INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS
CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA
DOUGLAS DE MIRANDA BARBOSA

A TORRE DE HANÓI E O ENSINO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

São João Evangelista
2013

Douglas de Miranda Barbosa

A TORRE DE HANÓI E O ENSINO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais *Campus* São João Evangelista, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Ma. Jossara Bazílio de Souza Bicalho

SÃO JOÃO EVANGELISTA - MG
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pelo Serviço Técnico da Biblioteca do
Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista

B238t BARBOSA, Douglas de Miranda , 1989-

A Torre de Hanói e o ensino do princípio de indução matemática na 3ª série do ensino médio./ Douglas de Miranda Barbosa. São João Evangelista, MG: IFMG - Campus São João Evangelista, 2013.
57 p.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC (graduação) apresentado ao Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista – IFMG, Curso de Licenciatura em Matemática, 2013.
Orientadora: Prof. Ma. Jossara Bazílio de Souza Bicalho

1. Torre de Hanói. 2. Matemática. 3. Ensino e Aprendizagem. 4. Ensino Médio. I. Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista. Curso de Licenciatura em Matemática. II. Título.

CDD 510

A TORRE DE HANÓI E O ENSINO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de **Licenciado em Matemática** à Banca Examinadora do Instituto Federal de Minas Gerais - *Campus* São João Evangelista.

Aprovada em 05 / 11 / 2013

BANCA EXAMINADORA

Jossara Bazílio de Souza Bicalho
Profª. Ma. Jossara Bazílio de Souza Bicalho
Instituição: IFMG – *Campus* São João Evangelista

Amilton F. da Silva Jr.
Prof. Me. Amilton Ferreira da Silva Junior
Instituição: IFMG – *Campus* São João Evangelista

Silvino Domingos Neto
Prof. Esp. Silvino Domingos Neto
Instituição: IFMG – *Campus* São João Evangelista

DEDICATÓRIA

Ao meu pai Walter Barbosa, por estar sempre ao meu lado me apoiando e incentivando em todos os momentos de minha vida, sobretudo na minha formação acadêmica, dando o melhor de si para o sucesso de minha carreira profissional.

À minha mãe Maria Tomaz, por demonstrar carinho e afeto indispensáveis para a persistência em busca de meus objetivos, por estar ao meu lado dando-me sabedoria para tomada de decisões em minha vida.

À Gelle Kédima, por participar desta etapa de minha vida através da compreensão, respeito e atenção quando necessitei, me reanimando sempre em busca de novos desafios e me auxiliando para superar as dificuldades em meu caminho.

Aos meus irmãos e amigos, por sempre acreditarem em meu potencial e caminharem ao meu lado quando necessitei ser ouvido e incentivado. Obrigado por me acompanharem e dividirem comigo as vitórias e angústias ao longo da minha vida.

AGRADECIMENTO

A Deus, por me proporcionar a concretização desta vitória.

À professora Ma. Jossara Bazílio Bicalho pela competência e esforço contínuo em me orientar ao longo da realização desta pesquisa. Agradeço pelos ensinamentos ao longo do meu curso de graduação em Licenciatura em Matemática nesta Instituição.

À equipe de professores do Curso de Licenciatura em Matemática, que tanto agregaram à minha carreira enquanto profissional educador.

Ao Coordenador José Fernandes pelo empenho e dedicação investidos ao longo desses 4 anos em nosso Curso. Também agradeço pelo incentivo durante o desenvolvimento da pesquisa.

Aos servidores do IFMG – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista, desde a direção, professores, servidores técnico-administrativos, entre outros, por compartilharem comigo experiências, dicas e conhecimentos imprescindíveis à minha formação.

Aos colegas de Licenciatura em Matemática, por dividirem comigo alegrias, angústias e vitórias ao longo do curso de graduação.

Aos alunos da turma I3B, do Curso Técnico em Manutenção e Suporte em Informática Integrado ao Ensino Médio do IFMG – SJE, pelo empenho em colaborar com as aplicações para o êxito de minha pesquisa.

RESUMO

Este trabalho descreve uma investigação desenvolvida com o objetivo de analisar as contribuições do Jogo Torre de Hanói no estudo de Indução Matemática para alunos do Ensino Médio. O Princípio de Indução Finita nesse nível de ensino é tratado como uma forma de propiciar aos estudantes uma noção de infinito em Matemática. Como aporte teórico tomou-se como base as abordagens didáticas de Abramo Hefez e Luiz Roberto Dante. Estes autores foram considerados relevantes nesta pesquisa por serem os únicos encontrados com textos didáticos para estudo desta disciplina na educação básica. Investigou-se a motivação dos estudantes em resolver o jogo e o raciocínio desenvolvido por eles ao buscar uma expressão matemática que determinasse a quantidade mínima de movimentos necessários para transferência das peças conforme a variação do número de discos disponíveis. A partir do desenvolvimento destas expressões por parte dos estudantes procedeu-se ao estudo de Indução Matemática com o intuito de verificar a validade das mesmas. A pesquisa foi desenvolvida sob a perspectiva de metodologia qualitativa e aplicada a estudantes da 3ª série do Curso Técnico em Manutenção e Suporte em Informática do IFMG – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista. Ao final dos trabalhos, foram transcritas as observações do pesquisador e as considerações dos participantes da pesquisa sobre a utilização de material concreto no ensino de Matemática, mais especificamente sobre Indução Matemática, também conhecida como Princípio de Indução Finita (P.I.F.). A pesquisa atingiu seus objetivos por proporcionar aos estudantes um espaço dinâmico e participativo para descobertas das equipes sobre o jogo.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino Médio. Jogo Torre de Hanói. Princípio de Indução Finita. Indução Matemática.

ABSTRACT

This paper describes a research whose major aim was analyze the contributions of the “Tower of Hanói”, a math game towards the study of Mathematical Induction for high school students. The Principle of Finite Induction is treated as a way to give students a sense of infinity in mathematics. The basis of the didactic approaches from Abramo Hefez and Luiz Roberto Dante was taken as a theoretical contribution to this study. These authors were considered relevant because they are the ones who have written textbooks related to these topics to basic education. Students’ motivation in solving the game was investigated as well as the reasoning that they achieved in order to get a mathematical expression which determined the minimum number of needed moves to transfer parts with varying number of disks available. From the development of these expressions we started the study of Mathematical Induction in order to check these propositions validity. The research was conducted from the qualitative methodology perspective and was applied to 3rd Grade Technical Course students in Computer Maintenance and Support Program from IFMG - Federal Institute of Education, Science and Technology of Minas Gerais - Campus São João Evangelista. Researcher’s notes and participants’ considerations about the uses of the concrete material in Math Teaching – more specifically on Mathematical Induction - also known as the Principle of Finite Induction/ PIF - were transcribed afterwards. The study achieved its objectives by providing students a dynamic and participatory environment to further discoveries about the game .

Keywords: Math Teaching. High School. Game “Tower of Hanói”. Principle of Finite Induction. Mathematical Induction

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 01 – Torre de Hanói..... 15
FIGURA 02 – Movimentação de peças com $n = 1$..... 17
FIGURA 03 – Movimentação de peças com $n = 2$..... 17
FIGURA 04 – Movimentação de peças com $n = 3$..... 17
FIGURA 05 – Dominós enfileirados..... 29
FIGURA 06 – O Efeito Dominó..... 30
FIGURA 07 – Movimento de transferência para $n = 1$..... 32
FIGURA 08 – Torres de Hanói e dominós utilizados na pesquisa..... 38
FIGURA 09 – Explicação dos objetivos da pesquisa ao público-alvo..... 38
FIGURA 10 – Torres de Hanói disponíveis para os grupos..... 39
FIGURA 11 – Grupos de alunos explorando a Torre de Hanói..... 39
FIGURA 12 - Grupo 04 estudando estratégias do jogo..... 40
FIGURA 13 - Rascunhos do grupo 2..... 40
FIGURA 14 - Contraexemplo da fórmula de Euler $P(x) = x^2 + x + 41$ em sala..... 43
FIGURA 15 - Estudantes enfileirando dominós para pesquisa de aula..... 44
FIGURA 16 – Derrubada da fileira de dominós..... 45
FIGURA 17 – Demonstração da fórmula $M(n) = 2^n - 1$..... 47

LISTA DE TABELAS

TABELA 01 – Número de Movimentos em função das peças..... 16
TABELA 02 – Movimentos necessários para transferência de peças..... 40
TABELA 03 – Teste de valores para a expressão $M = n^2 - (n - 1)$, Grupo 04..... 41
TABELA 04 – Teste de valores para a expressão $M = 2^n - 1$, Grupos 02 e 04..... 41

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11
1.1 QUESTÃO DE PESQUISA 12
1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA 13
1.3 JUSTIFICATIVA 13

2 A TORRE DE HANÓI..... 15
2.1 COMO JOGAR A TORRE DE HANÓI..... 16
2.2 O USO DE MATERIAIS CONCRETOS NO PROCESSO EDUCATIVO..... 18
2.3 O JOGO TORRE DE HANÓI COMO MATERIAL CONCRETO 19
2.4 A UTILIZAÇÃO DA TORRE DE HANÓI NO ENSINO DE MATEMÁTICA 21

3. A INDUÇÃO MATEMÁTICA E A IDEIA DE PROVA ABSOLUTA 23
3.1 O MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA OU PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA (P.I.F.)..... 27
3.2 UMA ABORDAGEM INTUITIVA SOBRE A INDUÇÃO MATEMÁTICA 29
3.2.1 O Efeito Dominó 29
3.3 COMO FUNCIONA O PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA (P.I.F.) 30
3.4 INDUÇÃO MATEMÁTICA NA TORRE DE HANÓI 32

4 METODOLOGIA DE PESQUISA 34
4.1 TIPO DE PESQUISA 34
4.2 CARACTERIZAÇÃO DO LOCAL DE PESQUISA 35
4.3 PÚBLICO DE INTERESSE DA PESQUISA 36
4.4 MATERIAIS E MÉTODOS 37
4.5 APLICAÇÃO DA PESQUISA..... 38

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 49

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 52

APÊNDICES 55

1 INTRODUÇÃO

Considerando que a educação consiste num processo de formação integral do indivíduo, convém considerar a importância do desenvolvimento de metodologias de trabalho em sala de aula que possibilitem aos educandos uma aprendizagem significativa dos conteúdos ensinados.

Segundo consta na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996, p. 9), a educação deve ser tomada como processo de preparação para exercício da vida cidadã e para o trabalho. Disso decorre uma responsabilidade por parte do educador que deve desempenhar a atividade de educar com rigor e formalismo, por meio de instrumentos e metodologias inovadoras de ensino que possibilitem uma aprendizagem condizente à realidade e necessidades dos estudantes. Ainda assim, os ensinamentos aprendidos na escola devem conduzir os estudantes a uma formação que lhes permita aplicação de conhecimentos lógicos em detrimento da utilização de conceitos técnicos. Neste contexto, deve-se entender que o papel do professor vai além das dimensões da sala de aula em que atua, tendo, portanto, função de agente ativo no processo de construção e desenvolvimento social na vida do educando. Sob esta perspectiva é que se desenvolveu esta investigação, buscando, sobretudo, relacionar os conceitos apresentados à dimensão prática dos conhecimentos estudados.

Busca-se ressaltar a Torre de Hanói como possiblidade pedagógica no ensino de Matemática, apresentando as potencialidades e vantagens da utilização de estratégias de trabalho docente enviesadas às perspectivas da ludicidade. Ainda sob esse enfoque, apresenta-se uma atividade de aplicação ressaltando a Torre de Hanói como ferramenta a ser utilizada pelos professores de Matemática para o ensino de Indução Matemática na 3ª série do Ensino Médio.

