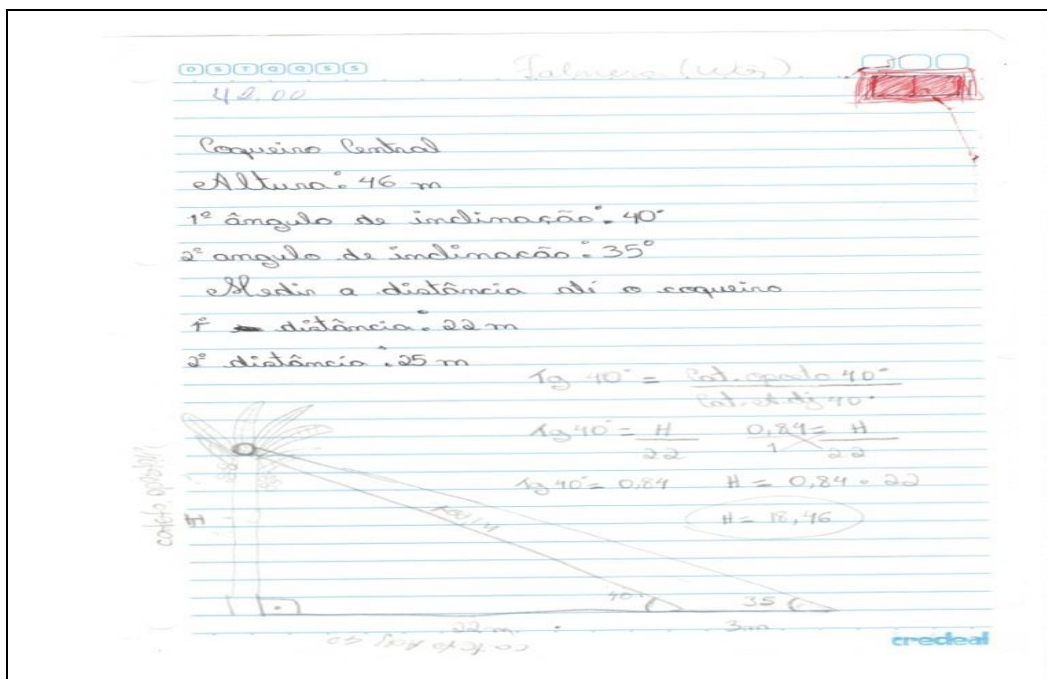
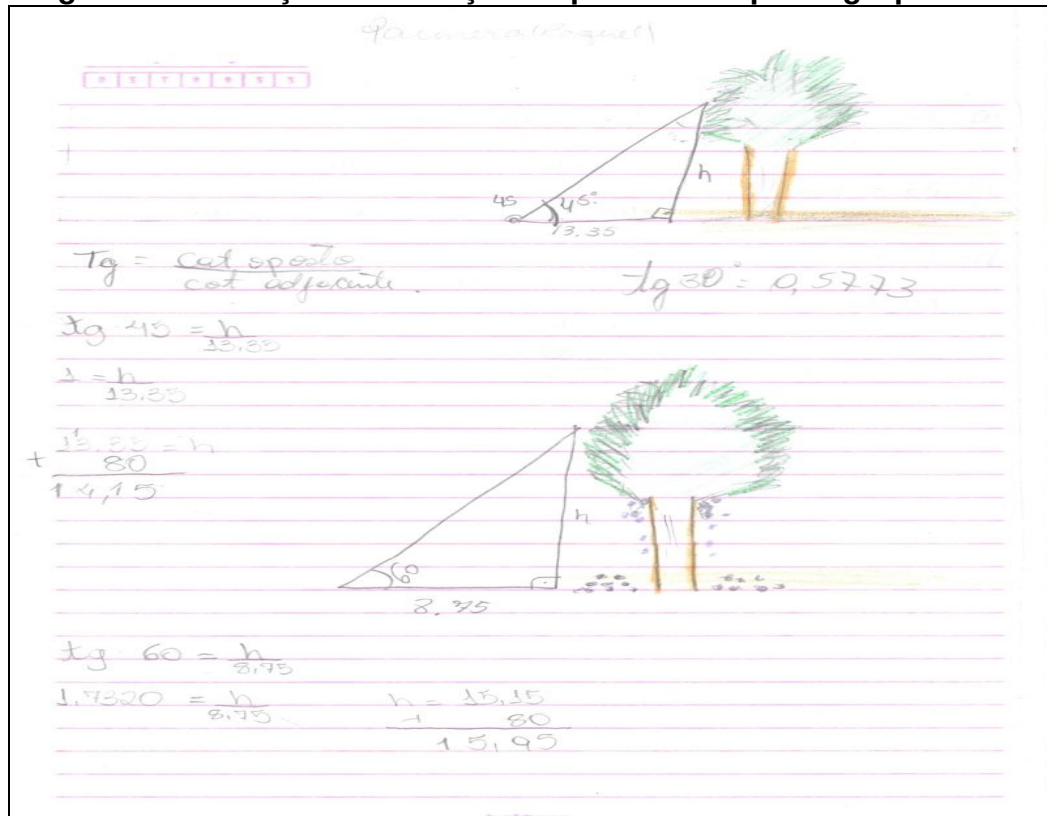
Figura 67 – Estudantes solucionando a situação 3



Fonte: Foto dos autores

Apresentamos as conjecturas e soluções como apontadas pelos estudantes e detalhamos o processo de resolução da situação na Figura 68.

Figura 68 – Solução da situação 3 apresentada pelos grupos 1 e 2



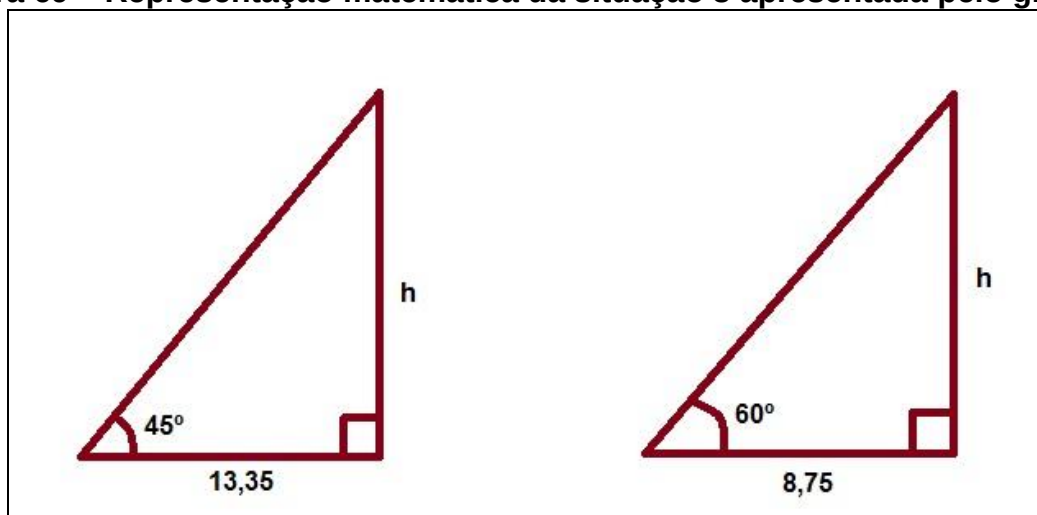
Fonte: Foto dos autores

Resolução detalhada da situação 3 (calcular a altura da Palmeira)

Palmeira 1:

Representação matemática da situação.

Figura 69 – Representação matemática da situação 3 apresentada pelo grupo 1



Fonte: Elaborado pelos autores

Como a relação estabelecida com os ângulos indicados envolve as medidas dos catetos, utilizaremos a *tangente* desses ângulos para encontrarmos a medida h .

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{13,35} \Rightarrow 1 = \frac{h}{13,35} \Rightarrow h = 13,35$$

Considerando a altura da mesa 80 cm.

$$h + 0,80 = 13,35 + 0,80 = 14,15$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{8,75} \Rightarrow 1,7320 = \frac{h}{8,75} \Rightarrow h = 1,7320 \times 8,75 \Rightarrow h = 15,15$$

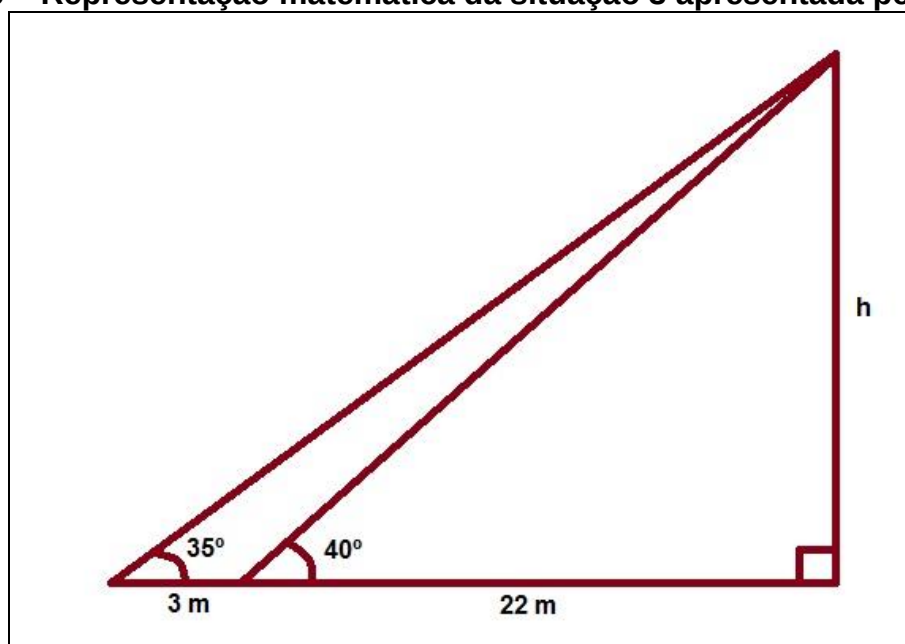
Considerando a altura da mesa 80 cm.

$$h + 0,80 = 15,15 + 0,80 = \mathbf{15,95}$$

Palmeira 2:

Representação matemática da situação

Figura 70 – Representação matemática da situação 3 apresentada pelo grupo 2



Fonte: Elaborado pelos autores

Estabelecendo relação entre altura e medidas acessíveis aos ângulos indicados, tem-se a razão *tangente* desses ângulos. Assim,

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{22} \Rightarrow 0,84 = \frac{h}{22} \Rightarrow h = 18,48$$

Considerando 80 cm para a altura da mesa.

$$h + 0,80 = 18,48 + 0,80 = \mathbf{19,28}$$

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{25} \Rightarrow 0,7 = \frac{h}{25} \Rightarrow h = 0,7 \times 25 \Rightarrow h = 17,50$$

Considerando 80 cm para a altura da mesa.

$$h + 0,80 = 17,50 + 0,80 = \mathbf{18,30}$$

Ao traçarmos comparações para a situação das palmeiras trabalhada pelos estudantes, é possível estabelecer algumas evidências.

O primeiro aspecto observado é que os estudantes envolvidos no trabalho da primeira palmeira criaram estratégias diferentes do que encontramos nos livros didáticos para representar matematicamente a situação sob a visualização de dois ângulos. Já os envolvidos na segunda palmeira representaram da mesma maneira que encontramos em bibliografias sobre o assunto. Isto mostra que considerar as diferentes opiniões dos estudantes pode possibilitar um melhor avanço no entendimento de situações problema. Ou seja, permitir que as próprias estratégias também os levem à mesma solução.

Outro ponto identificado pelos pesquisadores é que os estudantes que trabalharam com ângulos notáveis, como por exemplo, o de 60° , não recorreram à tabela de valores para tais ângulos e sim fizeram uso da calculadora científica. Isso pode acarretar alguns entraves no momento em que se depararem com situações nas quais não seja possível fazer uso de tal recurso, mas trabalhar com algoritmos envolvendo radicais. Talvez este fato nos leve a questionar sobre quando utilizar ou não a calculadora, ou seja, quando ele será subsídio ou dependência.

Já na resolução da situação proposta foi possível perceber que os estudantes envolvidos no cálculo da altura da segunda palmeira não utilizaram o valor da altura da mesa usada para observar o objeto pretendido. Isto acarretou uma diferença nos valores encontrados pelos estudantes e pelos pesquisadores, já que o resultado encontrado pelos estudantes não representa a altura correta da palmeira. Isso mostra a atenção que devemos ter quando estamos envolvidos num processo em que devemos considerar vários mecanismos na busca por solução.

3.7.1.8 Sétimo encontro

Uma vez desenvolvidas todas as situações propostas no início do trabalho, precisaríamos ainda voltar às situações complementares 1 e 2, que se referem respectivamente ao ângulo de inclinação da bola ao bater uma cobrança de pênalti e do cálculo da altura do pátio principal da escola. (FIG. 71).

Figura 71 – Estudantes desenvolvendo as situações complementares 1 e 2



Fonte: Foto dos autores

Sobre a inclinação da bola o objetivo era de verificar a inclinação ideal para a sua partida de modo que ela bata no travessão do gol. Como já haviam esquematizado anteriormente a situação até que obtivessem sua representação matemática como mostra a Figura 71, o próximo momento foi fazer uso dos conhecimentos trigonométricos estudados para tentar extrair conclusões apropriadas para a questão.

Quanto à inclinação da bola para que atinja o travessão, não foi necessário o cálculo da altura do gol (distância entre o chão e o travessão), uma vez que bastava observar o ponto máximo (travessão) com a utilização do equipamento teodolito. Porém como foi de interesse dos pesquisadores, além de encontrarem a inclinação adequada com a utilização do teodolito, aproveitamos o cálculo da altura encontrada posteriormente para estimarmos novamente o ângulo pelo arco da razão trigonométrica apropriada. Quanto ao primeiro método (utilizando o teodolito) não apresentaram dificuldades, uma vez que bastava observar o ponto máximo (travessão) e identificar o ângulo. A Figura 72 mostra o desenvolvimento desta aula.

Figura 72 – Estudantes desenvolvendo a situação complementar



Fonte: Fotos dos autores

Ao observarem, pela ferramenta teodolito, o travessão, concluíram que a inclinação da bola para que atinja o ponto, é de 30° .

O próximo passo foi calcular a altura do gol de modo que fosse possível fazer uso de tal medida para estimarem o valor da razão trigonométrica em função de um ângulo qualquer e descobrirem se o arco da razão deste ângulo é o mesmo observado. Ainda que a altura entre o chão e o travessão fosse acessível, instruímos os estudantes em encontrar tal altura fazendo uso das razões trigonométricas no triângulo retângulo. No entanto, mediram com o auxílio de uma trena de 30 m a distância entre o ponto observado no gol e o ponto onde se encontravam (ponto de

partida da bola). Representaram matematicamente a situação e calcularam a altura entre o chão e o travessão (FIG. 73).

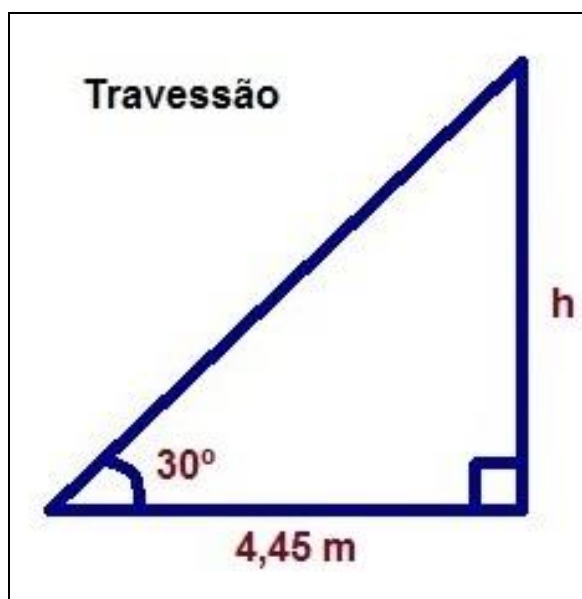
Figura 73 – Estudantes solucionando a situação complementar 2



Fonte: Fotos dos autores

A representação matemática da situação (FIG 74) e a resolução do cálculo da altura entre o chão e o travessão do gol são apresentadas a seguir.

Figura 74 – Representação matemática da situação complementar 2



Fonte: Elaborado pelos autores

Resolução

Queremos encontrar a altura h e recorreremos à medida acessível distância entre o observador e ponto observado. Com relação ao ângulo de inclinação, é possível identificar os catetos oposto e adjacente. Logo, o que relaciona cateto oposto com adjacente com relação ao ângulo de inclinação é a tangente desse ângulo. Assim,

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 30^\circ}{\text{medida do cateto adjacente } 30^\circ}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{4,45}$$

$$0,57 = \frac{h}{4,45}$$

$$\boxed{h = 2,5 \text{ m}}$$

Encontrada a medida da altura procurada, e antes que voltassem à situação da inclinação da bola pedimos que verificassem a altura encontrada medindo tal

distância com a utilização de uma trena de modo a traçarem comparações como mostrado na Figura 75, e concluíram tal altura como sendo 2,20 m.

Figura 75 – Estudantes verificando a altura encontrada



Fonte: Foto dos autores

Verificaram novamente uma diferença entre os dois valores (altura encontrada e a altura medida). Discutimos sobre a não precisão do equipamento teodolito construído por eles, apesar de a diferença não ser tão significativa (2,4 contra 2,20 m). Porém, como o próximo passo seria fazer uso desta medida e da distância entre o observador e o ponto observado para estimarmos o ângulo pelo arco da razão trigonométrica, foi necessário que escolhessem uma das alturas encontradas. No entanto, explicamos que, como o objetivo é verificar a mesma inclinação da bola pelos dois métodos (utilizando o teodolito e pelo arco da razão trigonométrica), o ideal é que trabalhassem com a altura encontrada utilizando as razões trigonométricas e não a medida com o recurso trena, uma vez que o ângulo usado neste procedimento é o mesmo definido pelo teodolito. Contudo, o próximo passo foi instruí-los quanto ao cálculo do ângulo pelo arco da razão trigonométrica apropriada.

3.7.1.8.1 Recorrendo novamente à calculadora científica

Apresentamos novamente a representação matemática da situação mostrada na Figura 74, agora com uma inclinação qualquer que a identificamos como β , com o objetivo de utilizar os valores dos lados destes triângulos e associá-los ao cálculo de seus ângulos com o auxílio da calculadora.

Na representação apresentada perceberam que as medidas indicadas no triângulo com relação ao ângulo de inclinação foram os catetos oposto e adjacente. Assim, os pesquisadores perguntaram aos estudantes sobre qual razão trigonométrica associava os dois catetos com relação ao ângulo β . Não apresentaram dificuldade em reconhecer a razão *tangente* de β . Pedimos então que representassem a equação *tangente* de β utilizando os catetos dos triângulos. Apresentaram a seguinte equação:

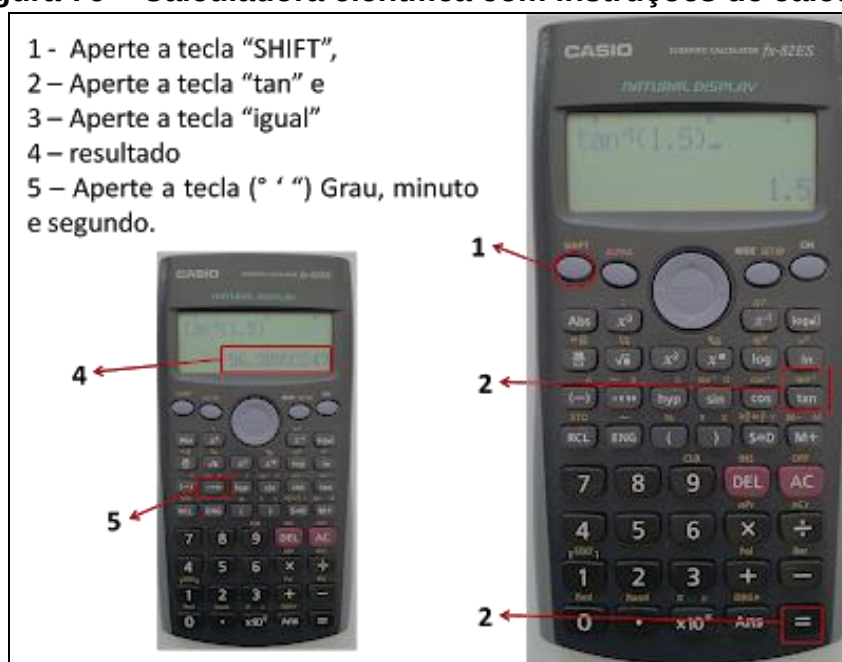
$$\tan \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta}$$

Solicitamos que substituíssem os catetos pelos seus respectivos valores numéricos.

$$\tan \beta = \frac{2,5}{4,45}$$

Explicamos que a única variável isolada é a $\tan \beta$, e que ela equivale ao valor da razão no segundo membro da equação. Porém, não é a tangente do ângulo β que queremos e sim o próprio ângulo β e que para encontrar o seu valor devemos recorrer ao auxílio “calculadora científica” para estimarmos o valor do ângulo. Instruímos quanto ao uso do equipamento no cálculo de ângulo, como apresentamos na Figura 76.

Figura 76 – Calculadora científica com instruções de cálculos



Fonte: SANTOS, 2013

Qual é o ângulo β cuja tangente é a razão $\frac{2,5}{4,45}$?

Se a tangente de β é igual a razão $\frac{2,5}{4,45}$, logo o ângulo β é o arco da tangente de $\frac{2,5}{4,45}$, o que na calculadora científica representa a função inversa de β , $\tan^{-1} \beta$.

Assim,

$$\tan^{-1} \frac{2,5}{4,45} = \tan^{-1} 0,57 = 29,7^\circ \cong 30^\circ$$

$$\boxed{29,7^\circ \cong 30^\circ}$$

Contudo, foi possível concluir com êxito o valor do ângulo desejado com diferença considerável ao observado pelos estudantes referente à inclinação da bola ao cobrar um pênalti, de modo que ela bata no travessão. No que ainda se referiu a esta situação, apenas levantamos alguns questionamentos quanto ao fato de se pretender que a bola entre no gol ou vá para fora. E a partir da inclinação encontrada buscamos proporcionar o entendimento de que bastaria ser menor que o ângulo de 30° (fazer o gol) ou maior que o ângulo de 30° (ir para fora).

Como último momento deste encontro trabalharam no cálculo da altura do pátio principal da escola (situação complementar 2). Diante os mecanismos criados nas situações anteriores, percebemos uma desenvoltura nesta situação, pois já estavam bem familiarizados com cálculos correlatos. Para tanto, ao propormos tal problema, discutiram entre eles e criaram as estratégias necessárias: escolheram o ponto estratégico para observar a altura do pátio, discutiram sobre a necessidade de utilizar um apoio (mesa) para colocar o equipamento teodolito que os possibilitou observar tal ponto, visualizaram o ponto máximo através de uma inclinação, mediram com uma trena de 30 m a distância entre o ponto onde observavam e a pilastra do pátio, representaram matematicamente a questão e criaram um plano de solução para a situação pretendida, como mostra a Figura 77.

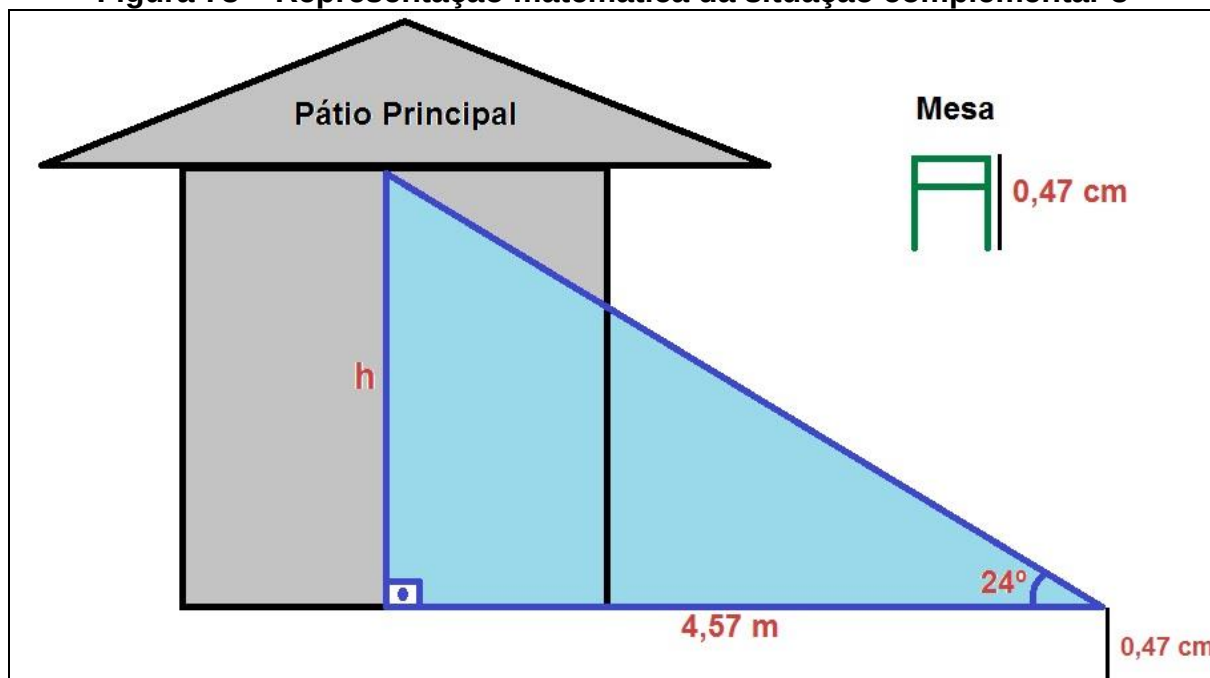
Figura 77 – Estudantes desenvolvendo a situação complementar 3



Fonte: Foto dos autores

Contudo, não apresentaram dificuldades em finalizar a questão, concluindo com êxito a altura do pátio principal da escola. A representação matemática e a resolução da questão como foi desenvolvida e considerada correta pelos pesquisadores são apresentados na Figura 78.

Figura 78 – Representação matemática da situação complementar 3



Fonte: Elaborado pelos autores

Resolução

Os catetos indicados no triângulo retângulo gerado indicam que devem trabalhar com a tangente do ângulo de 24° . Logo,

$$\tan 24^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 24^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 24^\circ}$$

$$0,4452 = \frac{h}{4,57}$$

$$h = 0,4452 \times 4,57$$

$$h = 2,035$$

Considerando a altura da mesa 0,47 m

$$h = 2,035 + 0,47$$

$$\boxed{h = 2,505 \text{ m}}$$

Após concluída a situação complementar 3 (calcular a altura do pátio principal), a última envolvendo o espaço físico da escola, finalizamos os encontros voltados à questões externas à sala de aula. No entanto, vale ressaltar a necessidade de um novo momento fora da sala de aula dedicado ao problema da projeção da sombra de uma árvore com relação à posição do sol, para uma possível verificação da altura da árvore encontrada na situação 1, usando o princípio de semelhança de triângulos como feito por Tales (600 a.C.), fato questionado desde o primeiro encontro.

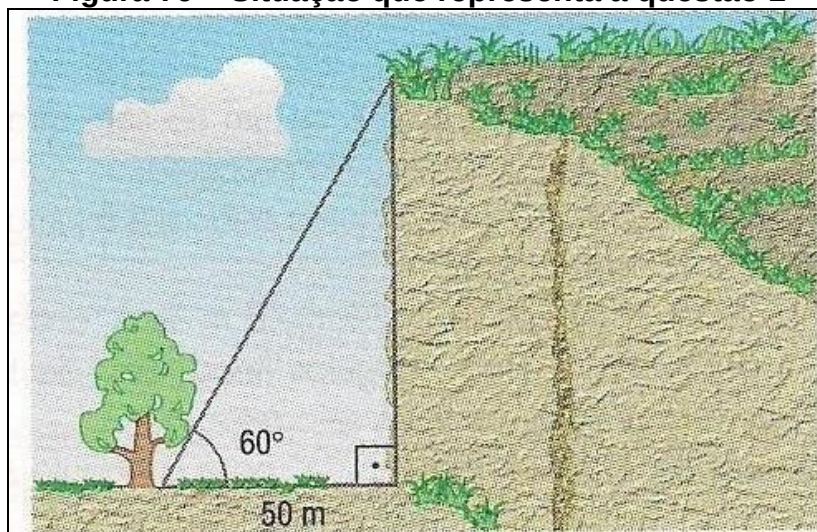
3.7.1.9 Oitavo encontro

3.7.1.9.1 Retornando à sala de aula

Ao voltarmos à rotina da sala de aula, foi de interesse dos pesquisadores fazer uma comparação de como os estudantes sobressairiam com relação a situações-problema da forma com que é apresentada nos livros didáticos no processo de construção do conhecimento sobre trigonometria no triângulo retângulo. Para tanto, propomos aos estudantes algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e do livro didático “Matemática – contexto e aplicação” – Dante (2011), e fizemos uma discussão sobre o desenvolvimento desta aula, que apresentamos a seguir.

QUESTÃO 1 (DANTE): O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50 m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 60° como mostrado na Figura 79. Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta?

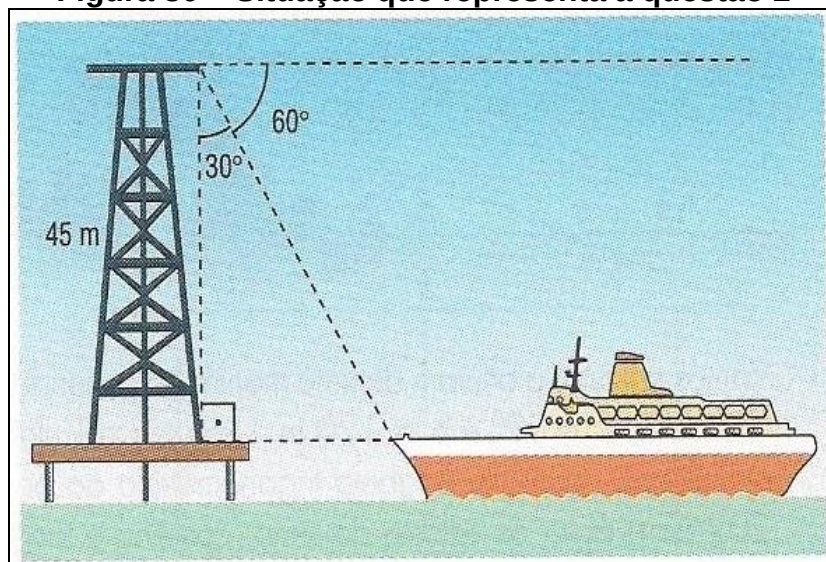
Figura 79 – Situação que representa a questão 1



Fonte: DANTE, 2011

QUESTÃO 2 (DANTE): Do alto de uma torre de uma plataforma marítima de petróleo de 45 m de altura, o ângulo de depressão em relação à proa de um barco é de 60° como mostra a Figura 80. A que distância o barco está da plataforma?