Esta investigação é composta por cinco capítulos. Cada um deles descreve uma temática relacionada ao tema de interesse: “A Torre de Hanói e o Ensino de Indução Matemática no Ensino Médio”.

O primeiro capítulo situa o tema e a proposta de pesquisa a ser realizada, bem como os objetivos pretendidos. Neste capítulo apresenta-se ainda a justificativa que motiva o desenvolvimento das atividades elencadas nos capítulos seguintes.

No capítulo II, a Torre de Hanói é apresentada. Faz-se uma abordagem

histórica sobre sua invenção e utilização na educação. Explicam-se as regras do jogo e uma relação matemática para calcular a quantidade de movimentos necessários para transferência das peças. Descrevem-se os materiais concretos como importantes ferramentas para o aprendizado escolar e apresentam-se classificações dos tipos de jogos e a importância dos mesmos no processo educativo.

No capítulo III são explanados os métodos adotados pelas ciências naturais e pela matemática para tirar conclusões sobre generalizações. A Indução Matemática, também conhecida como Princípio de Indução Finita (P.I.F.) é apresentada como um método adotado para desenvolver a prova absoluta de proposições matemáticas. Neste capítulo, demonstra-se a validade da expressão $M = 2^n - 1$ como a fórmula para determinação da quantidade mínima de movimentos para transferência de n peças no jogo Torre de Hanói.

O capítulo IV descreve os aspectos metodológicos da pesquisa desenvolvida. Nele, caracteriza-se o tipo de pesquisa desenvolvida e os materiais e métodos adotados durante a aplicação da pesquisa de campo. Neste capítulo relata-se também sobre o comportamento dos estudantes quanto às atividades práticas da pesquisa em questão.

Por fim, o capítulo V trata das considerações finais sobre a realização da pesquisa proposta neste trabalho. Neste capítulo apontam-se as dificuldades e as potencialidades da pesquisa realizada. Discute-se também sobre o desenvolvimento da pesquisa de campo face aos objetivos pretendidos pela investigação desenvolvida.

1.1 Questão de Pesquisa

No sentido de orientar a realização das atividades desta pesquisa, buscou-se investigar sobre a seguinte questão: Como o uso do jogo Torre de Hanói pode contribuir para o desenvolvimento das atividades de ensino de Indução Matemática para os alunos da 3ª série do Ensino Médio?

A partir desta indagação buscou-se fundamentar a realização deste trabalho investigativo de forma que ao final de toda aplicação se pudesse apresentar uma discussão sobre a relevância do tema tratado.

1.2 Objetivos

Os objetivos da pesquisa foram delineados com o intuito de orientar os passos a serem desenvolvidos ao longo dos trabalhos de investigação sobre as contribuições da Torre de Hanói para o estudo de Indução Matemática no Ensino Médio.

Como objetivo geral, busca-se propor o uso de recursos alternativos para promover a aprendizagem significativa do conteúdo de Indução Matemática no Ensino Médio. Apresenta-se, sobretudo, o contexto da ludicidade como forma de facilitar a compreensão dos entes matemáticos abordados em sala de aula pelo professor.

A Indução Matemática será discorrida nesta pesquisa como uma ferramenta para que os estudantes compreendam e estabeleçam relações com os conhecimentos já estudados a fim de produzirem a prova matemática de teoremas ou propriedades apresentadas em sala de aula.

Além do objetivo geral, a realização desta pesquisa teve os seguintes Objetivos Específicos:

- Apresentar as potencialidades pedagógicas para os trabalhos que contemplem a Torre de Hanói;
- Propor a utilização de jogos matemáticos como ferramenta de motivação da aprendizagem matemática;
- Investigar a percepção de estudantes da 3ª série do Ensino Médio acerca da proposição do jogo Torre de Hanói no estudo de Indução Matemática.

1.3 Justificativa

A partir de investigações bibliográficas constata-se que o sistema de ensino atual apresenta uma necessidade de se implementar metodologias para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Por reconhecer a escola como entidade decisorial na formação do ser social é que se desenvolve esta investigação. Objetiva-se, sobretudo, apresentar a Torre de Hanói como possibilidade instigante do pensamento lógico-matemático em alunos da 3ª série do Ensino Médio, bem como apontar suas contribuições para o estudo de

Indução Matemática.

A justificativa para realização desta pesquisa deve-se ao fato de o tema Indução Matemática ser relevante para o desenvolvimento de habilidades matemáticas na educação básica. Conforme evidenciado na revisão bibliográfica desta pesquisa, poucos são os autores que produzem materiais didáticos sobre este assunto para etapas de ensino anteriores à graduação.

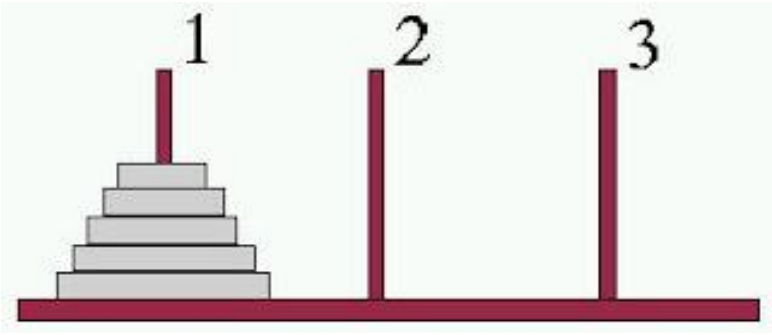
Contudo, esta pesquisa representa uma oportunidade para motivar a realização de mais investigações e o desenvolvimento de novas propostas de ensino que contemplem o estudo de Indução Mátemática no Ensino Médio.

2 A TORRE DE HANÓI

A Torre de Hanói foi criada em 1883 pelo matemático francês Édouard Lucas. O jogo foi publicado na cidade de Hanói, no Vietnã e posteriormente popularizou-se na China e no Japão. O jogo hoje é muito conhecido pelo mundo todo e constitui-se de três pinos verticais afixados a uma base. Em um desses pinos existe uma quantidade n de discos de tamanho decrescente empilhados um a um. O objetivo do jogo é transferir todos os discos de um dos pinos para outro obedecendo a três regras básicas: 1) só se pode movimentar uma peça de cada vez; 2) uma peça maior nunca pode ficar sobre uma menor; e 3) não se pode movimentar uma peça que esteja debaixo de outra. (CABRAL, 2006, p. 34)

Segundo Costa (2008, p. 3) o jogo foi inspirado em uma lenda hindu que falava de um templo em Bernares, uma cidade sagrada da Índia, onde existiam três torres sagradas do rei Brahma. Nesta lenda diz-se que no início dos tempos foi dada aos monges uma pilha de 64 discos de ouro de diâmetros diferentes e com um furo no meio, empilhados em uma das torres de forma que cada disco se sobrepunha a um disco maior de modo que sempre o disco de cima fosse menor que o disco imediatamente abaixo dele. A esses monges foi atribuída a tarefa de transferir todos os 64 discos de uma torre para outra, obedecendo-se as regras supracitadas. Coube a eles o trabalho eficiente dia e noite, pois quando cumprida a tarefa o templo se desmoronaria transformando-se em pó e o mundo acabaria. Desta forma os monges deveriam utilizar uma quantidade mínima de tempo a partir de uma regra de movimentação que lhes possibilitasse a transferência de todos os discos para uma terceira torre sem desperdício de tempo e movimentos.

Figura 01 – Torre de Hanói



Fonte: PIRES, 2007

Baseando-se na lenda hindu Édouard Anatole Lucas inventou o jogo Torre de Hanói, que foi um sucesso em meio aos povos do oriente e posteriormente se difundiu por todo o mundo.

2.1 Como Jogar com a Torre de Hanói

Para executar o jogo Torre de Hanói é necessário que se tenha um número de discos estabelecidos. Com base nas regras do jogo será necessária uma quantidade mínima de movimentos para a transferência das peças. Para tanto, é necessário que se obedeça a uma função matemática para que não se excedam ou desperdicem movimentações das peças. A função é representada por $2^n - 1$, onde n representa a quantidade de discos sobrepostos.

Abaixo é apresentada uma tabela contendo a resolução do jogo Torre de Hanói com a respectiva quantidade de movimentos mínimos necessários para a transferência de peças.

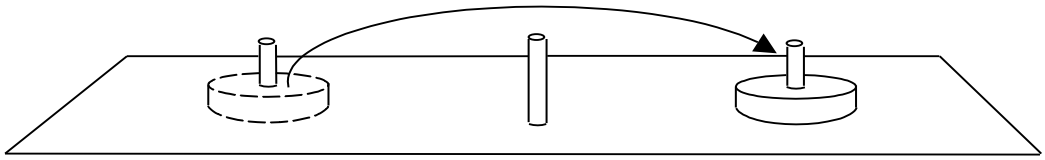
Tabela 1 – Número de Movimentos em função das peças

n = número de discos	$2^n - 1$ = número de movimentos necessários
$n = 1$	
$n = 2$	
$n = 3$	
$n = 4$	
$n = 5$	
$n = 6$	
$n = 7$	

Fonte: Dados da pesquisa

Sobre a ordem dos movimentos do jogo conforme a quantidade de discos apresenta-se algumas figuras abaixo. Inicialmente, considerando $n = 1$. Verifica-se que para completar o jogo é preciso apenas 1 movimento, a saber:

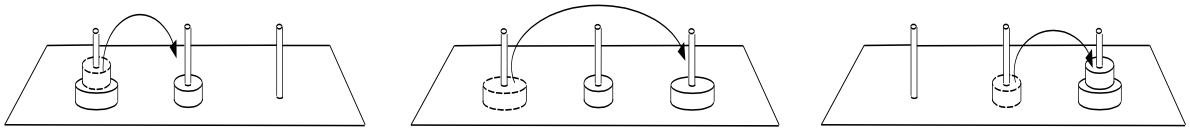
Figura 2 – Movimentação de peças com n=1



Fonte: SHINE, [2012], p.1

Agora, observe a ordem dos três movimentos quando utiliza-se $n = 2$**:**

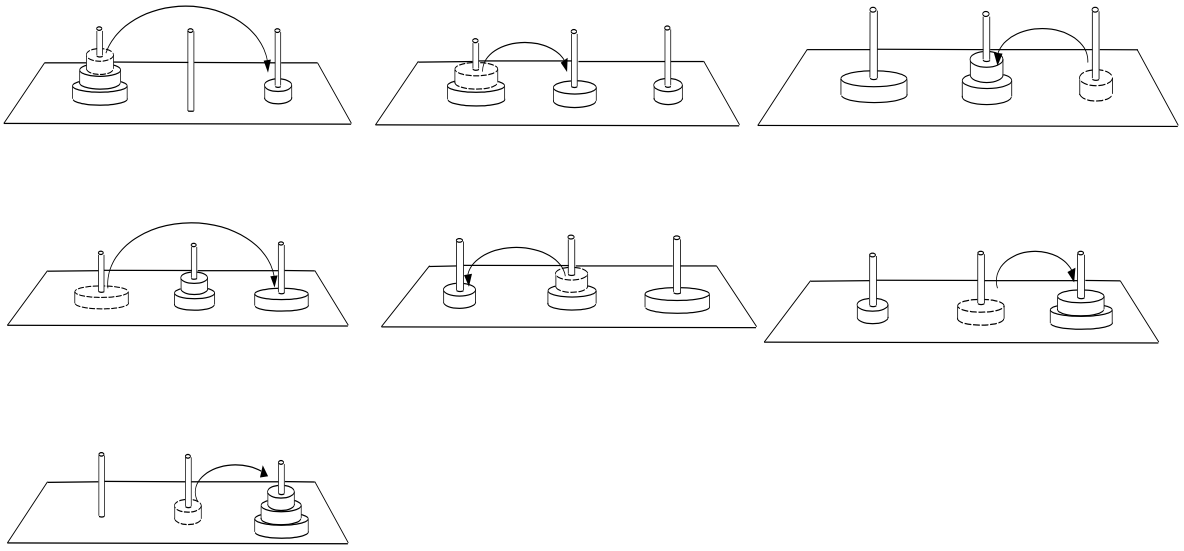
Figura 3 – Movimentação de peças com n=2



Fonte: SHINE, [2012], p.2

Verifica-se, portanto, que quando se empregam três discos a transferência só é possível se forem utilizados pelo menos sete movimentos. Assim, para $n = 3$, tem-se a seguinte sequência:

Figura 4 – Movimentação de peças com n=3



Fonte: SHINE, [2012], p.2

Segundo Dante (2011, p.12) a transferência dos discos demoraria muito. Com base nas regras do jogo e segundo a lenda hindu, os monges gastariam pelo menos 18 446 744 073 709 551 615 movimentos para transferência dos 64 discos de ouro. Se para movimentar cada disco fosse gasto exatamente 1 segundo, os monges levariam cerca de 585 bilhões de anos para realizar a tarefa de transferência.