Figura 80 – Situação que representa a questão 2

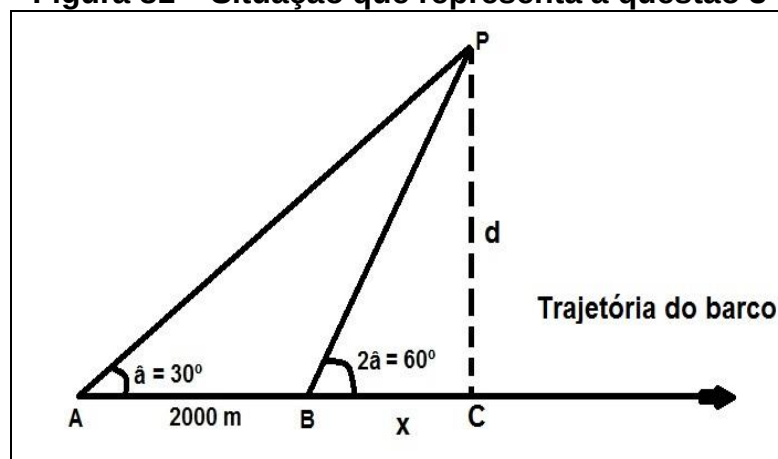


Fonte: DANTE, 2011

QUESTÃO 3 (ENEM): Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto **A**, mediu ângulo visual $\hat{a}$ fazendo mira em um ponto fixo **P** da praia. Mantendo o barco no mesmo

sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual $2\hat{a}$, como mostra a figura 81. Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\hat{a} = 30^\circ$ e ao chegar ao ponto B , verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2.000 \text{ m}$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, qual a menor distância do barco até o ponto fixo P ?

Figura 81 – Situação que representa a questão 3



Fonte: Elaborado pelos autores

DISCUSSÃO:

Os pesquisadores perceberam que os estudantes apresentaram dificuldades ao interpretar situações-problema desse tipo. Não conseguiram manifestar argumentos coerentes quanto às situações propostas. Percebemos neles as evidências discutidas durante o trabalho de aplicação, ou seja, souberam fazer referências a ângulos nas situações, conseguiram identificar as medidas acessíveis, conseguiram concluir que em algum momento apareceria um triângulo retângulo como representação matemática, mas, sobretudo, não conseguiram encaixar as ideias das situações e esquematizar a representação matemática.

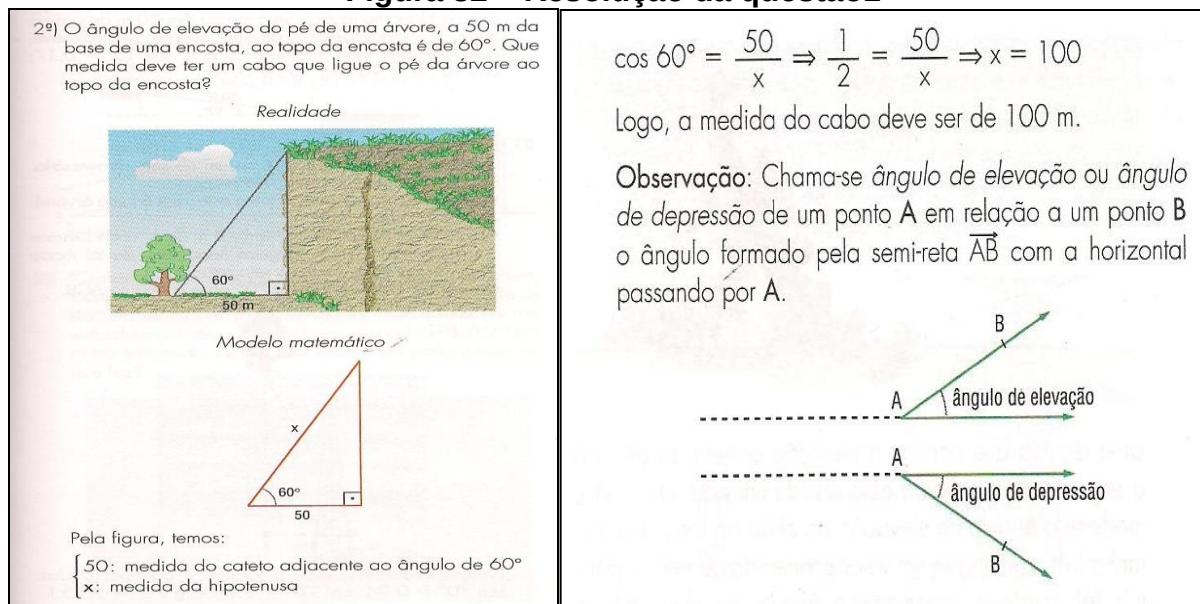
Os problemas discutidos durante a aplicação no espaço físico da escola foram tratados com base em perguntas simples por mais que necessitassem de alternativas complexas, como por exemplo, calcular a altura de uma árvore e a distância entre dois pontos quaisquer. Talvez o emaranhado de informações ou expressões que fogem ao cotidiano dos estudantes tenha influenciado para tal fato.

Na questão 1 o autor trata da elevação do pé de uma árvore, da base de uma encosta e de uma cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta. Na questão 2 ele aborda expressões como a plataforma marítima de petróleo e o ângulo de depressão em relação á proa de um barco. Já na questão 3 por mais que as informações não estivessem tão distantes das discutidas durante os encontros, o grau de dificuldade de interpretação com que a formularam acreditamos ter possibilitado uma incompreensão de seus fatores, como por exemplo, supor um ângulo $\hat{a}$ e ao final atribuir um valor para tal ângulo e evidenciar a menor distância. Contudo, foi necessária uma intervenção total nas três situações até que se chegasse à sua representação matemática, o que os possibilitou concluí-la. Apresentamos as resoluções das questões na forma em que foram sugeridas pelo autor (questão 1 e 2) e pelos pesquisadores (questão 3).

RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1 (DANTE)

Figura 82 – Resolução da questão1



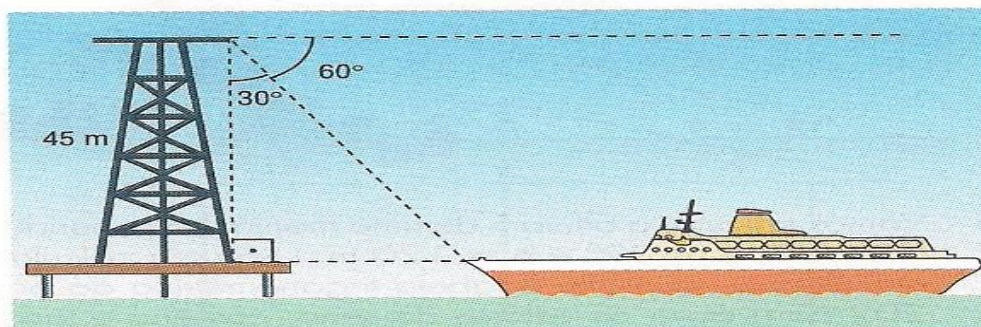
Fonte: DANTE, 2011

QUESTÃO 2 (DANTE)

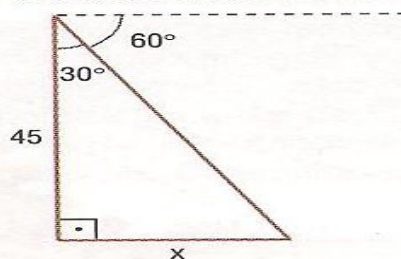
Figura 83 – Resolução da questão 2

3ª) Do alto da torre de uma plataforma marítima de petróleo, de 45 m de altura, o ângulo de depressão em relação à proa de um barco é de 60° . A que distância o barco está da plataforma?

Realidade



Modelo matemático



Pela figura, temos:

$\begin{cases} 45: \text{ medida do cateto adjacente ao ângulo de } 30^\circ \\ x: \text{ medida do cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ \end{cases}$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{45} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{45} \Rightarrow x = \frac{45\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 15\sqrt{3} \approx 15(1,73) \approx 25,95 \text{ m}$$

Portanto, o barco está a aproximadamente 25,95 m da plataforma.

Fonte: DANTE, 2011

QUESTÃO 3 (PESQUISADORES)

Com base na Figura 81 que mostra a representação matemática da situação é possível levantar algumas informações importantes que nos possibilita a resolução da questão proposta.

A primeira pergunta a se fazer é: qual dos segmentos do triângulo será a menor distância: AB, PB, d ou x?

A primeira que podemos descartar é a medida x, já que ela não representa uma distância com relação ao barco. O fato então seria questionar o porquê da existência da variável x. Certamente ela será utilizada para algum cálculo. Por outro lado, podemos descartar também as distâncias AB e PB já que elas representam a hipotenusa de um triângulo e a hipotenusa nunca será a menor medida de um triângulo retângulo. Neste caso, a menor distância se refere à medida **d**, cujo valor é calculado a seguir.

Do $\triangle BPC$ segue que:

$$\tan 60^\circ = \frac{d}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{d}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = d \Rightarrow \boxed{x = \frac{d}{\sqrt{3}}} \quad (I)$$

Do $\triangle APC$ segue que:

$$\tan 30^\circ = \frac{d}{2000 + x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{2000 + x} \Rightarrow 2000\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 3d \Rightarrow$$

$$\boxed{= \frac{3d - 2000\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} \quad (II)$$

Fazendo $I = II$ temos que,

$$\frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{3d - 2000\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow d = 3d - 2000\sqrt{3} \Rightarrow -2d = -2000\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{d = 1000\sqrt{3} \text{ m}}$$

3.7.1.10 Nono Encontro

3.7.1.10.1 Avaliação quantitativa

Discutido o contexto de situações problema enfatizadas nos livros didáticos, o próximo interesse dos pesquisadores foi de avaliar sistemicamente os estudantes envolvidos na pesquisa por meio de uma avaliação quantitativa envolvendo os conceitos fundamentais da trigonometria no triângulo retângulo, inclusive algumas situações problema. A avaliação perpassou por questões abertas e fechadas. No que se referiu às questões abertas, o objetivo foi possibilitar aos estudantes expor suas ideias e conjecturas com relação ao conteúdo estudado e extrair conclusões apropriadas para as questões. Diante disso, as questões fechadas tiveram por objetivo confrontar as informações delineadas pelos estudantes nas questões abertas, para uma análise posterior do aprendizado técnico e expositivo do conteúdo. A avaliação na forma com que foi aplicada aos estudantes é apresentada a seguir.

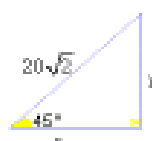
Figura 84 – Avaliação quantitativa

Avaliação Quantitativa

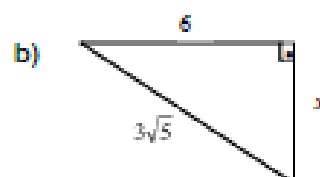
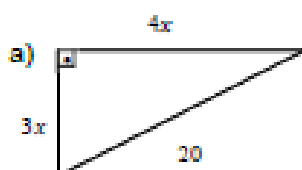
Assunto: Trigonometria no triângulo retângulo

Nome: _____

- Desenvolva uma situação problema, envolvendo as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de arcos notáveis e não notáveis no triângulo retângulo. Crie um plano de trabalho, argumente sobre suas decisões e dê conclusões apropriadas para a questão.
- Explique:
 - O que é um triângulo retângulo e fale sobre suas características.
 - Quando dois triângulos são semelhantes.
- Enuncie o Teorema de Pitágoras válido em todo triângulo retângulo.
- Das alternativas apresentadas com relação ao triângulo abaixo, apenas uma é Falsa. Podemos concluir que a alternativa Falsa é:

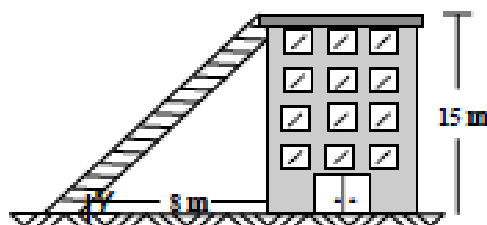


- $x = y$
 - $x^2 + y^2 = 800$ é a relação de Pitágoras deste triângulo
 - O triângulo é retângulo
 - $\frac{x}{y} = 1$
 - A tangente 45° é $\frac{x}{20\sqrt{2}}$
- Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor de x nos triângulos retângulos:



6. A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. Se y é a medida dos ângulos agudos deste triângulo, calcule:

- O comprimento da escada
- A tangente do ângulo Y
- O Seno do ângulo Y
- O cosseno do ângulo Y



7. Quando o ângulo de elevação do sol é de 65° , a sombra de um edifício mede 18 m. Calcule a altura do edifício. Considere ($\sin 65^\circ = 0,9063$, $\cos 65^\circ = 0,4226$ e $\tan 65^\circ = 2,1445$).
8. Um foguete é lançado sob um ângulo de 30° . A que altura se encontra depois de percorrer 12 km em linha reta?
9. Todas as alternativas abaixo estão corretas, Exceto:
- Todo triângulo equilátero é isósceles
 - Existe triângulo retângulo e isósceles
 - Existe triângulo isósceles obtusângulo
 - Um triângulo escaleno pode ser isósceles

10. No triângulo abaixo, calcule:

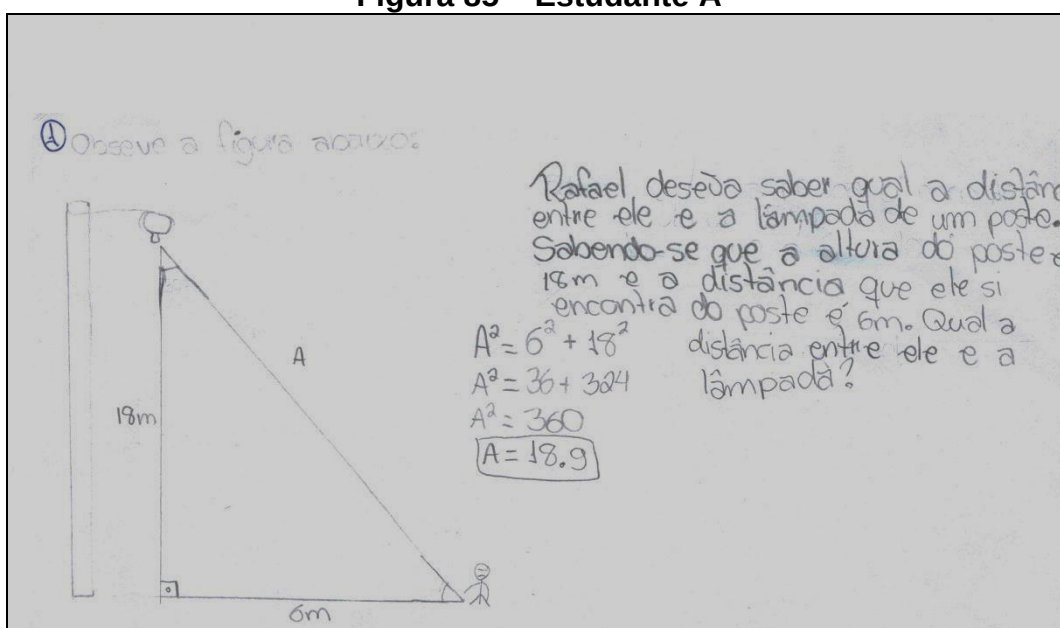


- Seno de $\hat{A}$
- Cosseno de $\hat{A}$
- Tangente de $\hat{A}$
- Seno de $\hat{O}$
- Cosseno de $\hat{O}$
- Tangente de $\hat{O}$

11. Um balão atmosférico caiu em São João Evangelista. Na data do ocorrido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60° ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, e o avistou sob um ângulo de 30° . Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

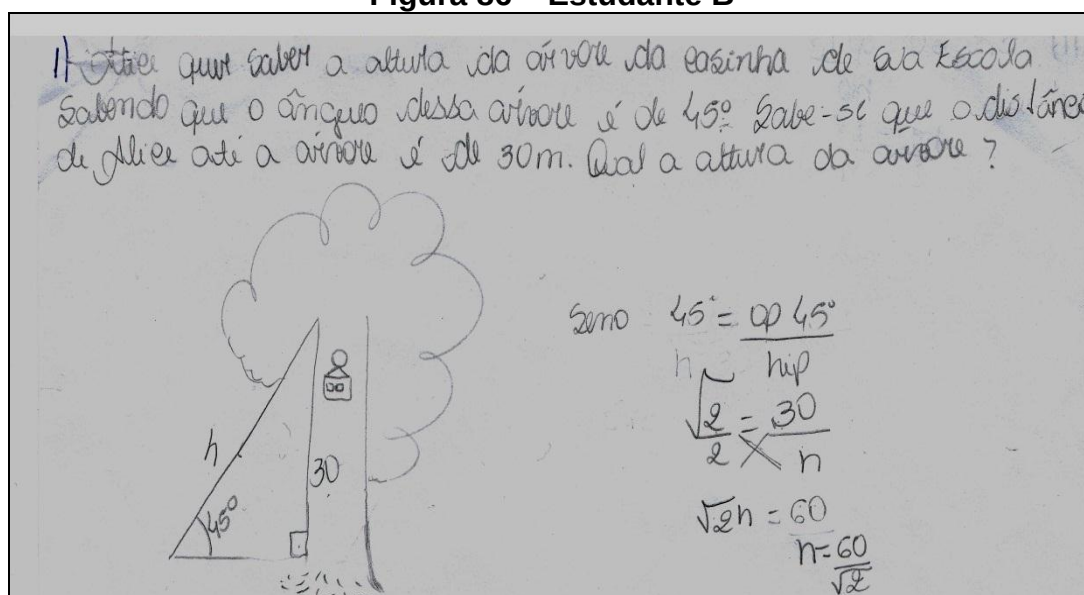
Após a resolução da avaliação proposta aos estudantes, fez-se uma análise do desempenho geral sobre cada questão abordada. Com relação à questão de número 1, por se tratar de uma exposição de ideias sobre situações-problema envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo, apresentamos a seguir as ideias de alguns estudantes quanto à questão, e desenvolvemos uma discussão acerca das soluções apresentadas por eles. Para as questões de 2 a 11 apresentamos no Apêndice A deste trabalho os dados quantitativos das soluções apresentadas pelos estudantes.

Figura 85 – Estudante A



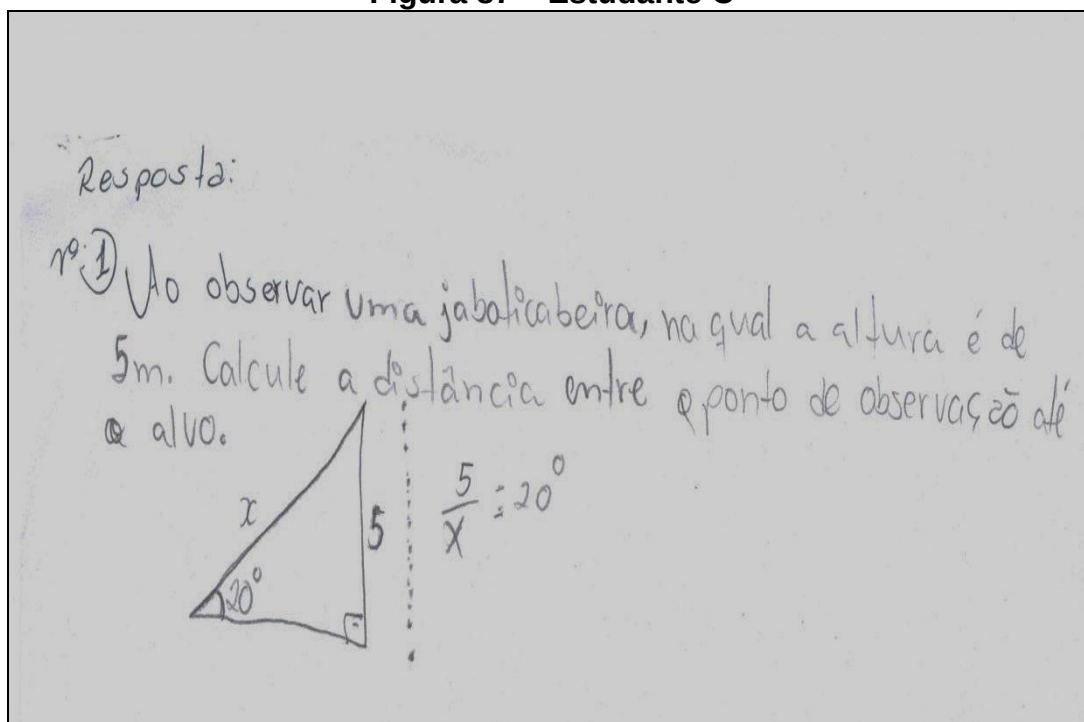
Fonte: Foto dos autores

Figura 86 – Estudante B



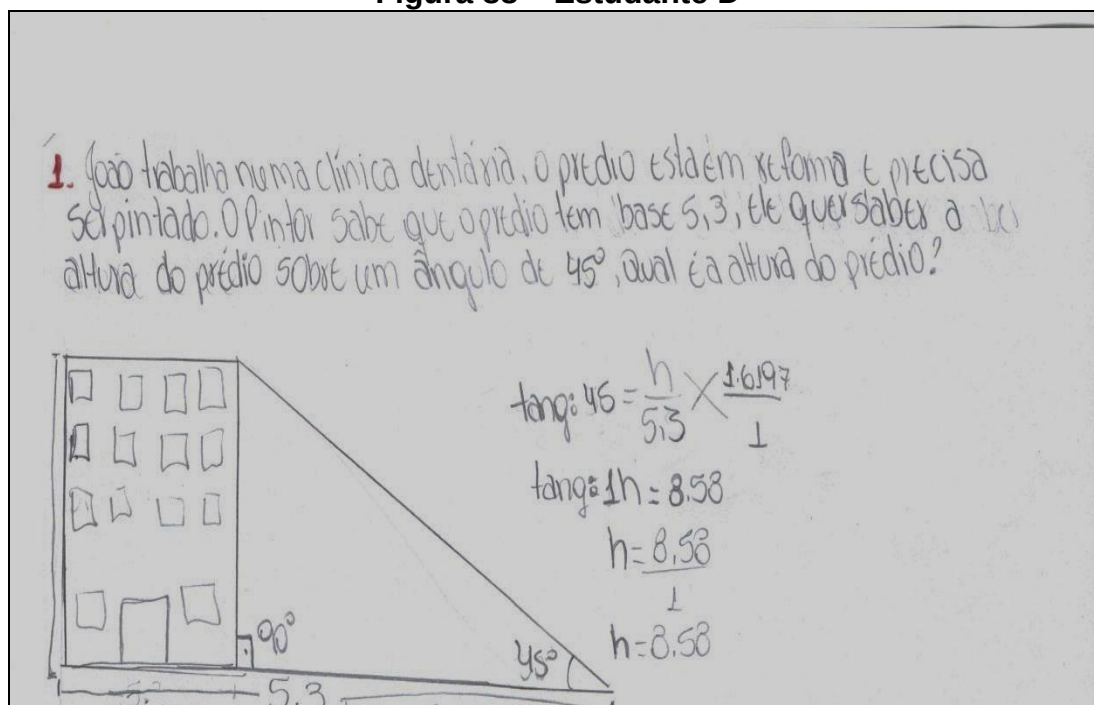
Fonte: Foto dos autores

Figura 87 – Estudante C



Fonte: Foto dos autores

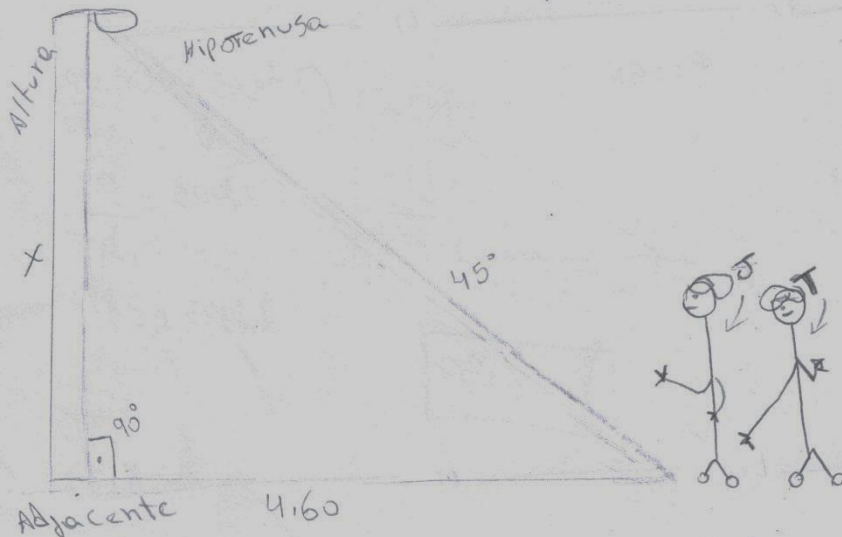
Figura 88 – Estudante D



Fonte: Foto dos autores

Figura 89 – Estudante E

1. Andando na Rua de Casa, Jefferson e Tiago tentam descobrir a altura de um poste. Sendo que na mão eles só tem um teodolito. Sem a trena eles não conseguirão medir a altura do poste, sem a utilidade de uma escada. A medida de onde eles estão a altura do poste mede 4,60 cm. usando o teodolito sobre 4,60 cm de distância no chão formaram um triângulo retângulo de 90° ao lado da Hipotenusa 45° . Qual é a medida do poste?



A altura do poste é igual a base que é 4,60m.

$$\text{tg} = 45 \cdot \frac{h}{4,60} \times \frac{1}{1}$$

$$h = 1$$

$$A = 4,60$$

$$\text{Sen} = \frac{\text{cat.op}}{\text{Hip.}}$$

$$\text{Tg}(x) = \frac{\text{cat.op}}{\text{cat.ad.}}$$

$$\text{Cos}(x) = \frac{\text{cat.ad.}}{\text{Hip.}} \quad \text{L} \rightarrow$$

No contexto geral das soluções apresentadas, percebemos a compreensão dos estudantes com relação a situações em matemática que envolvam diretamente a exposição de ideias. Nelas, ficaram claros os mecanismos necessários para alternativas em problemas de trigonometria no triângulo retângulo. A maioria das evidências trabalhadas com eles durante a aplicação da pesquisa foi possível perceber nas soluções apresentadas. Conseguiram estruturar a questão no contexto em que foi solicitada, envolveram relações entre ângulos e medidas acessíveis e inacessíveis, representaram matematicamente a questão e de certo, a contextualização se seguiu com a familiaridade desses estudantes com questões que os envolvam diretamente.

No que se refere às razões trigonométricas no triângulo retângulo, foi possível perceber diferentes abordagens. Alguns evidenciaram dados correlatos ao cálculo da tangente onde as medidas se relacionavam entre os catetos do triângulo. Outros decidiram por trabalhar a razão seno, relacionando cateto e hipotenusa. Na situação da lâmpada (FIG.85), por mais que a estudante envolvesse os dois catetos do triângulo ela não atribuiu uma das medidas como inacessível e sim decidindo por trabalhar com a terceira variável levando o algoritmo da questão para o teorema de Pitágoras, onde concluiu com sucesso a questão. Outro fato interessante analisado pelos pesquisadores foi com relação à situação da árvore (FIG. 86). Nesta solução é evidente que por mais que a estudante tenha representado corretamente sua situação numa linguagem matemática, ela não conseguiu relacionar corretamente as medidas pretendidas com os lados do triângulo. Isso possibilitou um equívoco no momento da identificação da razão trigonométrica correta com relação à situação gerada. Ao invés de se trabalhar com a razão tangente, a interpretação da estudante possibilitou a existência da razão seno. Já na situação da jabuticabeira, (FIG. 87) o estudante conseguiu delinear a estrutura matemática da questão, o que o levaria ao cálculo fazendo uso da razão seno, porém não indicou na situação qual o ângulo que utilizaria na questão e nem conseguiu algebrizar corretamente após atribuir uma inclinação de 20° .

No entanto, as soluções apresentadas mostram uma compreensão satisfatória no envolvimento dos estudantes na construção do conhecimento matemático envolvendo situações sobre trigonometria no triângulo retângulo.

3.7.1.11 Décimo encontro

3.7.1.11.1 Situação da sombra

Após desenvolvido todo o processo de construção do conhecimento sobre trigonometria no triângulo retângulo com abordagens às razões trigonométricas, foi de interesse dos pesquisadores voltar à questão do cálculo da altura da árvore (situação 1) para verificar tal altura pelo princípio de semelhança de triângulo como feito pelo matemático Tales de Mileto (600 a.C.), no cálculo de medidas inacessíveis através da projeção da sombra do objeto de interesse. Voltamos ao espaço físico da escola e os estudantes mediram o tamanho da sombra projetada pela árvore, onde obtiveram 28 m como medida da sombra.

Figura 90 – Situação da sombra



Fonte: Foto dos autores

Após medirem e anotarem o tamanho da sombra projetada pela árvore foi solicitado pelos pesquisadores que medissem o tamanho da sombra projetada por um deles ou um dos pesquisadores. A altura do estudante utilizado como referência foi de 1,82 m e a sombra projetada pela altura dessa pessoa foi 2,2 m. Explicamos novamente o procedimento desenvolvido pelo matemático Tales de Mileto ao buscar estimar a altura de uma pirâmide, ou seja, a relação direta existente entre a razão da medida da altura da pirâmide pela altura do objeto escolhido e a razão entre a projeção da sombra da pirâmide e da sombra do objeto escolhido. E solicitamos que estimassem a altura da árvore, relacionando as grandezas dessa situação. Contudo, desenvolveram o algebrismo da proporção gerada e estimaram a altura aproximada da árvore.

$$\frac{\text{medida da altura da árvore}}{\text{medida da altura da pessoa}} = \frac{\text{medida da sombra projetada pela árvore}}{\text{medida da sombra projetada pela pessoa}}$$

$$\frac{h}{1,82} = \frac{28}{2,2}$$

$$2,2h = 1,82 \times 28$$

$$h = \frac{50,96}{2,2}$$

$$\boxed{h = 23,16 \text{ m}}$$

3.7.1.11.2 Avaliação qualitativa

Esta avaliação buscou considerar as opiniões dos estudantes com relação ao trabalho desenvolvido junto aos pesquisadores, um momento onde tiveram a oportunidade de expor suas ideias com relação a uma dinâmica de trabalho na e além da sala de aula. As abordagens perpassaram desde o estudo do conteúdo na forma em que se seguiu até as considerações sobre o impacto do trabalho na vida escolar dos estudantes. Apresentamos no Apêndice B deste trabalho as considerações de alguns estudantes quanto ao processo de construção do

conhecimento de trigonometria no triângulo retângulo e as possíveis contribuições do espaço físico da escola.

Com as considerações dos estudantes sobre a dinâmica do trabalho finalizamos a parte voltada a aplicação do projeto e buscamos nas considerações finais evidenciar uma discussão sobre os condicionantes envolvidos nesta etapa do trabalho.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Há tempos estudiosos sobre teorias da aprendizagem vêm discutindo sobre o tema, construindo argumentos e propondo ações que viabilizem a efetivação de um ensino que conduza professores e estudantes a um processo de ensino-aprendizagem reflexivo, investigativo e construtivo de maneira que os significados sejam alcançados.

A experiência apresentada neste trabalho abordou a utilização do espaço físico escolar no tratamento dado à trigonometria no triângulo retângulo aliado a atividades investigativas, aulas planejadas, distribuição adequada do tempo, revisão e reelaboração das propostas e utilização de ferramentas auxiliares. As primeiras análises da pesquisa apontaram no sentido de contribuir para que o processo de cognição da trigonometria no triângulo retângulo na e além da sala de aula se desenvolva de maneira significativa e construa uma base mais sólida com potencial para futuras construções em matemáticas.