Assim, a Torre de Hanói é apresentada como um jogo aparentemente simples, mas que pode contribuir para o desenvolvimento de potencialidades cognitivas. De fácil construção, pode ser também adquirido no mercado facilmente.

2.2 O Uso de Materiais Concretos no Processo Educativo

Por fazer parte do processo educativo, o professor tem função de agente ativo no processo de construção e desenvolvimento social na vida do educando. Desta forma, faz-se importante que os professores desenvolvam cada vez mais o hábito de fazer uso de dispositivos de aprendizagem que traduzam conceitos em saberes significativos para a vida dos alunos.

A implementação de métodos que favoreçam o desenvolvimento de relações entre os conhecimentos estudados e a realidade do aluno é primordial no processo de aprendizagem escolar. Isto se deve pela possibilidade de se fazer associações entre o que se aprende e as necessidades da vida cotidiana, o que contribui para transformar práticas de ensino tradicional, baseadas em exercícios repetitivos de livros didáticos, em atividades prazerosas e motivadoras da participação dos alunos no processo educativo. Sobre o desenvolvimento do aluno, quando este se torna agente participativo na construção do conhecimento, Ponte, Brocardo e Oliveira afirmam que

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23)

Sobre a prática do ensino tradicional Silveira, Novello e Laurino apontam que

> o ensino transmissivo dominou a sala de aula durante séculos, porém essa concepção tem sido transformada pela evolução de teorias cognitivas e o surgimento de novas metodologias de ensino que potencializam a contextualização do saber, a compreensão de regras e a articulação de representações matemáticas.(SILVEIRA; NOVELLO; LAURINO, 2011, p. 2)

O uso de materiais concretos apresenta-se, portanto, como ferramenta auxiliar para professores de diversas áreas do conhecimento. Esses materiais podem sem utilizados de forma a buscar o desenvolvimento do interesse por parte

dos alunos pelo estudo de conceitos a partir da problematização de conhecimentos ou desenvolvimento de atividade prática para compreensão de temáticas tratadas pelo estudo do livro didático.

Ainda para Silveira, Novello e Laurino

> a matemática tem sido abordada de forma abstrata, com poucas demonstrações concretas e problematização dos conceitos com a realidade, fato esse que dificulta o entendimento dos discentes e como consequência muitos passam a não gostar da área exata. É nesse contexto que os materiais concretos se configuram em uma possibilidade de recurso para ser inserido no currículo, criando o elo entre teoria e prática minimizando as rupturas da articulação do cotidiano para o saber escolar. (SILVEIRA; NOVELLO; LAURINO, 2011, p. 2)

Assim, percebe-se a importância da implementação de metodologias didático-pedagógicas e estratégias de ensino que promovam a interação entre os alunos e os conceitos tratados pelos professores. Práticas de ensino que estimulem a reflexão teórica em detrimento do treinamento de reproduções técnicas contribuem para melhorar a qualidade do ensino, proporcionando um aprendizado eficiente.

2.3 O Jogo Torre de Hanói Como Material Concreto

Embora se trate de um jogo, a Torre de Hanói também é considerada um tipo de material concreto, pois possibilita ao(s) jogador(es) a manipulação de um instrumento para a desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas por meio do estímulo ao raciocínio lógico.

Como um tipo de material concreto o jogo Torre de Hanói possibilita o desenvolvimento de habilidades de observação, concentração e desenvolvimento de estratégias a partir da sua manipulação. Vê-se então uma oportunidade para que os alunos sejam estimulados a utilizarem o raciocínio para descoberta de soluções em situações- problema apresentadas nas aulas de matemática.

Considerando as contribuições da utilização dos jogos nas práticas pedagógicas, convém apontar que o documento Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, citado por Sarmento (200-, p. 2), enfatiza que “Os [...] Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. [...]”.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2006, p. 56)

os jogos constituem-se como instrumentos pedagógicos valiosos no processo de apropriação do conhecimento, pois

> [...] Permitem o desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação, das relações interpessoais, da liderança e do trabalho em equipe, utilizando a relação entre cooperação e competição em um contexto formativo. O jogo oferece o estímulo e o ambiente propícios que favorecem o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica e prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos. (BRASIL, 2006, p. 56)

Para Sarmento (200-, p. 2) a utilização de materiais concretos no processo de aprendizagem é um fator relevante. Ele reconhece que esse tipo de recurso didático possibilita ao aluno o estabelecimento de semelhanças e diferenças, a percepção de regularidades e singularidades, o estabelecimento de relações entre conhecimentos diversos e a vida cotidiana, bem como a compreensão das representações simbólicas da matemática.

As atividades lúdicas desenvolvidas mediante a seleção de jogos também podem contribuir para o processo de aprendizagem. Isto porque pressupõem regras para melhor assimilação e compreensão de conceitos. Sobre a aprendizagem com a utilização de jogos Coelho e outros (2012, p. 3) explicam que “[...] As competências cognitivas adquiridas no ambiente lúdico quando corretamente desenvolvidas, são inconscientemente transferidas para o ambiente da vida real, mostrando-se numa poderosa ferramenta de ensino e aprendizado”.

Sobre os tipos de jogos, Grando citado por Mota, os classifica basicamente em seis tipos, a saber:

> **Jogos de aza**r – São aqueles que dependem apenas da “sorte” para se vencer o jogo. O jogador não tem como interferir ou alterar a solução. Ele depende das probabilidades para vencer. Exemplos deste tipo de jogos são: lançamento de dados, par ou ímpar, casinos, lotarias.
> **Jogos quebra-cabeças** - são aqueles em que o jogador, na maioria das vezes, joga sozinho e a sua solução ainda é desconhecida para ele. Exemplos deste tipo de jogo são: quebra-cabeças, enigmas, charadas, paradoxos, falácias, pequenos problemas e Torre de Hanói.
> **Jogos de estratégia** (e/ou jogos de construção de conceitos) – são aqueles que dependem única e exclusivamente do jogador para vencer. O factor “sorte” ou “aleatoriedade” não está presente. O jogador deve elaborar uma estratégia, que não dependa de sorte, para tentar vencer o jogo. Exemplos desse tipo de jogo, são: xadrez, damas.
> **Jogos de fixação de conceitos** – são aqueles cujo objectivo está expresso em seu próprio nome: “fixar conceitos”. São os mais comuns, muito utilizados nas escolas que propõem o uso de jogos no ensino ou “aplicar conceitos”. Apresentam o seu valor pedagógico na medida em que substituem, muitas vezes, as listas e mais listas de exercícios aplicados

> pelos professores para que os alunos assimilem os conceitos trabalhados. É um jogo utilizado após o conceito.
> **Jogos pedagógicos** – são aqueles que possuem o seu valor pedagógico, ou seja, que podem ser utilizados durante o processo ensino-aprendizagem. Na verdade, eles englobam todos os outros tipos: os de azar, quebra-cabeças, estratégia, fixação de conceitos e os computacionais; pois todos estes apresentam um papel fundamental no ensino.
> **Jogos computacionais** – são os que são projectados e executados no ambiente computacional. (GRANDO apud MOTA, 2009, p. 30-31).

Conclui-se então que a Torre de Hanói trata-se de um jogo pedagógico do tipo quebra- cabeças. Este jogo pode facilitar o desenvolvimento de conceitos e habilidades em sala de aula, servindo como oportunidade de melhoria das metodologias de ensino. Busca-se, neste trabalho, descrever a Torre de Hanói como ferramenta auxiliar no estudo de Matemática, especificamente da Indução Matemática.

2.4 A utilização da Torre de Hanói no Ensino de Matemática

Considerada a dificuldade apresentada por alunos dos diversos níveis de ensino no estudo da Matemática, faz-se importante o planejamento e a proposição de trabalhos que contemplem alternativas para estimular a aprendizagem desta disciplina.

Sob a perspectiva de alterar o paradigma atual no campo do ensino de Matemática, é essencial que se proponham ferramentas para que professores e alunos atuem como agentes partícipes da construção do conhecimento escolar.

Ao propor a utilização de jogos nas aulas de Matemática, contempla-se o desenvolvimento de habilidades de trabalho importantes para a formação escolar. Ao apresentar o jogo Torre de Hanói como recurso alternativo ao uso corrente do livro didático, propõe-se a utilização da dimensão lúdica para desenvolvimento das atividades de ensino e aprendizagem de Matemática. Enfatiza-se, sobretudo, o desenvolvimento de espírito investigativo por parte do educando, o qual passará a ter possibilidades de experimentar e fazer de novo, planejando e levantando hipóteses, argumentando e refletindo com seus colegas sobre o desenvolvimento de estratégias para se chegar a um objetivo por ele(s) determinado.

A partir da invenção da Torre como um jogo estabeleceu-se uma importante ferramenta para desafiar os alunos em escolas nos mais diferentes níveis de ensino. Isto porque a Torre de Hanói pode ser utilizada por professores para melhorar o

pensamento cognitivo e o desenvolvimento de estratégias e algoritmos matemáticos com seus alunos. Utilizando-se a dimensão lúdica do ensino é possível ensinar Matemática de forma divertida e atraente aos alunos.

A Torre de Hanói tem sido utilizada tradicionalmente como procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de solução de problemas. Este jogo pode ser trabalhado em vários níveis de desenvolvimento das crianças, desde a pré-escola até o ensino superior. Sua utilização na educação é muito válida, uma vez que desenvolve no aluno habilidades para entender a simbolização, o sequenciamento, a generalização, o raciocínio lógico, a ação exploratória, a contagem e o planejamento da ação, coordenação motora, da lógica, do raciocínio matemático, identificação de formas, estabelecimento de estratégias, contagem de movimentos e raciocínio. (COELHO et al, 2012, p. 6).

Silva e Luz (2009, p. 20-21) apontam que na Pré-Escola, a Torre de Hanói pode ser associada a questões de coordenação motora, identificação de formas, ordem crescente e decrescente. No Ensino Fundamental, o jogo pode ser usado para o estabelecimento de estratégias de transferência das peças, como a contagem dos movimentos. Iniciando com um número menor de peças, ou seja, resolvendo problemas mais simples, seguindo assim, um caminho que dará oportunidade de se experimentar uma das mais importantes formas de raciocínio matemático: o raciocínio dedutivo.

Segundo Braz (2007, p. 51) a Torre de Hanói também pode ser utilizada no Ensino Médio e no Ensino Superior. No Ensino Médio o jogo pode ser empregado para desenvolver noções ligadas ao princípio da indução finita e das progressões geométricas. Já no Ensino Superior, o jogo pode contribuir para exploração de conceitos relacionados à álgebra abstrata[1], podendo também ser usado para introduzir o princípio da indução finita.