O tratamento dado à trigonometria no triângulo retângulo deve buscar a relevância dos conceitos trigonométricos na vida do estudante de maneira que a percepção ocorra através de um processo endógeno. Dessa maneira, o estudante terá condições de se questionar e encontrar respostas sobre o porquê estudar a trigonometria fazendo com que o tratamento dado ao conteúdo seja fator determinante na construção do conhecimento.

Os gráficos 02 e 03 apresentados na aplicação da pesquisa trouxeram quantitativamente as respostas dos estudantes com relação à importância do estudo da matemática. As informações obtidas pela análise desses gráficos apontaram que 83% dos estudantes consideraram importante o estudo da disciplina e 58% associam tal importância às questões do dia a dia constatando-se a relevância da ligação entre conteúdos e práticas do cotidiano.

A trigonometria no triângulo retângulo tornou-se objeto de estudo durante a abordagem proposta, uma vez que os caminhos que foram percorridos para que alcançasse a compreensão do assunto específico passaram a ser parte da aprendizagem. Pretendemos mostrar, pela análise dos resultados, que o tratamento

dado durante a busca específica de determinado conteúdo se torna tão importante quanto o próprio conteúdo. Dessa forma, o percurso deve ser planejado, pois, a orientação que o tornará relevante e conhecido àqueles envolvidos no processo investigativo.

O tratamento da trigonometria no triângulo retângulo por um prisma que mostre a necessidade e a relevância do desenvolvimento de tais métodos ou estratégias possibilita que a via de mão dupla existente entre estudante e docente, estudante e ciência se torne uma via com “trânsito intenso”, construindo em cada sujeito envolvido por esse processo a base necessária para a compreensão da trigonometria no triângulo retângulo.

A estratégia de abordagem pelo viés da investigação é fundamental para a construção da visão pesquisadora tornando-se importante tanto para o profissional que exerce a docência quanto para os estudantes. Os gráficos 05 e 06 trazem os dados relativos à utilização da matemática. Na análise constatou-se que 83% afirmam utilizar a matemática em situações como: escola, casa, cozinha e jogos e 67% acreditam utilizar a matemática em situações do dia a dia. Com isso a ligação entre os conteúdos formais e o cotidiano se mostra indispensável para o processo ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo tornando possível sua constante evolução.

O subsídio para a formação de sujeitos pesquisadores se dá por meio de situações investigativas e desafiadoras. Essa formação deve ser fomentada e subsidiada desde a Educação Básica. Quando consideramos o desenvolvimento da visão pesquisadora ou pelo menos condições propícias para tal, percebemos que no decorrer da Educação Básica tais situações são incomuns, justamente por que o distanciamento entre escola e as práticas diárias é claramente detectado. Podemos considerar tal aspecto, como uma deficiência trazida da Educação Básica para a vida profissional ou para a continuidade da vida acadêmica. Esse aspecto limita tal competência para muitos estudantes brasileiros da escola pública, gerando uma disritmia entre a Educação Básica e a vida profissional daqueles que ingressam na vida laboral durante a Educação Básica ou logo após o término dessa fase da vida escolar. Esse descompasso também é visto no Ensino Superior, pois a capacidade de investigar é competência essencial na continuidade dos estudos.

Paralelo a este fato o docente que não investiga também limita sua capacidade de rever, reavaliar e mudar, ou seja, transformar suas práticas profissionais. Esse aspecto parece-nos direcionar no sentido da fomentação e permanência da mesma prática docente de muitos professores e professoras das escolas brasileiras, pois, se eu não visualizo minhas práticas profissionais pelo prisma da visão crítica e pesquisadora, dificilmente visualizarei as falhas e consequentemente a evolução profissional estará fadada à mesmice.

Dando continuidade a nossa investigação, tanto do ponto de vista como pesquisa científica quanto às próprias atividades enquanto momento de estudo formal foi necessário rever nossa proposta inicial de aplicação, principalmente quanto ao tempo destinado a cada etapa do processo. A necessidade de revisão das estratégias, do conteúdo que se pretende abordar e por onde começar em tal conteúdo é uma característica que o docente precisa assumir para si. Visualizar criticamente os próprios métodos, práticas pedagógicas, estratégias de ensino adotadas é ser pesquisador de si mesmo e assumir essa postura é buscar o constante aprimoramento profissional.

Buscando construir um paralelo entre as ideias apresentadas na introdução deste trabalho e os resultados obtidos ao concluirmos o mesmo é possível evidenciar aspectos importantes que se desencadeou durante o processo ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, tendo como aporte o espaço físico da escola. Dentre eles destacam-se:

- A amplitude que o processo ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo adquire, quando se faz uma abordagem que envolva os estudantes na busca de conceitos já formalizados ou ainda informais, por meio das atividades investigativas aliadas à utilização do espaço escolar.

Relativo a esse aspecto, o discurso de uma estudante aponta nessa direção: “... *foi muito bom estudar matemática dessa maneira, ontem minha mãe precisava medir uma parede no banheiro e eu a ajudei!*”. Inicialmente, pensamos que ela tivesse utilizado alguma relação trigonométrica para encontrar determinada medida ou um conceito matemático específico para auxiliar a mãe. Então a estudante completa: “... *eu nunca tinha utilizado uma fita métrica antes, depois dessas aulas eu pude ajudar*”

minha mãe medir a parede...” Embora seja algo trivial na vida de muitos, aquela estudante nunca tivera contato direto com uma trena, denominada por ela como “fita métrica”. Apesar de a utilização da trena estar no planejamento das aulas, não tínhamos pensado que o uso daquele instrumento fosse inédito para algum estudante.

- A satisfação estampada no rosto de cada discente durante as aulas nas quais eles foram os construtores e pesquisadores, transformando-se em sujeitos ativos. Tal aspecto mostra ao estudante sua importância e fomenta a autoestima de cada sujeito envolvido o que favorece o desencadeamento do processo de crescimento do potencial de aprendizagem do estudante, pois, o interesse é fator determinante para o sucesso na aprendizagem. A fala de um estudante na avaliação qualitativa traduz esse fato, “... *eu gostei também de fazer o estudo fora de sala que a gente aprende com mais facilidade e com mais vontade.*”.

Isso pode ser evidenciado pelos dados apontados no gráfico 10 deste trabalho que mostrou que 75% dos estudantes acreditam que a aproximação dos conteúdos a situações do dia a dia tornaria o estudo mais prazeroso. O interesse mostrado pelos estudantes durante as atividades demonstra que o ato de querer é determinante para o êxito. Além das situações de aplicabilidade os estudantes perceberam a relevância dos meios que precisavam descobrir e posteriormente tomar as decisões cabíveis.

Outro ponto interessante identificado diz respeito à importância que os estudantes passaram a dar com relação a ir à escola. Tornar o ensino mais envolvente pode proporcionar que os estudantes reconheçam o papel que a escola pode desempenhar na vida do sujeito. Este fato pode ratificar o interesse de uma estudante em participar dos encontros posteriores: discordou da mãe, quando essa pediu para a filha não ir à escola, para cuidar dos irmãos menores, fazendo com que a estudante encontrasse uma maneira de contornar o problema familiar para participar das aulas. Verifica-se algo considerado muitas vezes raro, identificar nos estudantes interesse em participar das aulas, sobretudo de matemática.

A significação de conceitos trigonométricos conhecidos e formalizados foi outro fator analisado. Na resolução da questão 2 uma estudante menciona que sempre se confundia sobre os catetos e que naquele momento havia compreendido por que seria o cateto oposto: “... *ah! cateto oposto é porque ele é oposto daqui de onde eu olho*”. Essa análise mostra que atividades investigativas propiciam situações que instigam o estudante ao questionamento, transformando a compreensão por meio das visualizações concretas. Mais precisamente, estávamos sob uma árvore do pátio da escola e indagamos sobre a altura daquela árvore e como poderíamos chegar a conhecê-la (a altura). Várias opções foram apontadas, tais como: subir na árvore com a trena e medi-la, construir um andaime em volta da árvore e medir sua altura, obter um bambu que fosse maior ou equivalente à altura da árvore. Então uma aluna disse: “... e se utilizarmos a sombra da árvore para conhecer sua altura?”.

A fala mencionada no item anterior, com relação à utilização da trena, também aponta na direção do distanciamento entre o ensino formal escolar e a relevância e aplicabilidade do mesmo na vida dos estudantes. O que estamos ensinando? Para que estamos ensinando? O que estamos estudando? Para que estamos estudando? São questionamentos que em outro momento são merecedores de investigações e com um aprofundamento maior.

- A superficialidade significativa dos conteúdos matemáticos trazidos pelos estudantes.

Conceitos da geometria plana como diagonal, ponto médio e vértice foram entraves por ainda não serem conhecidos de maneira significativa. Necessariamente precisaram ser conceituados e significados para dar continuidade às aulas previstas. Esse fato ficou explícito no quarto encontro no momento da construção do teodolito caseiro. Os gráficos 11 e 12 apontaram na direção dessa superficialidade, pois, a décima primeira pergunta do questionário buscou saber se o estudante já tinha algum conhecimento relativo à trigonometria: 71% fizeram ligação entre a trigonometria e medidas desconhecidas. Ao perguntarmos sobre a utilização da trigonometria 50% não souberam responder. Os gráficos 13 e 15 também apontaram nesta direção: apesar de 75% afirmarem que já ouviram ou estudaram sobre trigonometria, 50% não souberam o que é um triângulo retângulo.

As representações matemáticas das situações propostas pelos pesquisadores e escolhidas pelos estudantes e o manuseio de instrumentos alternativos é detectado no trabalho como um aspecto que facilita a compreensão, a visualização e o entendimento das situações-problemas, o que contribuiu para a compreensão dos conceitos envolvidos e subsidiou o entendimento da trigonometria no triângulo retângulo. Embora a estratégia de ensino proposta no trabalho não trate diretamente da utilização de jogos e materiais concretos no início do tratamento dado aos conceitos trigonométricos, o uso do espaço, objetos do ambiente escolar, aulas dinâmicas e investigativas propiciam aos estudantes a translação entre aquilo que é abstrato para o concreto e útil no dia a dia. Rasgar o véu que torna a matemática para muitos, obscura e longe do cotidiano é talvez o passo inicial da longa jornada que é a construção de conceitos matemáticos úteis para aqueles que os buscam.

Ao fazermos uma análise referente à evolução da Trigonometria, claramente percebemos que tal processo de evolução invariavelmente se deu nos primórdios da humanidade, em decorrência das necessidades sociais do ser humano de facilitar determinado trabalho ou explicar fenômenos do cotidiano. Para isso, o homem elaborou estratégias, modelos matemáticos, representações matemáticas, símbolos que lhes auxiliaram para executar determinado trabalho ou explicar um fenômeno específico. Já na contemporaneidade ocorre a evolução da Trigonometria em duas vertentes. A primeira com menor intensidade assemelha-se à evolução citada anteriormente. A segunda e no nosso entendimento numa intensidade maior, é aquela evolução de aprimoramento daquilo que já foi descoberto, e traçando um paralelo entre a trigonometria escolar e a trigonometria como ciência.

Evidenciamos que os atuais sistemas de ensino que prevalecem nas escolas públicas brasileiras aniquilam o prazer da descoberta, mostram a trigonometria simplesmente como ciência e com isso alimenta o sentimento daqueles estudantes que já trazem consigo uma resistência à matemática. Esta resistência deriva exatamente das abordagens da matemática vivenciadas por tais estudantes nos anos anteriores. O tratamento dado por um ângulo que afirma que a matemática é algo pronto e acabado, de imediato distancia tal conceito da possível ligação entre a relevância do conteúdo para a vida e importância da compreensão.

De acordo com Mendes (2009, p. 123) “o conhecimento tem seu processo de construção ocasionado a partir da organização sistemática das nossas experiências,

observações, interações sociais e investigações realizadas no contexto da sociedade e da cultura [...]”. Com isso, momentos que propiciem as representações matemáticas, construção de símbolos, elaboração de perguntas, diálogos acerca de determinado assunto contribuem para a construção da compreensão da trigonometria no triângulo retângulo.

De certa forma, acreditamos que o processo conseguiu desencadear um avanço significativo na compreensão dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo, o que apontamos anteriormente como fatores tratados superficialmente ao estudar matemática. A avaliação quantitativa realizada após as atividades propostas para o tratamento da trigonometria no triângulo retângulo apontam estes novos avanços. A primeira questão solicitou que os estudantes criassem uma situação-problema e a solucionassem. Destacamos algumas delas na aplicação deste trabalho com o escaneamento de algumas dessas situações criadas. Mas vale salientar que 90% dos sujeitos envolvidos na pesquisa criaram a própria situação problema e a resolveram. Nas demais questões os resultados foram os seguintes: 65% dos estudantes souberam dizer o que é um triângulo retângulo, 65% souberam dizer quando dois triângulos são semelhantes e 75% enunciaram corretamente o Teorema de Pitágoras. Na pergunta 4, 50% reconheceram a alternativa incorreta. Na pergunta 5, 55% determinaram as medidas desconhecidas nos triângulos retângulos utilizando o Teorema de Pitágoras. Na situação problema da questão 6, 55% dos estudantes determinaram as razões trigonométricas corretamente. Nas questões 7 e 8, metade dos estudantes solucionaram corretamente as questões. Na situação da questão 9, 50% dos estudantes determinaram corretamente qual era a opção falsa. A questão dez foi corretamente solucionada por 75% dos estudantes. A última questão foi proposta com o intuito de verificar qual seria a atitude dos estudantes frente a uma situação-problema mais desafiadora. Pela maior complexidade da questão e tempo insuficiente, apenas 15% dos estudantes solucionaram parcialmente a questão, os 85% restante não opinaram.

Ao final da avaliação quantitativa, concluímos que o tempo disponibilizado para essa etapa da pesquisa foi insuficiente. Os estudantes apresentaram uma discrepância considerável em relação ao tempo necessário para solucionar as questões. O aproveitamento quantitativo foi muito bom quando comparamos com os registros escolares de matemática da escola. Isso foi observado pois, ao analisarmos o

aproveitamento daqueles estudantes que normalmente demonstram desinteresse pelas aulas e nas aulas, esses apresentam desempenhos quantitativos insatisfatórios nos registros escolares. Os números mostram um crescimento considerável no aproveitamento desses estudantes, quando comparamos com os números da avaliação da pesquisa com os registros escolares. Os resultados positivos na avaliação quantitativa tem relação direta com os relatos dos estudantes na avaliação qualitativa mostrados na aplicação deste trabalho, pois as falas dos estudantes apontam na direção do maior interesse pelas aulas de matemática e um estreitamento das relações com a própria matemática.

De maneira geral, as aulas sobre trigonometria no triângulo retângulo além da sala de aula pode desencadear um processo mais dinâmico com relação às notadas no ensino tradicional. Foi possível identificar nos levantamentos apontados anteriormente nessas considerações, manifestações em diferentes aspectos na estrutura desencadeada para uma aula de matemática. Abordamos o eficaz desenvolvimento do ensino do conteúdo aliado a fenômenos reais, as importantes considerações dos estudantes quanto ao estudo da matemática e a forma do seu tratamento. Apontamos também o sujeito sob uma formação investigativa na construção do conhecimento sobre trigonometria no triângulo retângulo, o envolvimento e satisfação do sujeito no processo, o novo olhar do sujeito quanto à escola e a maneira com que os estudantes passaram a formalizar os conceitos matemáticos. Destacamos o papel da representação matemática em situações problema, a evolução do ensino sob a dinâmica aqui abordada, bem como os fatores que contribuíram para a compreensão da trigonometria no triângulo retângulo. Enfatizamos a realidade do sistema de ensino e o distanciamento existente entre escola e realidade, além de apontar pontos positivos identificados nas avaliações e considerar a reavaliação de alguns pontos no processo pelos pesquisadores.