Contudo, verifica-se também seu papel significativo na educação matemática por colaborar no desenvolvimento de habilidades nos estudantes, dentre elas o estabelecimento de planos de estratégia, atenção e concentração.

[1] Segundo Eduardo e outros (2011, p. 3), a Álgebra Abstrata é uma subárea da Álgebra que explora as estruturas algébricas de Grupos, Anéis, Corpos e Espaços Vetoriais.

3 A INDUÇÃO MATEMÁTICA E A IDEIA DE PROVA ABSOLUTA

Neste capítulo apresenta-se o conceito de Indução Matemática e um breve histórico de sua fundamentação. Busca-se esclarecer as contribuições do estudo deste conceito para o desenvolvimento de argumentações lógicas envolvendo os números naturais. A abordagem sobre a prova absoluta também é discorrida como uma das formas utilizadas pela Matemática para tirar conclusões e propor teorias.

É importante salientar que nessa pesquisa a abordagem acerca da Indução Matemática (ou Principio de Indução Finita – P.I.F.) será discorrida como um processo para se chegar a conclusões ou proposições matemáticas por meio da utilização do raciocínio lógico. No entanto, é importante enfatizar que, embora esse método contenha a palavra “indução”, o Princípio de Indução Finita trata-se de um tipo de raciocínio dedutivo. Ao longo do texto tanto a indução quanto a dedução serão caracterizadas para evitar equívocos quando da necessidade de se estabelecer suas diferenciações e peculiaridades.

Inicialmente é preciso esclarecer que há diferença entre as concepções acerca do que se entende por indução aplicada na Matemática e indução nas ciências naturais. Segundo Santos

> A Indução em Ciências é conhecida como sendo um processo de se descobrir e justificar leis universais ou gerais a partir da observação e combinação de casos singulares e a Indução Matemática como um método dedutivo para demonstração de fatos sobre números naturais. (SANTOS, 2011, p.1).

Sobre a aplicação dos processos de indução, Morgado (1990, p. 1) afirma que “Todas as ciências, incluindo a Matemática, usam a indução, com o objetivo de descobrir leis gerais a partir da observação e comparação de alguns casos particulares”. Em síntese, podemos enunciar que o processo de indução consiste na generalização de uma hipótese tomada como verdadeira para um número finito de casos.

Por também ser uma forma de inferência para verificação da validade de proposições, a dedução também é apresentada. Ela consiste em um plano inteligível desenvolvido em conformidade com os preceitos da lógica. Bertrand Russel (1872-1970), um influente matemático, filósofo e lógico do século XX, tentou estabelecer uma distinção entre inferência dedutiva e indutiva. Ele pretendia afirmar

> [...] a necessidade da indução como instrumento do crescimento do conhecimento; enquanto que a dedução tem a função de verificar se o que foi

> descoberto pela indução é válido e coerente com as teorias já confirmadas e com a realidade empírica; ou seja, a descoberta se faz pela indução e é confirmada, ou não, pela dedução. (RUSSEL *apud* VIANA, 2007, p.12)

Neste estudo, porém, será estabelecida uma diferenciação entre processo de indução e dedução. Em Matemática, considera-se como processo de dedução a passagem de uma proposição geral para uma particular. O processo inverso, isto é, a passagem de uma afirmação particular para uma geral será tratada como indução. (FERNANDES et al, 2009, p. 28-29).

Como exemplo da ideia de indução pode-se considerar uma proposição do filósofo grego Aristóteles (384 – 322 a.C.), que devido ao seu interesse em obter verdades particulares a partir de verdades universais propôs o seguinte silogismo:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é homem.

Sócrates é mortal.

Ao analisar o silogismo proposto por Aristóteles, pode-se notar que a partir das duas premissas iniciais (“Todos os homens são mortais.” e “Sócrates é homem.”) chega-se, por raciocínio lógico dedutivo, à conclusão: “Sócrates é mortal.”.

Desta forma pode-se afirmar que Aristóteles partiu de uma generalização para admitir uma verdade particular, o que caracteriza a utilização do raciocínio dedutivo em sua argumentação.

Sobre a generalização das proposições faz-se importante apresentar as principais diferenciações entre os processos adotados pela Matemática (prova absoluta) e por outras áreas do conhecimento (prova científica). Segundo Singh (2008) pode-se descrever que

> [...] Na ciência apresenta-se uma hipótese para explicar um fenômeno físico. Se as observações do fenômeno são favoráveis à hipótese, então elas se tornam evidências a favor dela. [...] Experiências podem ser feitas para testar a capacidade da hipótese em prever os resultados, e se o resultado for bem-sucedido teremos mais evidências para apoiar a hipótese. Por fim, a soma das evidências pode ser tão grande que a hipótese passará a ser aceita como teoria científica. (SINGH, 2008, p.41)

Em Matemática, porém, a obtenção da prova requer um processo mais rigoroso e mais preciso que o conceito de prova aplicado por físicos e químicos, já que

> A ideia de demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem

> corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. [...]. (SINGH, 2008, p. 41)

Em outras palavras, pode-se dizer que em experimentos para descobrir leis da natureza, os cientistas utilizam-se de raciocínio indutivo para tirar conclusões gerais de um conjunto de dados ou análise de amostras. Neste processo estabelece-se uma conjectura para justificar a validade de uma proposição para um número significativo de casos, o que sempre poderá comportar exceção à regra. Em Matemática, porém, as conclusões de propriedades válidas para todo o universo requer o uso de raciocínio dedutivo, o que garantirá a veracidade de uma dada proposição para qualquer experimento. (DANTE, 2011, p.8).

Ao considerar a indução como um dos métodos para se tirar conclusões gerais, é importante salientar que este método pode ser de dois tipos: indução empírica e indução matemática.

Com o intuito de esclarecer as características da indução empírica, utilizada nas ciências naturais, Junta diz que

> [...] as leis empíricas só poderão possuir um caráter de “generalizações aproximadas” das generalizações realmente observadas, ou seja, as leis empíricas só podem assumir um caráter hipotético. A justificação desse caráter hipotético deve-se à dificuldade em enunciarmos todos os fatores causais relevantes em um caso real. Essa dificuldade é agravada com a impossibilidade de realizarmos experimentações nesse campo. [...]. (JUNTA, 2008, p.71)

Considerando as “generalizações aproximadas” decorridas do método de indução empírica é possível estabelecer a possibilidade de se comportar exceção às regras propostas em suas leis, o que não é conveniente nas afirmações matemáticas.

Sobre o outro processo de indução, Morgado diz que

> a chamada ”indução matemática” [...] é algo bem diferente da indução praticada nas outras ciências, nomeadamente nas ciências físicas e nas ciências naturais. A indução matemática é usada somente em matemática para demonstrar teoremas de certo tipo. A indução matemática compreende também uma fase de dedução (como adiante se verá) e esta circunstância distingue-a da indução praticada nas outras ciências [...]. (MORGADO,1990, p. 23).

Singh faz uma associação relevante para a compreensão dos processos de indução adotados pelas ciências naturais e pela Matemática. Para ele

> A ciência funciona por um sistema semelhante ao da justiça. Uma teoria é considerada verdadeira se existem evidências suficientes para apoiá-la “além

> de toda dúvida razoável". Por outro lado, a matemática não depende de evidências tiradas de experiências sujeitas a falhas e sim construídas sobre lógica infalível. (SINGH, 2008, p. 43).

Como exemplo do processo de indução empírica – adotada em ciências naturais – pode-se citar uma história criada pelo matemático, filósofo e grande humanista inglês Bertrand Russel (1872-1970). De forma irônica, Russel utiliza-se de um caso irreverente para descrever o que ele define como *indução galinácea*

> Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela. (HEFEZ, 2008, p. 16)

Nesta história, é possível notar que o processo de indução adotado pela galinha falhou. Para ela, conforme a senhora fosse colocando milho para alimentá-la, sua liberdade para aproximação da dona aumentaria tanto que não mais seria necessário qualquer tipo de preocupação com qualquer atitude agressiva. Porém, o procedimento não foi validado no centésimo dia e assim a galinha morreu.

Nesta história, reconfirma-se a ideia da possibilidade de falhas existentes nos processos de estabelecimentos de leis para fenômenos nas ciências naturais. Em Matemática, não se pode proceder a afirmações tomadas como verdadeiras sem testar a validade para todo e qualquer elemento de um conjunto numérico. Neste sentido, a Indução Matemática surge como forma de testar as proposições para verificar respostas verdadeiras para qualquer número natural.

Fernandes e outros (2009, p. 30) mencionam o trinômio estudado por Euler (1707-1783) como um exemplo do processo de indução empírica. Euler propunha que na sentença $\mathrm{P}\ \mathrm{x}\ = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 41$ o resultado da substituição de x por quaisquer valores naturais levava a obtenção de números primos. Provavelmente, Euler testou a validade desta sentença para todos os valores naturais de 1 a 39, pois para $\mathrm{x} = 1$, obtém-se 43 (verdade); para $\mathrm{x} = 2$, o resultado é 47 (verdade); para valores de x iguais a $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 10, obtém-se respectivamente $53, 61, 71, 83, 97, 113$ e 151, que são todos números primos. Isto supôs que Euler estivesse correto em sua proposição.

Agora, supondo valores maiores para x é possível verificar um equívoco na

afirmação de Euler. Para $P(24)$, tem-se como resultado o número 641; para $P(32)$, obtem-se 1097; para $P(38)$, o resultado é 1523; para $P\ 39$ tem-se também um número primo: 1601. Conclui-se que para valores de $x = 1, 2, \ldots, 39$ Euler estava correto. Mas para $x = 40$ tem-se

$$x^2 + x + 41 = 40^2 + 40 + 41 = 40\ 40 + 1\ + 41 = 41\ 40 + 1\ = 41^2 = 1681,$$

que é um numero composto, e portanto, não primo.

Mais uma vez, detecta-se que algumas afirmações tomadas como verdadeiras a partir de alguns testes são válidas apenas para alguns casos especiais e que, por isso, quando testadas para generalização, verifica-se falsidade nas argumentações. Com vistas à generalização dessas afirmações apresenta-se a Indução Matemática, também conhecida com Princípio da Indução Finita.

3.1 O Método de Indução Matemática ou Princípio de Indução Finita (P.I.F.)

Ao longo da história, o método de Indução Matemática foi usado por pessoas como *Maurolycus* (1494-1575), *Pascal* (1623-1662) (em uma das demonstrações das propriedades de seu triângulo) e *De Morgan* (1806-1932). Mais tarde Giuseppe Peano (1858-1932) publicou quatro axiomas com o intuito de demonstrar este método de raciocínio matemático. (PEREIRA, 2007, p.1)

As contribuições de Giuseppe Peano para com a Indução Matemática deram-se pela publicação de quatro de seus axiomas em sua obra “Arithmetic principia novo methodo exposita” – Novo método de exposição dos princípios da Aritmética, em 1899. Nesses axiomas Peano formalizava a ideia de que todos os números naturais podem ser obtidos a partir do número 1 pela soma sucessiva da unidade. (SANTOS, 2011, p. 5)

Em seus quatro axiomas matemáticos, Giuseppe Peano propôs as seguintes propriedades matemáticas acerca dos números naturais:

1) Existe uma função $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $S(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n.
2) A função $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.
3) Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq S\ n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
4) Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $S(X) \subset X$
   (isto é, $n \in X \implies S(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$).

A fim de esclarecer as afirmações de Peano, Lima (2006, p. 30) descreve as proposições em linguagem corrente, livre de notação matemática, da seguinte forma:

1) Todo número natural possui um único sucessor;
2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3) Existe um único número natural, chamado “um” e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
4) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Peano estabeleceu um grande passo para o desenvolvimento de demonstrações matemáticas que têm por objetivo validar ou invalidar afirmações a respeito de números inteiros positivos.

Nos dias de hoje, a Indução Matemática é abordada principalmente em cursos de graduação. Segundo Hefez (2008, p. 5) isto se deve principalmente pela complexidade e delicadeza requerida para lidar com o desenvolvimento das demonstrações matemáticas.

Embora seja tratado prioritariamente no ensino superior, o estudo deste conteúdo poderia contribuir positivamente nas aulas de Matemática no ensino médio. Sobre a importância de seu estudo, Simões (2012) ressalta: “Que coisa uma pessoa ganha ao estudar o princípio da indução matemática? Ela aprende a verificar se uma afirmação vale só para três números inteiros positivos – e, se for assim, então tal afirmação vale para todos eles”.

Consideradas as contribuições da proposta de estudo de indução no ensino médio, vale ressaltar que nas pesquisas realizadas para construção desta investigação foi constatado que poucos são os textos didáticos que trazem uma abordagem sobre este tema. Embora este tema possa contribuir para compreensão de conceitos e técnicas de generalização matemática, muitos professores não têm dado ênfase ao estudo deste assunto. (HEFEZ, 2008, p.5).

Sobre o ensino deste conceito antes da graduação, Hefez (2008, p. 4) afirma: “Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de ensino médio deveria saber de Matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista.” Para este autor a Indução Matemática é um assunto muito sutil e delicado de se trabalhar, e talvez por isso os professores do ensino médio não procedem a este estudo, deixando-o para estudos posteriores.

Sobre o estudo de Indução no Ensino Médio, Hefez (2008, p.4) defende que este conteúdo é muito relevante para que os alunos compreendam as bases e os processos para validade das propriedades e regras matemáticas. Para ele “é com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática (...)”. A Indução Matemática, ou mais propriamente o Princípio de Indução Finita (P.I.F.), pode ser empregada como ferramenta auxiliar pelos estudantes. Com a indução, os estudantes podem compreender e estabelecer relações com os conhecimentos já estudados a fim de produzir a prova matemática de teoremas ou propriedades apresentadas em sala de aula.

3.2 Uma Abordagem Intuitiva Sobre a Indução Matemática

Com o objetivo de facilitar a compreensão do método de Indução Matemática a ser discorrido ao longo da pesquisa, é interessante relacionar este tema à utilização de materiais concretos. Neste sentido, além da Torre de Hanói, pode-se referenciar o uso do jogo de dominós.

3.2.1 O Efeito Dominó

Como forma de facilitar a compreensão do Princípio de Indução Matemática pode-se imaginar uma situação hipotética em que seja disposta uma fileira de dominós igualmente espaçados um atrás do outro, conforme apresentado na figura abaixo:

Figura 05 – Dominós enfileirados

Fonte: Arquivo pessoal

Agora, supondo que alguém derrube a primeira peça dessa fileira, algo ocorrerá com todas as peças.

A figura 6 revela que as peças do dominó estão sendo derrubadas uma a uma. Convém ressaltar que isto ocorrerá apenas se:

- A primeira cair quando tocada;
- As peças estiverem dispostas a uma mesma distância, de modo que ao golpear uma das peças, esta caia, derrubando a peça seguinte.

Figura 06 – O Efeito Dominó

Fonte: RODRIGUES, 2013

A partir deste exemplo intuitivo enuncia-se a Indução Matemática como sendo um processo em que, estabelecendo uma afirmação para $n = 1$ (“ação de golpear a primeira peça”) e verificada a validade desse método para $n = k + 1$ (“a queda da primeira peça causa a derrubada da peça seguinte”), logo essa afirmação é válida para todo número natural n.

3.3 Como Funciona o Princípio de Indução Finita (P.I.F.)

A partir de exemplos anteriores sobre os processos de indução – empírica e matemática – verifica-se a existência de afirmações que podem ser válidas para uma série de casos particulares e falsas quando consideradas para generalização. Para evitar a generalização de fatos válidos apenas para alguns casos, a Matemática utiliza-se do Princípio de Indução Finita ou método da Indução Matemática.

Com o intuito de melhor situar a utilização deste método, faz-se importante considerar a seguinte indagação:

> [...] suponhamos que uma afirmação seja válida em muitos casos particulares e que seja impossível considerar todos os casos possíveis – por exemplo, uma afirmativa a respeito de todos os números naturais. Como se pode determinar se essa afirmativa é válida em geral? (FERNANDES, 2009, p. 31)

Com o objetivo de esclarecer este tipo de questionamento por meio de argumentações lógicas é que se pode fazer uso do método particular de raciocínio tratado ao longo da pesquisa: o de Indução Matemática.

Segundo Lima (200-, p. 3), o Princípio de Indução Finita (P.I.F.) pode ser

explicado da seguinte forma: Seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se ao número 1 pode-se atribuir esta propriedade P e se, além disso, qualquer número natural n também gozar desta mesma propriedade P, ao seu sucessor $n+1$ também será possível aplicar esta propriedade. Logo, todos os números naturais gozam da propriedade P.

A partir da abordagem desse autor, pode-se explicar o método de Indução Matemática da seguinte forma: seja $P(n)$ uma propriedade aplicável aos números do conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. Se

(1) $P(1)$ (para $n = 1$) é verdadeira

e se

(2) $P\ k$ verdadeira acarretar $P\ k+1$ também verdadeira, ou seja

$P\ k \implies P\ k+1$, , para qualquer $k \in N$, então

(3) $P(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \in N$.

Como exemplo da aplicação do Princípio de Indução Finita, considere que a proposição da soma de números ímpares $1+3+5+7+\cdots+\ 2n-1\ = n^2$ seja verdadeira para qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$. Desenvolvendo esta expressão, tem-se:

(1) $P\ 1$ é verdadeira, pois $2\times 1-1\ = 1$. Logo, $1 = 1^2$.

(2) Agora, considerando verdadeira a hipótese $P\ k : 1+3+5+7+\cdots+ 2k-1\ = k^2, k \in \mathbb{N}$, deve-se provar que $P(k+1)$ também é verdadeira.

Para isso, pode-se somar $2k+1$ (próxima parcela desta soma) a ambos os membros da igualdade (hipótese de indução). Assim, obtém-se:

$$P\ k+1 : 1+3+5+7+\cdots+\ 2k-1\ +\ 2k+1\ = k^2+(2k+1) = (k+1)^2.$$

(3) Desta forma, $P(k+1)$ é verdadeira. Conclui-se, portanto, que a proposição $1+3+5+7+\cdots+\ 2n-1\ = n^2$ é verdadeira para qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$.

A fim de explorar o assunto, propõe-se provar, por meio da Indução Matemática, que a proposição $1+2+3+\cdots+n = \frac{n\ n+1}{2}$ é verdadeira para qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$.

(1) $P\ 1$ é verdadeira, pois para $n = 1$ tem-se:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1\ 1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \therefore 1 = 1$$

(2) Considerando, por hipótese de indução, que $P(k)$ é verdadeira:

$$P\ k\ = 1+2+3+\cdots+k = \frac{k\ k+1}{2},$$

deve-se provar que a proposição também é válida para $n = k + 1$:

$$P\ k+1\ = 1 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Para isso, soma-se $(k + 1)$ a ambos os membros da hipótese de indução:

$$1 + 3 + \cdots + k + \ k+1\ = \frac{k\ k+1}{2} + \ k+1$$

$$1 + 3 + \cdots + k + \ k+1\ = \frac{k\ k+1\ + 2\ k+1}{2}$$

$1 + 3 + \cdots + k + \ k+1\ = \frac{k+1\ \ k+2}{2}$, que constitui $P\ k+1$

(3) Tem-se, portanto, que pelo Princípio de Indução Finita, a proposição $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\ n+1}{2}$ é verdadeira para qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$.

3.4 Indução Matemática na Torre de Hanói

Como visto anteriormente, o jogo Torre de Hanói é um tipo de quebra-cabeça que consiste em uma base com três pinos verticais e em um deles é colocada uma quantidade de discos com diâmetros diferentes dispostos uns sobre os outros de modo que um disco maior nunca fique sobre outro menor. Viu-se também que para a transferência de todas as peças de um pino para outro deve-se obedecer a uma quantidade mínima de movimentos representada pela fórmula $2^n - 1$ onde n é o número de discos da Torre de Hanói.

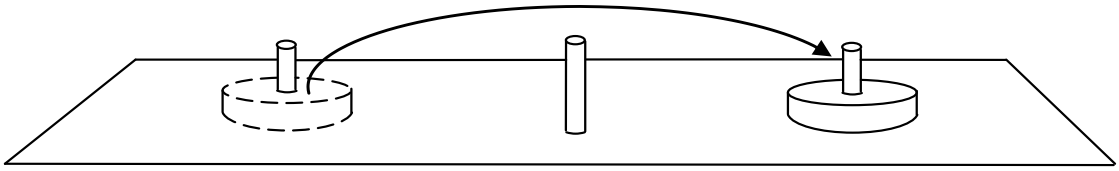
Verifica-se agora, por meio do Princípio de Indução Finita, a validade da fórmula $2^n - 1$ para o jogo Torre de Hanói. Para efeitos de cálculos $M(n)$ representará o número mínimo de movimentos para se resolver o problema de uma Torre de Hanói com n discos.

Deve-se provar inicialmente que a hipótese $M\ k\ = 2^k - 1$ é válida para $k = 1$:

$M\ k\ = 2^k - 1 \Longrightarrow M\ 1\ = 2^1 - 1 \therefore M\ 1\ = 1$ (é verdadeira).

Isto é demonstrado claramente através do jogo, pois quando se tem apenas 1 peça a movimentação do jogo procede da seguinte forma:

Figura 7 – Movimento de transferência para



Fonte: SHINE, [2012], p. 1

Tomando $M\ k\ = 2^k - 1$ como verdadeira, precisa-se provar que a hipótese também será verdadeira para $M\ k+1$. Para isso deve-se mostrar que $M\ k+1\ = 2^{k+1} - 1$ é verdadeira para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Para isso, considere $k+1$ discos no pino 1, sendo um maior (o que está sob os demais) e os k discos que estão acima deste. Para movimentar os k discos que estão em cima do maior disco do pino 1 para o pino 2, gastam-se $M(k)$ movimentos (por hipótese). Após esse procedimento, o disco maior fica no pino 1 e os k discos no pino 2. Com mais um movimento, desloca-se o disco maior para o pino 3. Como ainda restam k discos no pino 2, com mais $M\ k$ movimentos, transferem-se os discos do pino 2 para o pino 3, terminando a transferência dos $k+1$ discos, dispostos inicialmente no pino 1 para o pino 3. Isto leva a utilizar um total de $M\ k\ + 1 + M\ k\ = 2M\ k\ + 1$ movimentos. (DANTE, 2011, p. 13)

Como inicialmente $M\ k\ = 2^k - 1$ foi tomada como hipótese, então

$$2M\ k\ + 1 = 2\ 2^k - 1\ + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Desta forma demonstra-se que $M\ k+1\ = 2^{k+1} - 1$. Isto implica dizer que a proposição $M\ k\ = 2^k - 1$ é verdadeira para qualquer quantidade k de discos.

A partir desse desenvolvimento matemático, conclui-se, pelo Princípio de Indução Finita, que a fórmula $2^n - 1$ define a quantidade mínima de movimentos necessários para a transferência dos discos da Torre de Hanói.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo objetiva-se descrever os procedimentos adotados para aplicação da pesquisa de campo para posterior análise e discussão dos dados. Busca-se apontar as características do modelo de pesquisa pretendido e suas contribuições acerca do trabalho a ser realizado com estudantes do Ensino Médio.

Ao propor a utilização de materiais no estudo de Matemática, esta pesquisa contempla o desenvolvimento de habilidades de trabalho importantes para a formação escolar. A Torre de Hanói é apresentada como recurso alternativo ao uso corrente do livro didático.