Das ideias explanadas buscamos mostrar como uma aula de campo pode possibilitar um olhar diferenciado para a maneira de se aprender matemática, sobretudo trigonometria no triângulo retângulo. Mas o que deve ficar evidente é a compreensão da maneira de como o estudo fora de sala deve acontecer. Talvez o primeiro questionamento fosse com relação ao papel do professor no processo. O professor em constante envolvimento com a pesquisa pode possibilitar que o docente construa mecanismos favoráveis a sua prática. Assim, uma prática fora da

sala de aula não poderá distanciar a relação que o professor deve desempenhar com seus estudantes. Se na sala de aula o professor não se via envolvido no processo, em uma aula de campo tem o importante papel de mediar seus estudantes para a construção eficaz da aprendizagem.

Ao decidir fazer uso das estruturas físicas da escola caberia ao docente a seguinte pergunta: porque e para que utilizar o espaço físico escolar nas aulas de trigonometria? Assim deverá identificar as possíveis contribuições de tais estruturas como auxílio em suas aulas, não desconsiderando o importante papel das teorias sobre o assunto, tratadas na sala de aula. Uma vez que encontrados dificuldades em subsidiar as aulas de trigonometria no triângulo retângulo pela falta de recursos disponibilizados nas escolas públicas de Educação Básica, caberia uma análise de alternativas de ensino que possam auxiliar no envolvimento do sujeito na ação.

Na aplicação desta pesquisa constatamos que o espaço físico escolar foi de fundamental importância no processo. Ele tornou-se o recurso de que necessitávamos para mostrar ao sujeito a aplicabilidade, utilidade e importância da trigonometria no cotidiano. Aliado à utilização de ferramentas alternativas passíveis de desenvolvimento dentro da escola, o espaço físico escolar tornou-se propício no ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo.

É claro que não podemos deixar de considerar a dificuldade com que aulas desse tipo aconteçam no sistema de ensino ao se pensar nesta proposta como integrante das práticas da sala de aula. As dificuldades com relação ao tempo de cada aula, do tempo planejado para o trato do conteúdo e as preocupações com relação às avaliações externas tais como PROVA BRASIL e SIMAVE. Ainda que se considere a amplitude do estudo aqui evidenciado devemos esclarecer que ao analisar a viabilidade do espaço físico da escola, no processo ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo como uma proposta de ensino na Educação Básica, não se configura puramente na dimensão que tomarão estas aulas. As alternativas que a própria escola pode proporcionar às aulas de matemática e o envolvimento dos estudantes no papel desempenhado pela disciplina fora da escola devem ser considerados.

Neste sentido, cabe ao professor saber o momento certo em que seus estudantes poderão ser direcionados para estas atividades de aplicação do conteúdo. A

significação dos conceitos estudados em sala talvez seja o ponto crucial a ser analisado pelo professor, ao considerar as dificuldades da amplitude de um trabalho como este.

De certa forma, as conjecturas levantadas pelos estudantes da escola Josefina Pimenta apresentadas nesta pesquisa, apontam para o favorecimento da utilização do espaço físico escolar no plano de ensino da trigonometria no triângulo retângulo. Aquilo que é trazido nos livros didáticos como situações-problema e que muitas vezes os estudantes apresentam dificuldades foi possível vivenciar na prática com o auxílio desse objeto de pesquisa. A compreensão satisfatória dos fundamentos da trigonometria no triângulo retângulo sem que distancie da teoria relativa ao conteúdo também foi observada.

Portanto, a utilização de atividades investigativas no ambiente escolar, como as que aqui estão descritas e analisadas, são contributivas para a consolidação do ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo, aliada à decisão do professor em utilizar tais estratégias em suas aulas de modo a propiciar a investigação, a pesquisa pelo prisma do estudante da Educação Básica, a pesquisa pelo olhar do professor atuante, a construção de conceitos e os questionamentos pertinentes, sendo também viáveis economicamente para a escola, podendo ainda fazer nascer pesquisas locais com características endêmicas.

No entanto, esperamos que esta seja uma fundamentação plausível relativa ao tema pesquisado, capaz de apresentar à comunidade acadêmica a viabilidade e eficiência na abordagem da trigonometria no triângulo retângulo, por meio da utilização do espaço físico escolar.

REFERÊNCIAS

AVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral**. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BECHARA, Evanildo. **Dicionário da língua portuguesa**. Evanildo Bechara / Evanildo Bechara. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2011.

BOYER, Carl B. **História da matemática** (tradução de Elza F. Gomide) - 2ª ed.- São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Explorando o ensino da Matemática**: artigos: volume 1 / seleção e organização Ana Catarina P. Hellmeister... [et al.]; organização geral Suely Druck. – Brasília, 2004. 240 p. Disponível em: <<http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos/download/598.pdf>>

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN - **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2000, 2007. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em 20 abr. 2013.

CALCULADORA CIENTÍFICA Casio FX-82MS Cód. 1478 Casio. Distecinfo, 2013. Disponível em: <http://www.distecinfo.com.br/uploads/produto/790_g.jpg> Acesso em: 20 de setembro de 2013.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **A história da trigonometria** In: CARMO, M.P.; MORGADO, A.C.; WAGNER, E. **Trigonometria : Números Complexos**. SBM. 1992 . p.101 - 108.

CLASSIFICAÇÃO DOS triângulos – **Classificação dos triângulos quanto aos lados - Classificação dos triângulos quanto aos ângulos**. Colégio Web, 2012. Disponível em: <<http://www.colegioweb.com.br/trabalhos-escolares/matematica/triangulos/classificacao-dos-triangulos.html>> Acesso em: 20 de setembro de 2013.

COORDENADOR E estação ou teodolito total. Dreamstime, 2013. Disponível em: <<http://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-coordenador-e-estao-ou-teodolito-total-image31366444>> Acesso em: 20 de setembro de 2013.

COSTA, Marianna da Cunha Canova. **Freinet: suas contribuições ao processo de sensibilização ambiental, em especial a “Aula das Descobertas”** / Marianna da Cunha Canova Costa. – Curitiba, 2011. Disponível em:

<http://www.ppge.ufpr.br/teses/M11_Marianna%20da%20Cunha%20Canova%20Costa.pdf> Acesso em: 30 de setembro 2013.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan, 1932 - **Educação Matemática**: Da teoria à prática - Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexão sobre educação e matemática** – 5ª Ed. São Paulo, Summus Editorial, 1986.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Volume único. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Ática 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. V único, 3ª ed. Ática – São Paulo, 2011.

DICIONÁRIO ONLINE DE PORTUGUÊS. **Significado de Equidistante**, 2013. Disponível em: <<http://www.dicio.com.br/equidistante/>> Acesso em: 20 de setembro de 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** - tradução Hygino H. Domingues, 5ª Ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes médicas Sul, 1999.

FORTES, Adriana Wachtmann. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo: uma análise de erros no ensino médio**. Adriana Wachtmann Borges Fortes. Santa Maria, janeiro de 2012. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/13/Adriana_Borges_Fortes.pdf> Acesso em: 30 de setembro de 2013.

GONÇALVES, Paulo Gonçalo Farias. **Etnomatemática e resolução de problemas: da labor dos trabalhadores das indústrias de cerâmica do município de Russas - Ce ao desenvolvimento de uma experiência educacional**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM. Curitiba, PR. 2013. Disponível em: <http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/742_78_ID.pdf> Acesso em: 30 de setembro de 2013.

LIMA, Sandro da Silva. **Introdução à Geometria: Um novo enfoque de Ensino e Aprendizagem** - 79f. : il. color. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2013. Disponível em: <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/SandroSilva.pdf>>. Acesso em: 25 de setembro de 2013, 16 de jun. de 2013.

LOPES, Claudinéia Andrade. **Plano de aula: teorema de Pitágoras**. Caminhos da Leitura, 16 jun. 2013. Disponível em: <<http://caminhosdoleitor.blogspot.com.br/>>. Acesso em: 25 de setembro de 2013.

MACHADO, Nelson Moreno. **Triângulo retângulo com ângulos de 45°**. Wikimedia Commons, 27 set. 2006. Disponível em: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tri%C3%A2ngulo_ret%C3%A2ngulo_45_graus.PNG> Acesso em: 25 de setembro de 2013.

MEDEIROS, Marcos F. **Primeiras estimativas de tamanhos e distâncias em astronomia**. Astronomia e Universo, 30 jun. 2012. Disponível em: <http://astronomy-universo.blogspot.com.br/2012_06_01_archive.html>. Acesso em: 28 de setembro de 2013.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MINAS GERAIS – Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais – **Currículo Básico Comum de Matemática/ CBC**, 2007. Disponível em: <[http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7BC1C4797C-A5DE-44E3AB9A22A74A4F1877%7D_PDF%20%20CBC%20MATEMATICA%20EM%20\(2\).pdf](http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7BC1C4797C-A5DE-44E3AB9A22A74A4F1877%7D_PDF%20%20CBC%20MATEMATICA%20EM%20(2).pdf)> Acesso em: 30 de setembro de 2013.

MIRANDA, Daniela de. **Triângulo**. Brasil escola. Daniela de Miranda, 2013. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/matematica/triangulo.htm>> Acesso em: 20 de setembro de 2013

NUNES, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLEIMANN, Analucia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 2012.

ONUICHIC. Lourdes de La Rosa, ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Novas reflexões sobre o ensino – aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In BICUDO, M.A. V. (Org.). São Paulo: EDUNESP, 1999.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. (tradução Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro da, BROCARD, Joana, OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2ª ed.- Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

ROMBERG, Thomas A. **Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa**. Boletim de Educação Matemática, vol. 20, núm. 27, 2007. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Brasil. Tradução: Lourdes de la Rosa Onuchic4 e Maria Lúcia Boero. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221869007.pdf>> Acesso em: 10 de setembro de 2013.

ROSA, Rosana Camilo da. **Trigonometria e números complexos** : livro didático / Rosana Camilo da Rosa, Eliane Darella, Paulo Henrique Rufino ; design instrucional Karla Leonora Dahse Nunes. – 2ª. ed. rev. e atual. – Palhoça : UnisulVirtual, 2007. 326 p. Disponível em: <http://busca.unisul.br/pdf/88275_Rosana.pdf> Acesso em: 10 de setembro de 2013.

SANTOS, Leonardo Sousa dos. **Método de determinação de distância e azimute entre dois pontos**. Geopará, 29 jul. 2013. Disponível em: <<http://geopara.blogspot.com.br/2013/07/metodo-de-determinacao-de-distancia-e.html>> Acesso em: 25 de setembro de 2013.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Classificação de triângulos**. Mundo Educação, 2013. Disponível em: <<http://www.mundoeducacao.com/matematica/classificacao-triangulos.htm>>. Acesso em: 25 de setembro de 2013.

SPACEK, Iuri Kieslarck. **A relação entre atividade de ensino de matemática e a formação da individualidade discente**. / Iuri Kieslarck Spacek; orientador: Vidalcir Ortigara - 156 f.; 30 cm. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Ed. do Autor. Criciúma, 2012. Disponível em: <<http://repositorio.unesc.net/bitstream/handle/1/524/Iuri%20Kieslarck%20Spacek.pdf?sequence=1>> Acesso em: 15 de julho 2013.

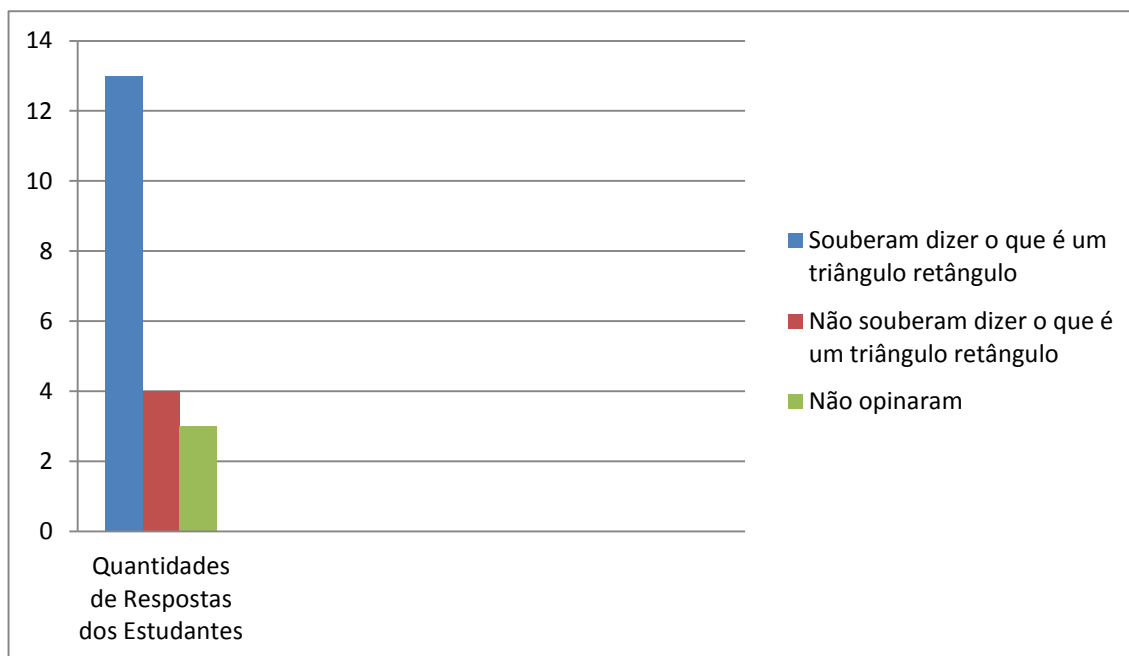
TONSIS, Mileide. **Tabela de Razões Trigonométricas**. Cantinho da Matemática. 2011. Disponível em: <<http://mileidestonsis.blogspot.com.br/2011/04/tabela-de-razoes-trigonometricas.html>> Acesso em: 20 de setembro 2013.

UAMAN HUANCA, Roger Ruben. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem- avaliação de matemática na e além da sala de aula** / Roger Ruben Huaman Huanca. – Rio Claro: [s.n.], 2006 247 f.: il., gráfs., fots. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Orientador: Lourdes de La Rosa Onuchic 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação matemática. 3. Trigonometria. 4. Ensino médio. I. Título. Disponível em: <http://www.luciofassarella.net/ensino/turmas/2012-2/instrumat/reffiles/tese_ensino-matematica_resolucao-problemas-no-processo-ensino.pdf> Acesso em: 30 de agosto de 2013.