Busca-se demonstrar as contribuições da dimensão lúdica para desenvolvimento das atividades de ensino e aprendizagem de Matemática, desenvolvendo o espírito investigativo por parte do educando, o qual passará a ter possibilidades de experimentar e fazer de novo, planejando e levantando hipóteses, argumentando e refletindo com seus colegas sobre o desenvolvimento de estratégias para se chegar a um objetivo por ele(s) determinado.

A pesquisa foi desenvolvida junto aos alunos da 3ª série do Curso Técnico em Manutenção e Suporte em Informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista (IFMG/SJE).

4.1 Tipo de Pesquisa

Para o desenvolvimento desta pesquisa, é necessário que se descrevam as etapas que orientam a realização dos trabalhos. Para isso, a metodologia da pesquisa cientifica será empregada. O estabelecimento do método em pesquisa “busca subsídios à configuração e condução de um trabalho de investigação científica cuja consistência depende, também, dos recursos oferecidos pela Metodologia de Pesquisa adotada pelo pesquisador” (ALLEVATO, 2008, p. 177).

Nas palavras de Severino, citado por Allevato (2008, p. 177), tem-se que “[...] a metodologia é um instrumental extremamente útil e seguro para a gestação de uma postura amadurecida frente aos problemas científicos, políticos e filosóficos que nossa educação universitária enfrenta”. Neste sentido, é que se busca descrever os caminhos percorridos para realização desta investigação.

Por não pretender medir estatisticamente as categorias, resultados ou

procedimentos empregados – como em pesquisa quantitativa - esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa. Nela será aplicado um estudo de campo em que ocorrerá uma observação participante do pesquisador (DALFOVO; LANA; SILVEIRA, 2008, p. 9).

Nesta investigação científica busca-se descrever a relação entre o mundo e o sujeito envolvidos no estudo. Como características deste tipo de pesquisa Kuark, Manhães e Medeiros afirmam que

> (...) há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem. (KUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p.26).

4.2 Caracterização do Local de Pesquisa

Esta pesquisa consiste numa investigação das contribuições da Torre de Hanói para o estudo de Indução Matemática em uma turma de 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista.

A escolha do local de pesquisa deve-se pela intenção de continuidade às abordagens já desenvolvidas na instituição em eventos científicos promovidos (Feira de Matemática, em 2010, e Semana de Ciência e Tecnologia, em 2012), onde se utilizou esta temática. Nos eventos realizados no *campus* pôde-se notar que os estudantes têm demonstrado interesse em conhecer e investigar as estratégias de resolução do jogo Torre de Hanói.

O IFMG - Campus São João Evangelista é uma instituição de Ensino da Rede Pública Federal vinculada ao Ministério da Educação. Está situado à Rua 1º de junho, nº 1043, Centro, São João Evangelista, Minas Gerais.

A instituição possui uma referência estratégica para a região em que se situa. Ela oferece educação superior, básica e profissional e tecnológica em diferentes níveis e modalidades de ensino. Além disso, oferece à comunidade cursos de capacitação, qualificação e requalificação de curta duração.

4.3 Público de Interesse da Pesquisa

Ao investigar sobre este tema a partir de pesquisas virtuais e bibliográficas foi constatado que a temática de Indução Matemática tem sido abordada apenas no Ensino Superior. Em consultas realizadas em sites de universidades e faculdades detectou-se que o assunto tem sido elencado no nível de graduação em Cursos de Ciências Exatas, tais como Engenharia Civil, Matemática e Cursos ligados à Computação. Também foi verificada estreita relação do tema em estudos do Curso de Sistemas de Informação ofertado pelo IFMG/SJE, o qual recebe muitos egressos do Curso Técnico em Manutenção e Suporte em Informática da própria instituição. Daí é que se definiu este último como o público-alvo desta pesquisa.

Inicialmente, a proposta de trabalho foi apresentada ao professor de Matemática que leciona para turmas de 3ª série do Ensino Médio Integrado. Discutiu-se sobre os objetivos do trabalho a ser realizado, bem como as contribuições de sua realização para o preparo dos estudantes que se empenham para obter bom desempenho em provas e exames vestibulares a serem realizados para continuação dos estudos. Após análise acerca da relevância do tema proposto na investigação o professor decidiu pela aplicação da pesquisa à turma I3B do Curso de Manutenção e Suporte em Informática integrado ao Ensino Médio.

Após apreciação da direção do IFMG/SJE, prosseguiu-se com a apresentação da proposta aos estudantes da turma I3B em sala de aula, junto ao professor de Matemática. A todos foram explicitadas as potencialidades da pesquisa e a importância do estudo a ser realizado com eles. Explicou-se que a pesquisa consistiria em dois encontros e que a participação de todos era fundamental para o sucesso dos trabalhos. Com o intuito de cumprir as etapas pretendidas, todos foram convidados a comparecerem no segundo encontro da pesquisa a ser realizado em horário extraclasse no próprio *Campus* São João Evangelista.

Com o intuito de orientar os participantes envolvidos na pesquisa sobre os horários estabelecidos para realização dos trabalhos, bem como o uso e divulgação da imagem, propôs-se a assinatura do termo de Autorização e Compromisso, conforme disposto no Apêndice A.

4.4 Materiais e Métodos

Para aplicação da pesquisa, as atividades fora divididas em três etapas, cada uma com 45 minutos, ou três aulas de 45 minutos cada. Ao longo de três aulas as atividades com a Torre de Hanói foram aplicadas aos alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Para execução das atividades de aplicação estabeleceu-se um roteiro que consistiu em seis etapas. a saber:

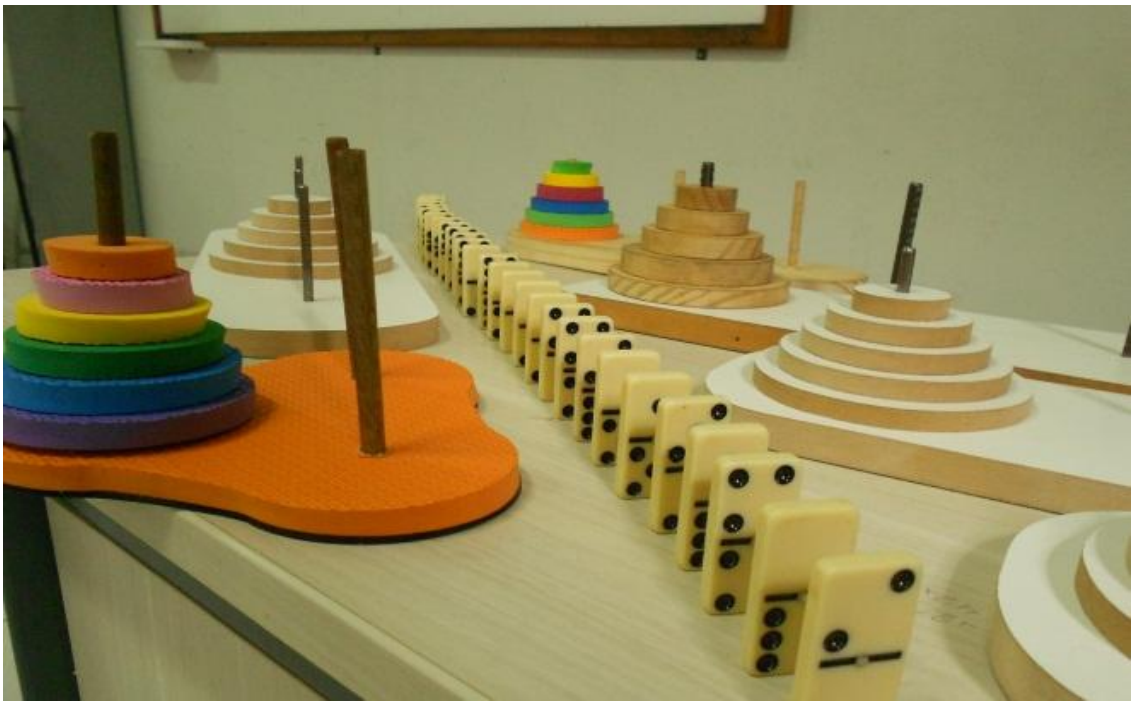
1. Apresentação dos objetivos da proposta de trabalho a ser aplicada;
2. Apresentação do jogo Torre de Hanói, citando suas potencialidades, regras e contribuições ao estudo da Matemática;
3. Aplicação do jogo Torre de Hanói;
4. Discussão sobre as observações dos alunos (dificuldades e comportamento das peças);
5. Apresentação da Indução Matemática, relacionando-a com a Torre de Hanói;
6. Aplicação de atividades e discussão sobre a Indução Matemática.

Ao longo da aplicação da pesquisa foram utilizados os seguintes materiais:

- Giz;
- Quadro negro;
- Computador;
- Data show;
- 6 Torres de Hanói;
- 1 jogo de dominó;
- Quadro branco;
- Pincel;
- Livro didático; e
- Câmera fotográfica.

Durante as etapas de aplicação foram feitos registros por meio de anotações, fotografias, filmagens e observações. Nas duas primeiras aulas as atividades foram acompanhadas pelo professor de Matemática. Por ocorrer em horário extraclasse, o último encontro com a turma de estudantes contou com a presença do pesquisador e dos alunos participantes da investigação.

Figura 8 – Torres de Hanói e dominós utilizados na pesquisa



Fonte: Arquivo pessoal

4.5 Aplicação da Pesquisa

Na manhã do dia 03 de outubro de 2013, quinta-feira, os estudantes da turma I3B compareceram à aula cedida pelo professor de Matemática para aplicação da pesquisa. Inicialmente, a proposta de pesquisa foi apresentada a todos os estudantes participantes da pesquisa, esclarecendo os objetivos e etapas a serem cumpridas ao longo das atividades sobre o jogo. Compareceram 23 estudantes e todos se prontificaram a participar da pesquisa, assinando o Termo de Autorização e Compromisso (Apêndice A).

Figura 9 – Explicação dos objetivos da pesquisa ao público-alvo

Fonte: Arquivo pessoal

A sala foi dividida em cinco grupos, sendo quatro grupos com cinco componentes e um com apenas três integrantes. Após esclarecer as orientações sobre como ocorreria a pesquisa, cada equipe recebeu um formulário (Apêndice B) com atividades para discussão ao longo da aula. Em cada grupo os estudantes determinaram um relator para transcrever neste formulário as opiniões de todos acerca das discussões e reflexões da equipe.

Apresentadas as justificativas sobre as quais a pesquisa se coloca, foi entregue uma Torre de Hanói para cada equipe. Daí os estudantes passaram a explorar a transferência das peças entre os pinos, sem obedecer a regras quaisquer. Em seguida, procedeu-se à explicação da Torre de Hanói, apontando suas contribuições para cada nível de ensino e as regras a serem consideradas para efetivação do jogo com uma quantidade mínima de movimentos a ser determinada.

Figura 10 – Torres de Hanói disponíveis para os grupos

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 11 – Grupos de alunos explorando a Torre de Hanói

Fonte: Arquivo pessoal

Aos estudantes foi dada uma tabela para que eles a completassem com os valores de movimentos desenvolvidos para cada quantidade de discos utilizada. Pediu-se que os grupos tentassem efetuar as transferências de peças e transcrevessem para a tabela apenas os menores valores de movimentos desenvolvidos (ver Tabela 2).

Tabela 2 – Movimentos necessários para transferência de peças

n = número de discos	M = número de movimentos necessários
$\mathbf{n = 1}$	$\mathbf{M =}$
$\mathbf{n = 2}$	$\mathbf{M =}$
$\mathbf{n = 3}$	$\mathbf{M =}$
$\mathbf{n = 4}$	$\mathbf{M =}$
$\mathbf{n = 5}$	$\mathbf{M =}$
$\mathbf{n = 6}$	$\mathbf{M =}$
$\mathbf{n = 7}$	$\mathbf{M =}$

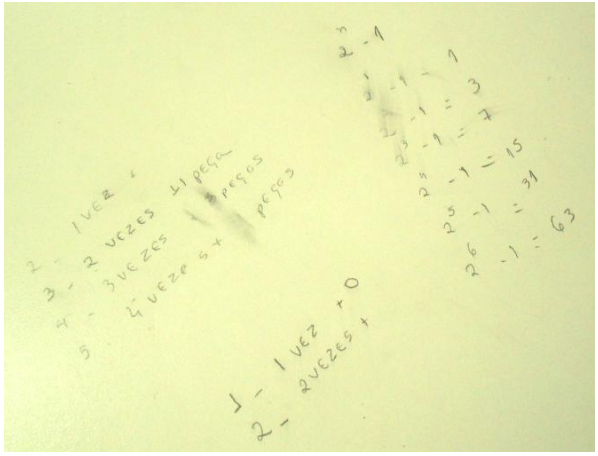
Fonte: Dados da pesquisa

Na tabela foram colocadas as quantidades de movimentos desenvolvidos pelos alunos e em seguida discutiu-se como os estudantes chegavam a essas conclusões. Durante a exploração do jogo, os estudantes fizeram anotações acerca de suas percepções sobre a ordem dos movimentos necessários e em seguida foram discutidas as fórmulas matemáticas possíveis para determinar a quantidade mínima de movimentos necessários conforme a quantidade de discos correspondente.

Figura 12 - Grupo 4 estudando estratégias do jogo

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 13 - Rascunhos do grupo 2



Fonte: Arquivo pessoal

O grupo 4 propôs a expressão $M = n^2 - (n - 1)$ como a função que determinava a quantidade mínima de movimentos a serem empregados para transferência das peças. Porém, ao construir uma tabela para testar a validade da fórmula desenvolvida, constatou-se que a expressão só valeria para valores de n entre 1 e 3. A partir da argumentação do grupo sobre a validade da expressão desenvolvida montou-se a tabela abaixo a fim de representar e analisar a proposição da equipe:

Tabela 3 - Teste de valores para a expressão ,

$n =$ número de discos	$M = n^2 - (n - 1)$	Movimentos mínimos encontrados ao jogar	Validade de $M = n^2 - (n - 1)$
$n = 1$	$M = 1$	$M = 1$	SIM
$n = 2$	$M = 3$	$M = 3$	SIM
$n = 3$	$M = 7$	$M = 7$	SIM
$n = 4$	$M = 13$	$M = 15$	NÃO
$n = 5$	$M = 21$	$M = 31$	NÃO

Fonte: Dados da pesquisa

Verificada a invalidade da proposição desenvolvida para valores de $n \geq 4$, buscou-se o desenvolvimento de outra expressão matemática. Daí, os grupos 2 e 4 defenderam a ideia de que o número mínimo de movimentos poderia ser determinado pela expressão $M = 2^n - 1$. Novamente procedeu-se à construção da seguinte tabela para análise da proposição dos alunos:

Tabela 4 - Teste de valores para a expressão , Grupos 2 e 4

$n =$ número de discos	$M = 2^n - 1$	Movimentos mínimos encontrados ao jogar	Validade de $M = 2^n - 1$
$n = 1$	$M = 1$	$M = 1$	SIM
$n = 2$	$M = 3$	$M = 3$	SIM
$n = 3$	$M = 7$	$M = 7$	SIM
$n = 4$	$M = 15$	$M = 15$	SIM
$n = 5$	$M = 31$	$M = 31$	SIM

Fonte: Dados da pesquisa

Os demais grupos não souberam justificar um raciocínio que levasse ao desenvolvimento de uma expressão matemática que determinasse a quantidade mínima de movimentos para transferência das peças. Ao serem questionados sobre as sentenças desenvolvidas pelos colegas, os alunos disseram que a fórmula $M = 2^n - 1$ era válida para quaisquer valores de discos disponíveis no jogo Torre de Hanói. Com o objetivo de investigar sobre esta afirmação procedeu-se à introdução do conceito de Indução Finita.

Aos estudantes foi explicado que o processo de Indução Matemática consiste basicamente na aplicação de um método dedutivo para demonstração de proposições matemáticas envolvendo os números naturais. Foi explicado que este método é muito útil principalmente quando não é possível investigar a prova de uma afirmação realizando testes com um número grande de experimentos. Esclareceu-se que durante a realização desta pesquisa, a utilização da Indução Matemática consistiria na demonstração da validade da expressão desenvolvida pelos estudantes para determinar a quantidade mínima de movimentos necessários para transferência de qualquer quantidade de discos.

Ao final da primeira etapa de aplicação da pesquisa recolheram-se os formulários com atividades para analisar o desenvolvimento dos alunos e a partir deles preparar as atividades da próxima etapa de pesquisa.

A análise do formulário preenchido pelos alunos foi muito importante, pois através dele pôde-se perceber que embora tenham sido efetuados testes com alguns valores de números naturais, os estudantes tiveram dificuldade em compreender se a expressão desenvolvida por Euler, onde $P(x) = x^2 + x + 41$ deveria resultar sempre em números primos com a substituição de x por quaisquer valores naturais. A partir desta observação o segundo encontro com os participantes da pesquisa teve por objetivo auxiliar os estudantes na compreensão de técnicas de determinação de primalidade dos números naturais, e a aplicação do conceito de Indução Matemática para verificação da validade da expressão $M = 2^n - 1$ desenvolvida por eles.

A etapa seguinte da pesquisa foi realizada no dia 10 de outubro de 2013, de 13h00min às 13h45min. Inicialmente foram retomadas as informações sobre os objetivos da pesquisa e as regras do jogo Torre de Hanói. Discutiu-se sobre o desempenho dos estudantes nas atividades entregues por eles na aula anterior e as orientações necessárias para esclarecer conceitos que porventura não ficaram

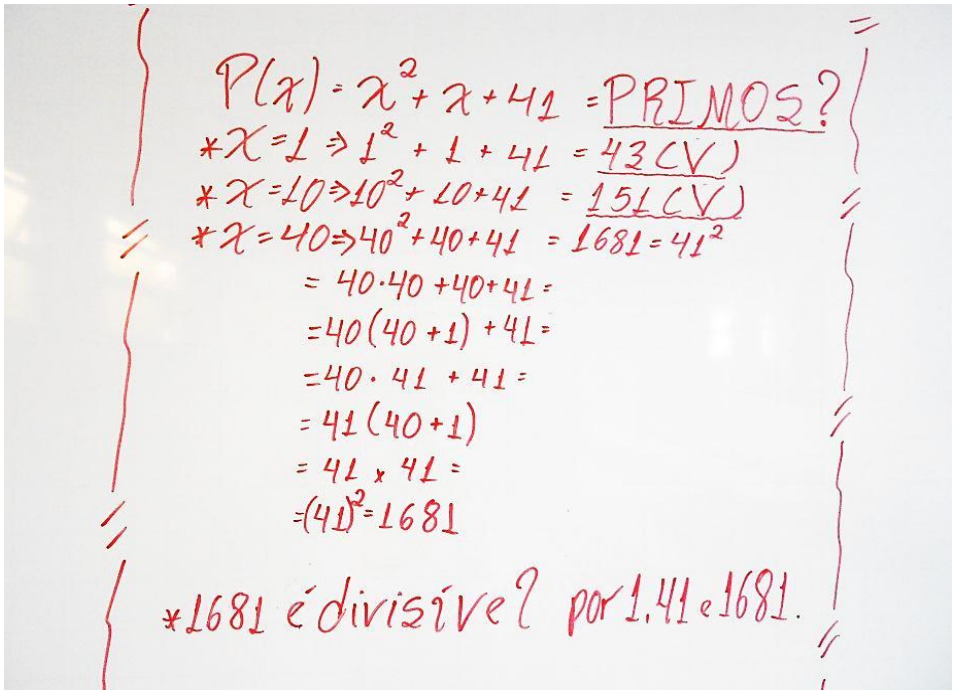
compreendidos. Em seguida, propôs-se a apresentação das implicações matemáticas existentes no jogo em estudo, sobretudo a demonstração da fórmula para determinação da quantidade mínima de movimentos por meio do método de Indução Matemática.

Na aula foram discutidas as dúvidas dos estudantes sobre a demonstração da atividade número 3 do formulário de atividades da aula anterior. Segundo os estudantes a expressão $\mathrm{P\ x\ } = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 41$ geraria sempre números primos, pois ao aplicar a fórmula para valores aleatórios de $\mathrm{x} = 1, 2, 3, 5, 9, 10, 17, 20, 30$ e 31 em sala de aula obtiveram-se sempre números primos, sendo eles respectivamente $43, 47, 53, 71, 131, 151, 347, 461$ e 1033.

A fim de esclarecer-lhes o motivo pelo qual a proposição de Euler estaria equivocada, utilizou-se a demonstração para $\mathrm{x} = 40$, onde se procedeu ao seguinte desenvolvimento:

$$x^2 + x + 41 = 40^2 + 40 + 41 = 40\ \ 40 + 1\ \ + 41 = 41\ \ 40 + 1\ \ = 41^2 = 1681$$

Figura 14 - Contraexemplo da fórmula de Euler em sala de aula



Fonte: Arquivo pessoal

Como os estudantes compreenderam a existência de $\mathrm{P\ 40\ } = 41^2 = 1681$, onde o número 1681 pode ser dividido por 41 além de 1 e 1681, chegou-se a conclusão de que a função $\mathrm{P\ x\ } = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 41$ não pode ser considerada como

geradora de números primos para todos os valores de $x \in \mathbb{N}$. Segundo os estudantes, esta proposição seria verdadeira apenas para valores de x entre 1 e 39, o que foi verificado com o desenvolvimento da fórmula para valores aleatórios deste intervalo.

Da discussão sobre a proposição anterior, indagou-se sobre os procedimentos adotados pelos alunos para avaliar a validade de afirmações apresentadas inicialmente como verdadeiras para um número infinito de casos. Alguns estudantes julgaram a necessidade de fazer testes para muitos valores para tirar conclusões sobre estas afirmações. Ao questionar-lhes sobre a possibilidade da existência de situações que poderiam requerer um número excessivo de testes, eles ironizavam dizendo que desistiriam da resolução de tais questões. Daí prosseguiu-se com a apresentação do método de Indução Matemática como uma forma imediata de auxiliar os alunos em demonstrações.

Com o intuito de enriquecer as abordagens sobre o Princípio de Indução Finita, fez-se o uso do jogo de dominó. Duas alunas presentes se dispuseram a enfileirar 28 peças do jogo para que se pudesse descrever a relação entre o tema da aula e a queda sucessiva das peças a partir da derrubada da primeira peça de dominó.