APÊNDICE A – EXPOSIÇÃO QUANTITATIVA DAS SOLUÇÕES APRESENTADAS PARA AS QUESTÕES 2 A 11 DA AVALIAÇÃO QUANTITATIVA

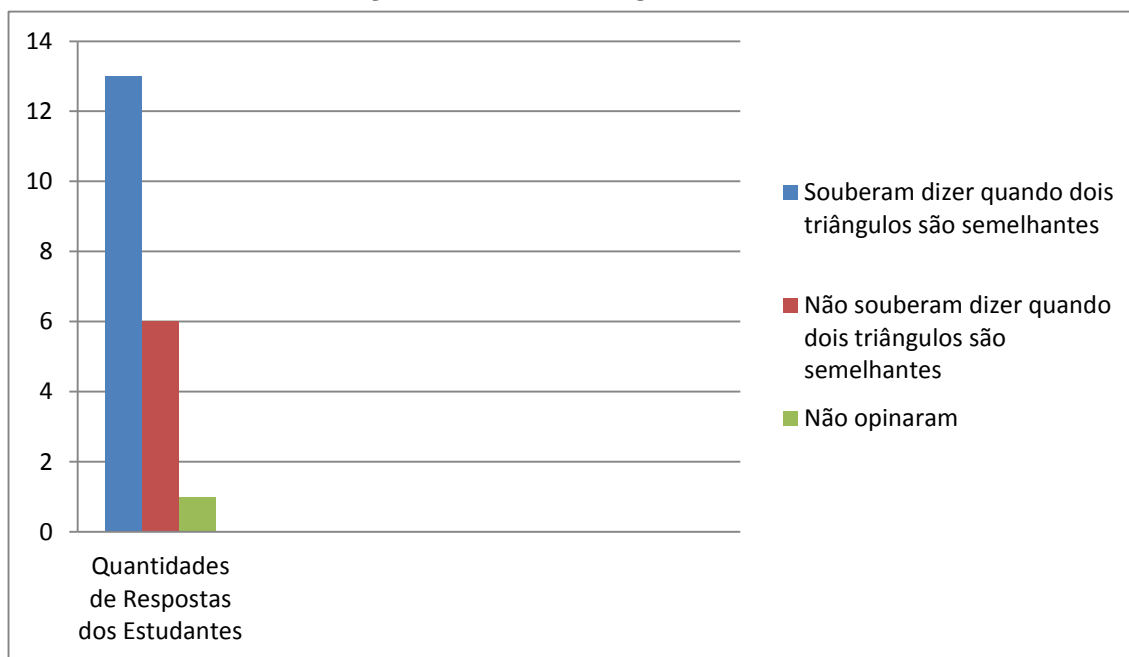
QUESTÃO 2

Gráfico 18 – O que é um triângulo retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

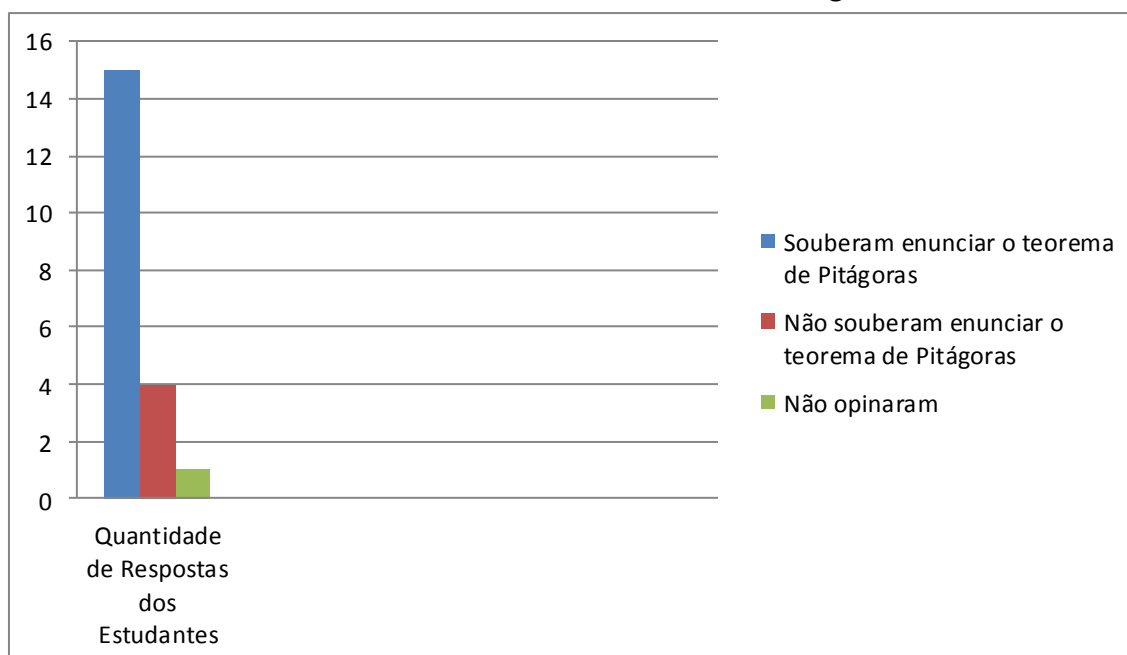
Gráfico 19 – Quando dois triângulos são semelhantes



Fonte: Dados da pesquisa

QUESTÃO 3

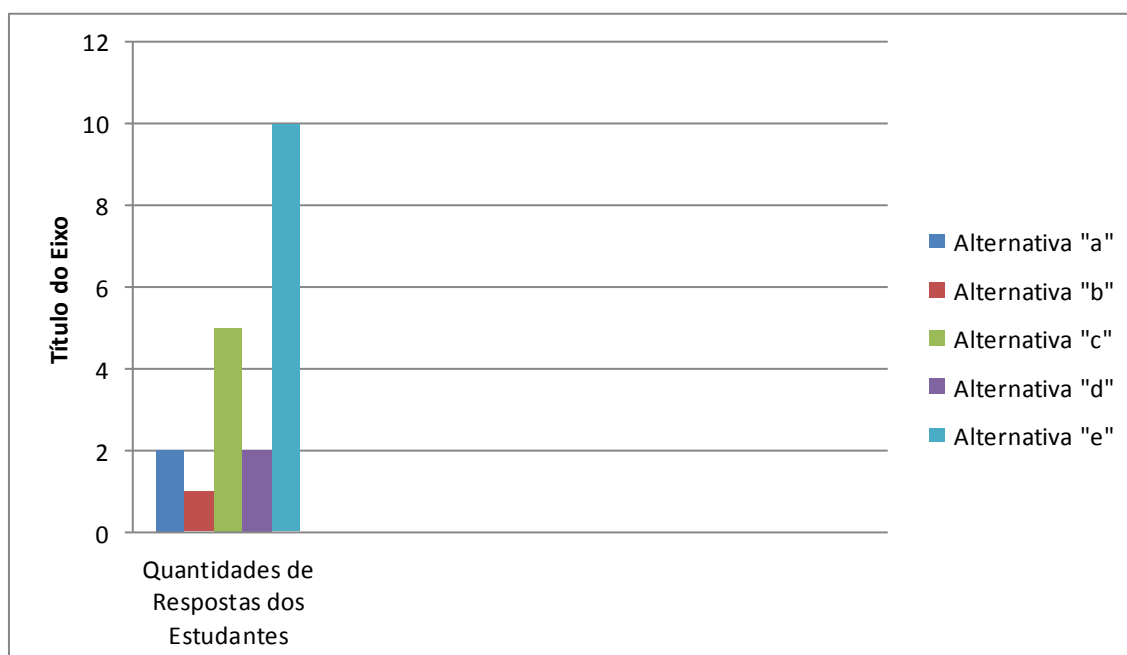
Gráfico 20 – Enuncie o teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa

QUESTÃO 4

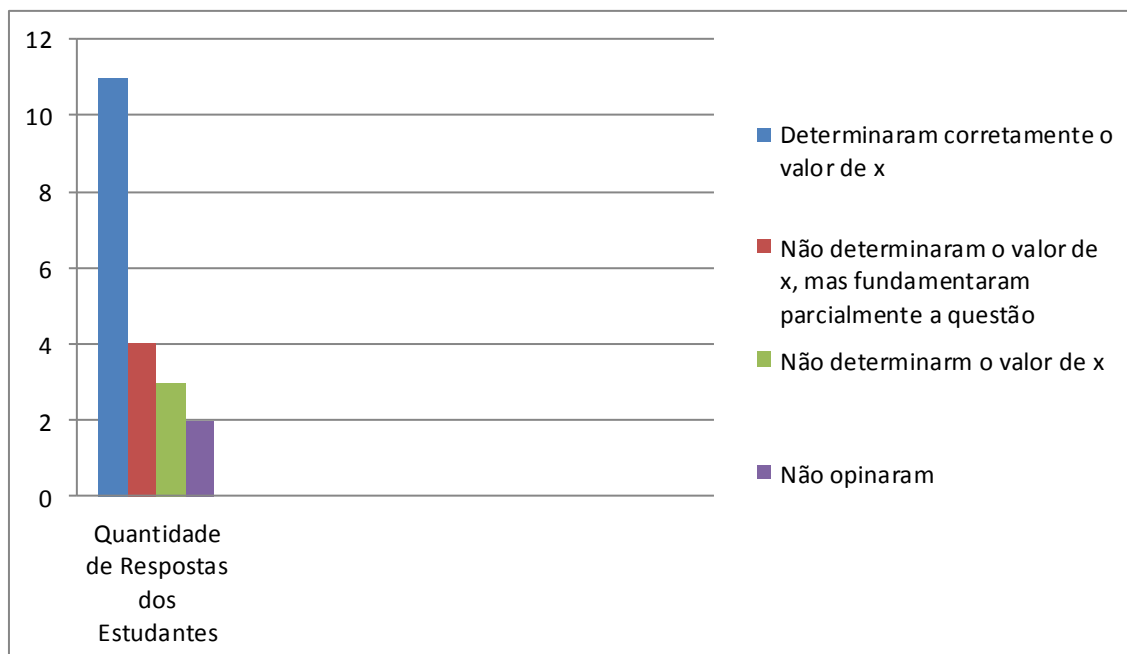
Gráfico 21 – Determinar a alternativa falsa



Fonte: Dados da pesquisa

QUESTÃO 5

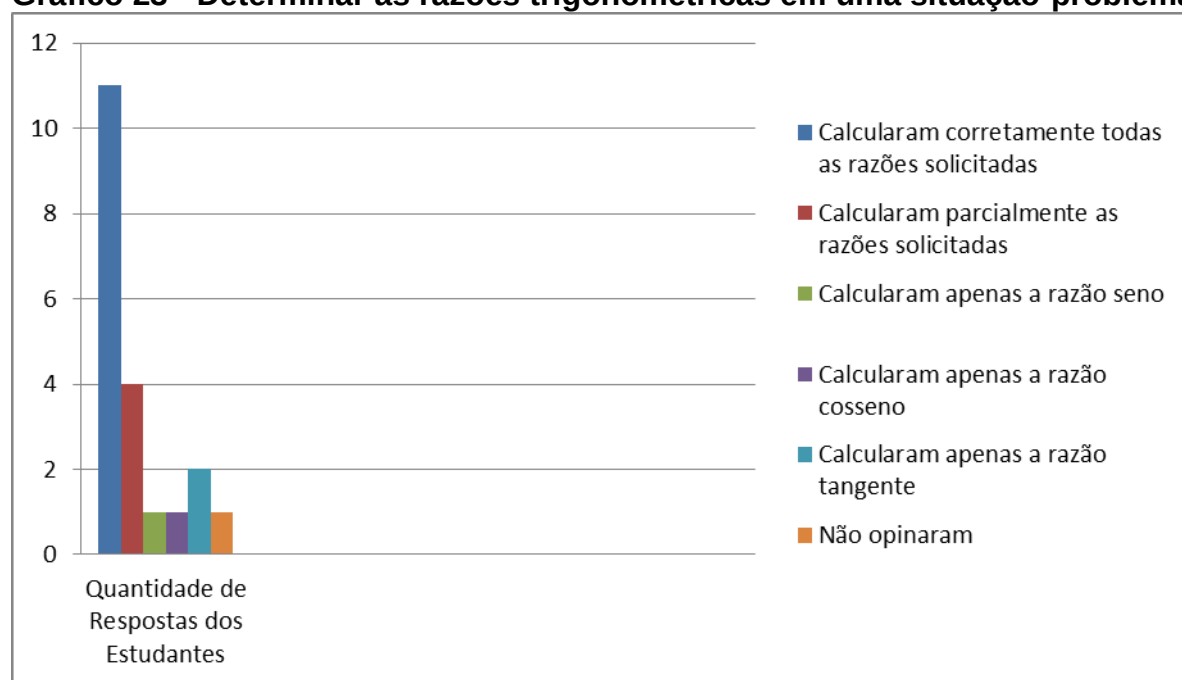
Gráfico 22 - Determinar o valor de x utilizando o teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa

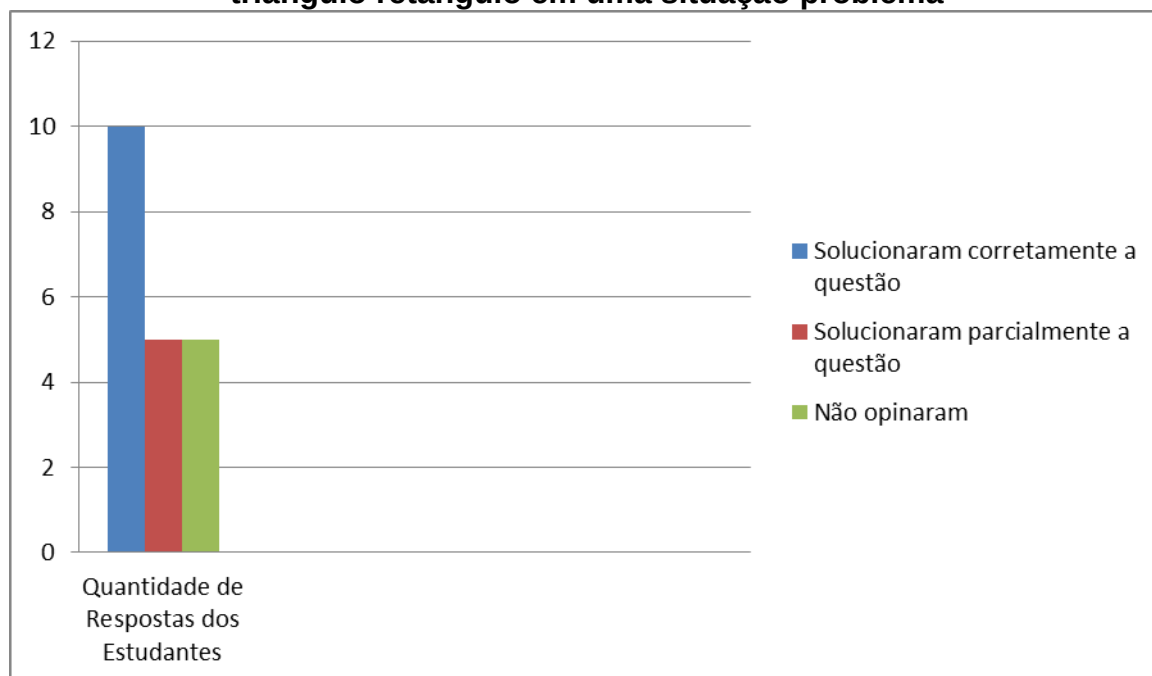
QUESTÃO 6

Gráfico 23 - Determinar as razões trigonométricas em uma situação-problema



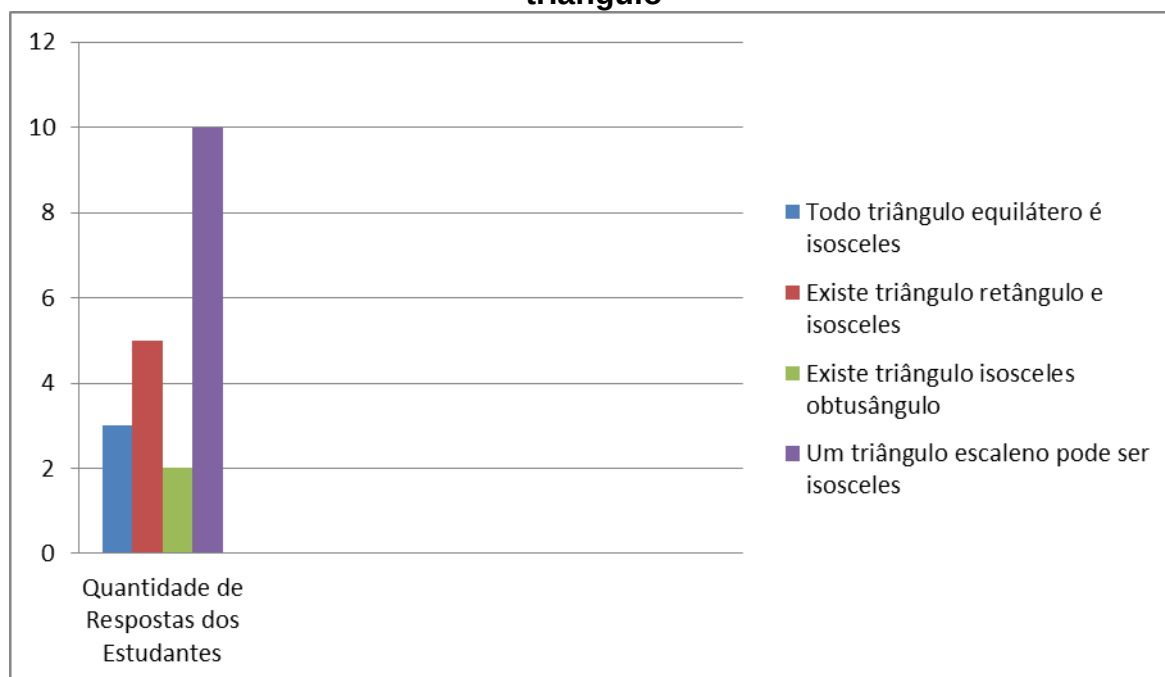
Fonte: Dados da pesquisa

QUESTÕES 7 e 8

Gráfico 24 - Estimar medida de altura utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo em uma situação problema

Fonte: Dados da pesquisa

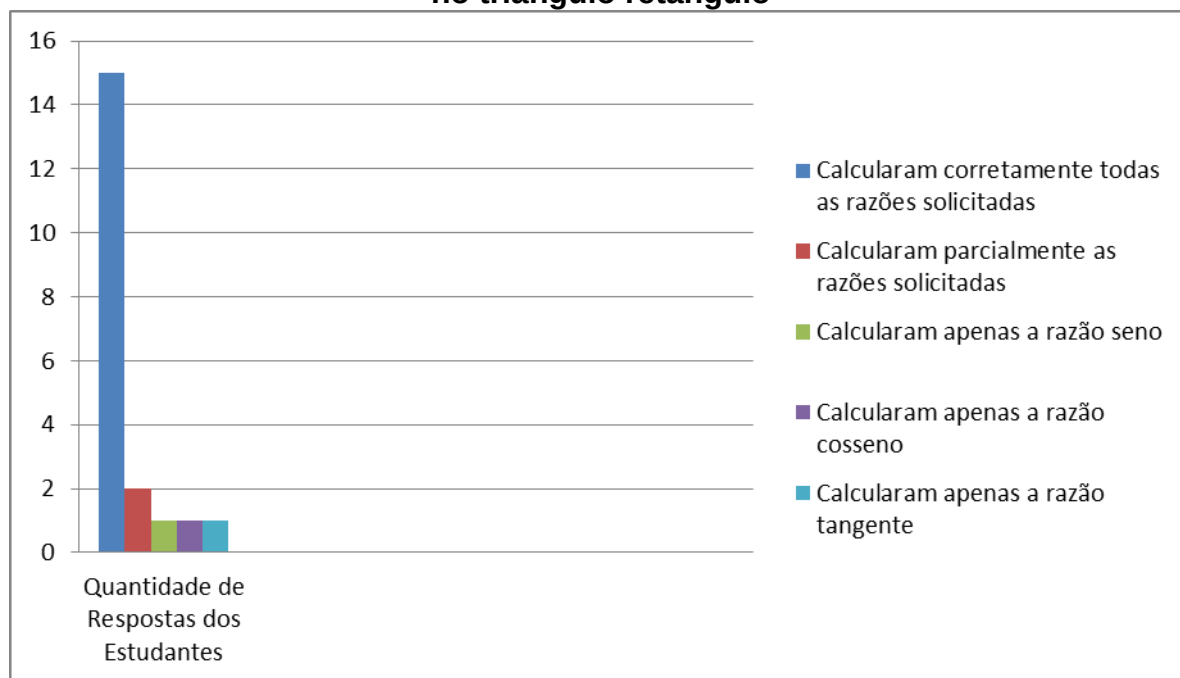
QUESTÃO 9

Gráfico 25 - Marcar a alternativa FALSA com relação à classificação de um triângulo

Fonte: Dados da pesquisa

QUESTÃO 10

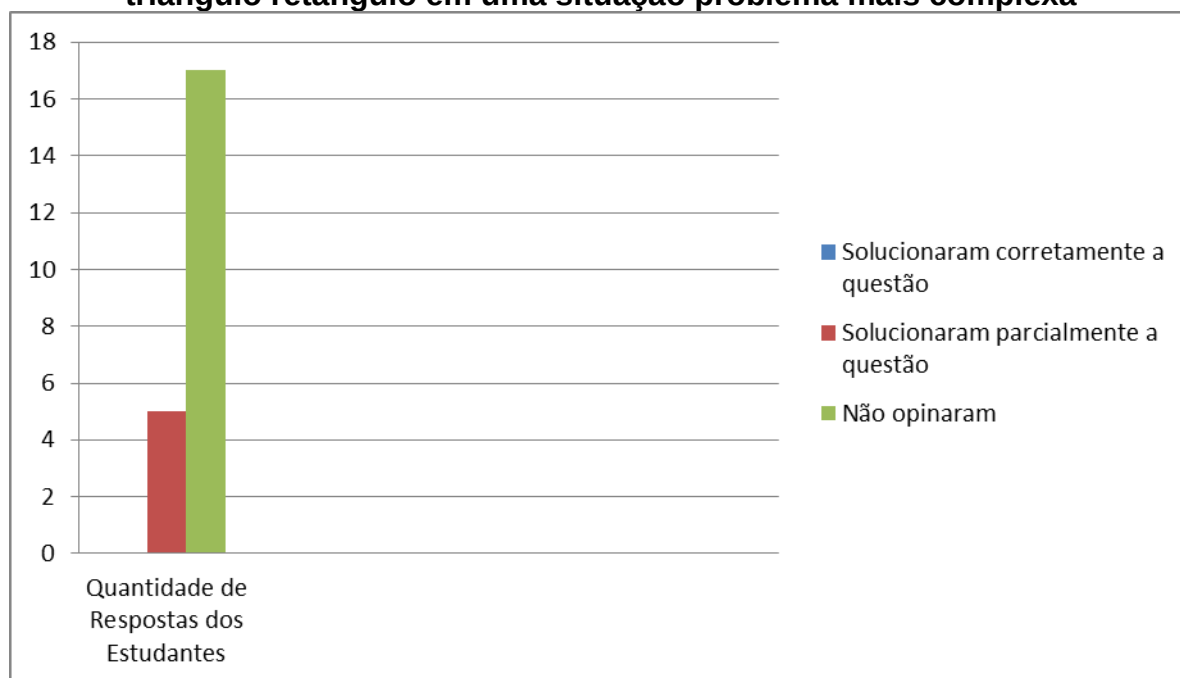
Gráfico 26 - Determinar as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

QUESTÃO 11

Gráfico 27 - Estimar medida de altura utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo em uma situação problema mais complexa



Fonte: Dados da pesquisa

APÊNDICE B – CONSIDERAÇÕES DOS ESTUDANTES SOBRE A DINÂMICA DE AULA UTILIZADA NESTA PESQUISA

Figura 91 – Estudante F

- A nova maneira que os professores de matemática utilizaram para nos ensinar. Foi muito boa e interessante, ~~nesto~~ neste período eu aprendi como fazer Trigonometria de uma ~~maneira~~ maneira muito legal e até mais fácil. Também aprendi a fazer fila métrica, a utilizar a calculadora científica... também achei muito legal a liberdade que temos com os professores, o diálogo etc.. Na minha opinião tinha que haver mais projetos como estes, fora de sala, porque para a sala agente muito melhor agente tem uma visão mais específica...

Fonte: Foto dos autores

Figura 92 – Estudante G

eu achei muito interessante essa pesquisa e me ajudou muito aprender a Matemática percebi que não precisa de multiplicação para aprender tudo sobre a matemática e sim tem como aprender a matemática pela lógica e pelo pensamento e eu gosto também de fazer o estudo fora de sala que a gente aprende com mais facilidade e com mais vontade. Eu achei interessante olhar o teodolito e eu também aprendo fazer conta na outra calculadora.

Fonte: Foto dos autores

Figura 93 – Estudante H

Nesses dias, úteis ~~que~~ ^{que} vamos proporcionando uma nova aventura matemática, um aprendizado diferente cheios de curiosidades. Uma aula prática, com o intuito de podermos levá-las para nossa vida social. O que aqui aprendemos nesses dias.

As vezes nos perguntamos, será que essas coisas irão ser de extrema importância para a vida? Muitas vezes não achamos a resposta que nos despeja a vontade de querer aprender sobre TRIGONOMETRIA.

Aprendemos aquilo que precisaremos usar em nossas vidas, as medições, por exemplo, iremos usá-las para medirmos alguma coisa que projetamos.

A observação que é também fundamental, nos trouxe o resultado de ângulos e nos proporcionou um resultado positivo. Com uma construção de meio, que chama-se Teodolito tivemos o sucesso.

Infim, tudo o que aconteceu é e será fundamental para nós, querendo ou não.

Fonte: Fotos de autores

Figura 94 – Estudante I

Não minha opinião háve uma grande diferença na aprendizagem dos alunos, ~~uns~~ alguns mostra muito interesse em aprender, outros ficam com umquinho de preguiça, mas no final todos aprendem.

Não verdade eu não gostava da matemática, mas com essa nova experiência que passei com o funnambol, aprendi a gostar da matemática pois vocês explicam muito bem.

É na maioria dos empregos hoje em dia precisa muito da matemática.

Essa experiência pra mim, trouxe de moral que nunca vi tarde para estar atrás dos nossos objetivos.

Um grande abraço a todos vocês

Romilda V. Bruno

Fonte: Foto dos autores

Figura 95 – Estudante J

Eu gostei muito dessa experiência vivida nesses dias pois com ela eu pude desenvolver algo que não tinha conhecimento. As aulas no espaço físico, no meu ponto de vista são mais produtivas que dentro de sala pois desenvolvemos a aprendizagem e nos divertimos ao mesmo tempo.

Deixo claro que gostei, acabo esse projeto pois dessa maneira as pessoas aprendem a matemática com mais facilidade e a partir disso começaram a desenvolver a matemática por gostar e não pela precisão.

Fonte: Foto dos autores

Figura 96 – Estudante K

A experiência de aprender trigonometria na prática é muito interessante ~~a experiência na sala de aula~~. A matemática é considerada um perfeito terror dentro das salas, mas fora delas e na prática ela se torna muito interessante, e o aprendizado se torna mais fácil; deveria ter entre o horário de aula, aulas práticas assim como foram essas.

Apreendi, fora da trigonometria a usar a calculadora científica, e a explicação é melhor, As dúvidas são todas esclarecidas. O diálogo entre aluno e professor se tornou muito mais fácil e melhor.

Fonte: Foto dos autores

Figura 97 – Estudante L

Eu gostei muito ~~na~~ produtivo para mim, aprendi muita coisa produtiva, nem sabia sobre hipotenusa, kateto, e muito mais. penso que poderia ser compartilhado nas salas de aulas ~~isso~~ que melhoraria o aprendizado em sala. ~~isso~~ que todos os alunos poderiam ter participado não gostava muito de matemática não sei que estão desenvolvendo bem. fim.

Fonte: Foto dos autores

Figura 98 – Estudante M

A ideia da aula ser fora da sala de aula, pra mim foi tipo magnífico, até o máximo porque? Penso assim, os alunos interagem mais ali não só com o professor, mas, também com a aula.

O projeto de aula aqui fora me garantiu que eu aprendi mais, para o meu futuro eu já planejava fazer engenharia civil, e com essas aulas me aproximei mais do curso. Ou seja Apaixonei por esta matéria.

Voltando ao assunto da trigonometria, eu nunca soube que existia o teodolito, com isso aprendemos mais uma fórmula de medir coisas inacessíveis.

Os triângulos retângulos também têm várias formas de medição.

Enfim — se eu pudesse já começava um curso de engenharia hoje mesmo.

E sem puxar saco nem nada, não é porque tive a oportunidade de estar aqui hoje que digo que gostei da matéria do projeto não.

Estou dizendo ~~que~~ de coração esses que estive com vocês aprendi muito e...

e... e... e... e... e... e...

So agradecer — obrigada???

Fonte: Foto dos autores

APÊNDICE C – TERMO DE COMPROMISSO INSTITUIÇÃO

Pesquisa: As contribuições do espaço físico escolar no processo ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de ensino na educação básica

TERMO DE AUTORIZAÇÃO E COMPROMISSO

Firmam o presente Termo de Autorização e Compromisso, para aplicações de questionários de sondagem sobre o ensino de Trigonometria com estudantes das 1^{as} séries do ensino médio da Escola Estadual “Josefina Pimenta”, referente à pesquisa supracitada, sob a responsabilidade dos pesquisadores Fernando Sanches Braga, Raquel Cordeiro Santos e Wgeverson Pascoal de Andrade, estudantes do 8º período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista.

Eu _____ Diretor(a) da Escola Estadual “Josefina Pimenta”, estou ciente desta pesquisa no âmbito desta instituição, assim autorizo a aplicação dos questionários.

Assim, por estarem cientes assinam o presente termo.

São João Evangelista, _____ de _____ de 2013

Diretor(a)/carimbo

Responsáveis pela execução da pesquisa/ Pesquisadores

APÊNDICE D – TERMO DE COMPROMISSO ESTUDANTES

Pesquisa: As contribuições do espaço físico escolar no processo ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de ensino na educação básica

TERMO DE AUTORIZAÇÃO E COMPROMISSO

Firmam o presente Termo de Autorização e Compromisso, para realização de atividades de pesquisas com estudantes das 1^{as} séries do ensino médio da Escola Estadual “Josefina Pimenta”, Pais ou Responsáveis, Professores e Direção da Escola, ficando estabelecido:

- 1) Eu, _____ estudante _____
_____ da turma _____, estou ciente que participarei das atividades da pesquisa proposta, comprometendo-me executá-la dentro dos padrões da ética e das boas relações humanas. Autorizo o uso e a divulgação acadêmica de fotográficas e/ou vídeos relativos à minha imagem.
- 2) Eu, _____ () Pai/Mãe ()
Responsável, autorizo meu/minha filho(a) ou responsável a participar das atividades propostas, denominada **“AS CONTRIBUIÇÕES DO ESPAÇO FÍSICO ESCOLAR NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UMA PROPOSTA DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA”**. Estou ciente da sua participação extra turno na Escola Estadual “Josefina Pimenta” no período de ____/____/____ a ____/____/____ das ____ (horas) às ____ (horas), bem como, autorizado para fins acadêmicos, o uso da imagem pessoal.
- 3) Nós, Fernando Sanches Braga, Raquel Cordeiro Santos e Wgeverson Pascoal de Andrade, estudantes 8º período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, nos comprometemos a realizar a pesquisa baseando-nos na ética e boas relações humanas. Comprometemos ainda, zelar pelas produções e imagens dos participantes.
- 4) Eu, _____, Professor de Matemática dos estudantes participantes desta pesquisa estou ciente e de acordo com a mesma.

- 5) Eu _____ Diretor(a) da Escola Estadual “Josefina Pimenta”, estou ciente desta pesquisa no âmbito desta instituição. Autorizo a utilização das dependências internas para os fins da mesma e de eventuais imagens e vídeos da estrutura física.

Assim, por estarem cientes assinam o presente termo.

São João Evangelista, _____ de _____ de 2013

Aluno (a)

Pais ou responsáveis

Diretor(a)/carimbo

Professor

Responsáveis pela execução da pesquisa/ Pesquisadores