Figura 15 - Estudantes enfileirando dominós para pesquisa de aula

Fonte: Arquivo pessoal

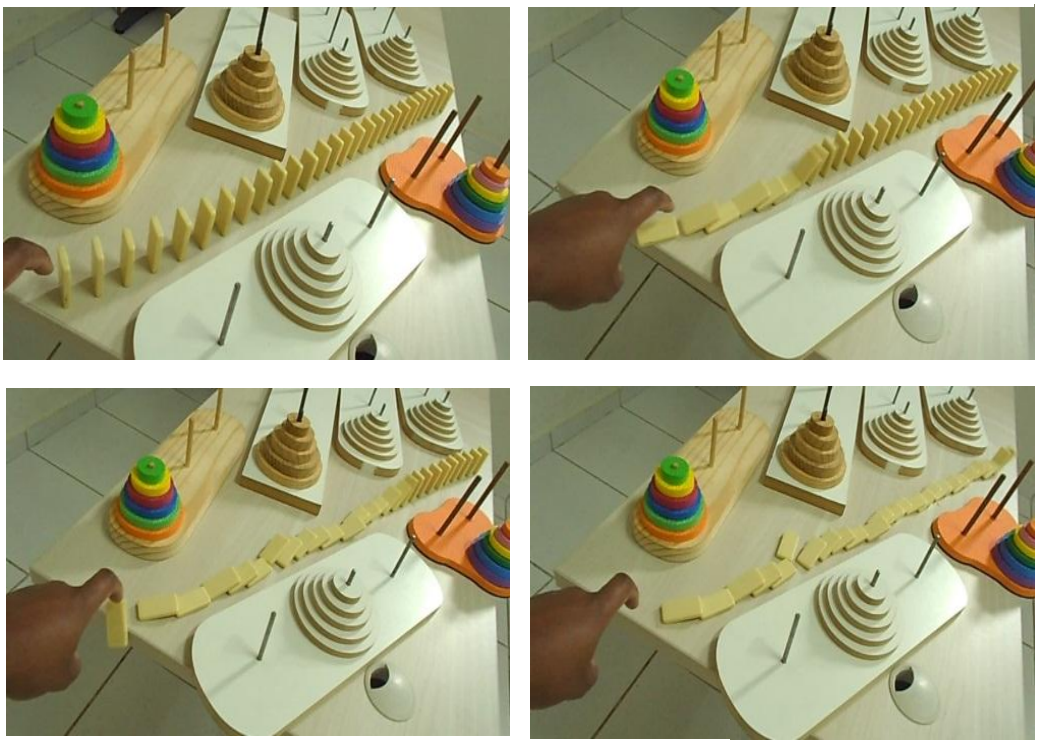
Com a disposição das peças de dominó, utilizou-se uma proposta intuitiva para apresentar o Princípio de Indução Matemática. Para isso, fez-se o uso da seguinte abordagem apontada por Dante:

> [...] Suponha que temos um número finito de peças de dominó dispostas verticalmente uma ao lado da outra. Se derrubarmos a primeira peça, essa derruba a segunda, que derruba a terceira, e assim por diante. Cada peça que cai, a segunda também cai. Nessas condições, podemos concluir que caindo a primeira peça todas caem. (DANTE, 2011, p. 10).

Aos alunos foi explicado que para ocorrer a queda de todas as peças de dominó enfileiradas, estas deveriam estar sob uma mesma condição, ou seja, igualmente espaçadas. Relacionando a queda dos dominós à Indução Matemática, discutiu-se a necessidade de se admitir uma propriedade válida para um primeiro elemento $n = 1$ (derrubada da primeira peça de dominó) e em seguida analisar a validade deste mesmo método para o sucessor $n = k + 1$ (derrubada da segunda peça com a queda da primeira). Caso a propriedade seja aplicável nestes casos, ela valerá para todos os demais casos.

A fim de ilustrar a proposta de Indução com a derrubada da fileira de dominós, derrubou-se a primeira peça e como esperado, todas as peças foram derrubadas[2].

Figura 16 – Derrubada da fileira de dominós



Fonte: Arquivo pessoal

[2] Devido a intempéries durante a aplicação da pesquisa, a fileira desenvolvida pelas estudantes foi desfeita. Daí uma nova fileira de dominós foi reelaborada conforme exibido na Figura 15.

A partir deste experimento discutiu-se a abordagem desenvolvida por Dante (2011, p. 10). Em seguida investigou-se a validade da fórmula $M = 2^n - 1$ por meio do método de Indução Matemática. Para isso, estabeleceu-se que este método de demonstração consistiria no processo descrito a seguir:

Seja $P(n)$ uma propriedade aplicável aos números do conjunto $\mathbb{N}$. Se

(1) $P(1)$ (para $n = 1$) é verdadeira

e se

(2) $P\ k$ verdadeira acarretar $P\ k+1$ também verdadeira, ou seja $P\ k \implies P\ k+1$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, então

(3) $P(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \in N$.

Da apresentação das proposições enumeradas acima, sucedeu-se na aplicação das mesmas na Torre de Hanói. Assim, explicou-se a Indução Matemática da seguinte forma:

Seja $M = 2^n - 1$ (expressão desenvolvida pelos alunos) uma proposição válida para determinação da quantidade mínima de movimentos para transferência de peças. Supondo que

1) $M(1)$ é verdadeira, e que

2) $M\ k$ verdadeira acarretar a validez de $M\ k+1 = 2^{k+1} - 1$, ou seja $M\ k \implies M\ k+1$ para qualquer $k \in N$,

então

3) $M\ n = 2^n - 1$ é verdadeira para qualquer $n \in N$

Como forma de facilitar o desenvolvimento e a compreensão desta prova matemática, considerou-se $M = M\ k = 2^k - 1$. Tomando uma Torre de Hanói com 5 peças, chamou-se de k a quantidade de discos menores sobrepostos ao disco maior em um dos pinos, o que acarreta $k = 4$. Chamou-se de M a quantidade mínima de movimentos necessários para transferência de discos entre os pinos. Com a Torre de Hanói em mãos foi fácil para os alunos perceberem o processo de demonstração pretendido. Junto deles desenvolveram-se os seguintes passos:

1) Sabe-se que para transferir k discos menores de um pino para outro, são necessários M movimentos. Isto deixaria 1 único disco (o maior) no pino de onde os menores saíram. Por outro lado, sabe-se também que para movimentar o disco maior até um terceiro pino tomado como “destino”, se gasta apenas 1 movimento. Como os k discos menores precisam se

sobrepor ao disco maior, gastam-se novamente M movimentos. Isto implica dizer que para transferência de todos os discos faz-se a seguinte sequência de movimentos: $M + 1 + M$;

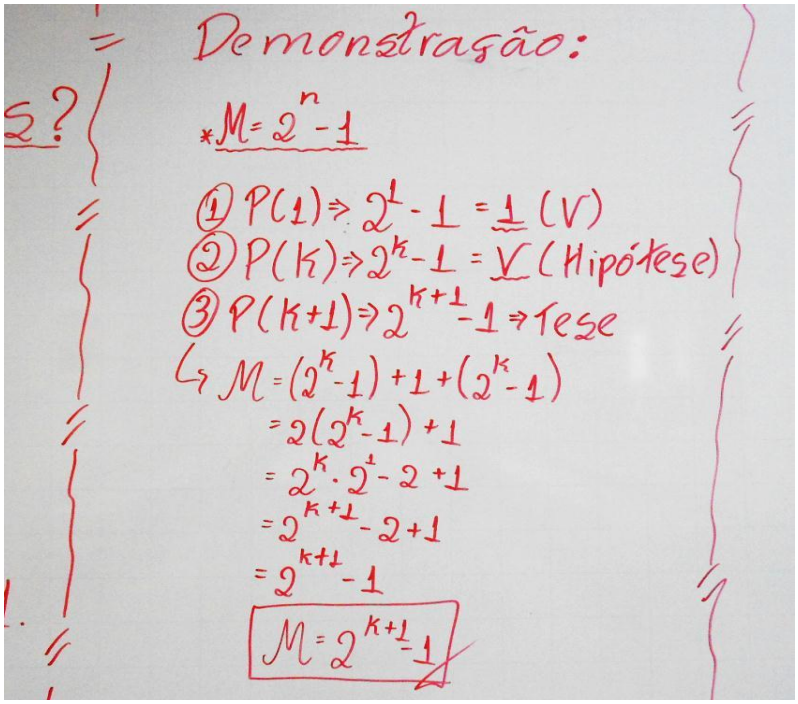
2) Como $M = 2^k - 1$, tem-se a seguinte sequência de movimentos para a transferência dos discos:

$$2^k - 1 \ + 1 + \ 2^k - 1 \ = 2 \ 2^k - 1 \ + 1 = \ 2^k \times 2 - 2 \ + 1 =$$

$$2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1;$$

3) Como a proposição $M\ k$ implicou em $M\ k + 1 \ = 2^{k+1} - 1$, logo a proposição $M\ n \ = 2^n - 1$ é verdadeira para qualquer número n de discos no jogo Torre de Hanói.

Figura 17 – Demonstração da fórmula



Fonte: Arquivo pessoal

Com esta demonstração os estudantes puderam acompanhar passo a passo as etapas do método de Indução Matemática presente na Torre de Hanói. Após o desenvolvimento da demonstração foi aberto um espaço para discussão e retirada de dúvidas, as quais foram imediatamente esclarecidas pelos próprios estudantes que conseguiram visualizar o desenvolvimento algébrico existente na demonstração da fórmula $M\ n \ = 2^n - 1$ desenvolvida por seus colegas.

Por fim, ressaltou-se a atenção necessária ao cumprimento das etapas estabelecidas para as demonstrações desenvolvidas pelo método de Indução

Matemática. Como houve uma relação com materiais concretos durante a pesquisa, os estudantes compreenderam mais facilmente o método desenvolvido.

Com o objetivo de ampliar o estudo do assunto e promover uma melhor assimilação do assunto, resolveu-se com os alunos a atividade proposta no formulário da pesquisa (ver Apêndice B). A atividade propunha aos estudantes o desenvolvimento de uma demonstração para provar que expressão $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira para qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$.

Nesta atividade os estudantes tiveram mais dificuldade em compreender o procedimento de resolução da igualdade apresentada. Para isso, resolveu-se novamente cada um dos passos apresentados no problema, questionando sempre como os estudantes efetuariam a demonstração.

Pôde-se detectar que a dificuldade dos estudantes estava em promover uma análise mais aprofundada acerca das relações matemáticas existentes nos problemas. Tanto nas atividades desenvolvidas anteriormente como neste último exercício, os estudantes tiveram dificuldade em visualizar a necessidade de se efetuar algumas operações simples. Ao longo da pesquisa percebeu-se a necessidade de mais abordagens e atividades de aplicação envolvendo problemas sobre multiplicações por fatores comuns em evidência. Isto poderia facilitar aos alunos a descoberta de caminhos a serem desenvolvidos matematicamente para se chegar a um resultado já sugerido ao longo de uma atividade.

No desenvolvimento desta última atividade os estudantes compreenderam que para utilizar o método de Indução Matemática é necessário o desenvolvimento de um pensamento lógico matemático mais aguçado a fim de identificar formas de resolução muitas vezes implícitas num primeiro momento, mas que com o conhecimento das propriedades matemáticas é possível ser desenvolvido para se chegar à proposição estabelecida nas etapas iniciais do problema, ou seja, no desenvolvimento da hipótese de indução já apresentada no início de uma dada questão.

Os estudantes questionaram o nível de abstração requerido pelo método de Indução Matemática. Ao mesmo tempo eles elogiaram e julgaram importante a abordagem deste assunto no Ensino Médio, já que assim eles despertariam para um nível de raciocínio mais elaborado acerca de um conteúdo que será aprofundado no ensino superior por muitos deles.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a realização desta investigação sobre as contribuições da Torre de Hanói no ensino de Indução Matemática no Ensino Médio, pôde-se notar que o assunto representa uma forma de desenvolver o pensamento lógico-matemático dos estudantes da Educação Básica, motivando-os a desenvolver conceitos e pontos de vista ainda não estimulados no dia a dia em sala de aula.

No desenvolvimento deste assunto envolveram-se diferentes operações matemáticas. As principais foram: multiplicação, divisão, adição, potenciação e fatoração de números primos. No desenvolvimento das demonstrações, percebeu-se a necessidade de maior preparo dos estudantes para lidarem com questões que envolvem todos estes tipos de operações numa mesma questão. Também foi possível observar que ao se estabelecer "k" como valor de incógnitas, os alunos têm maior dificuldade em desenvolver as expressões do que quando optam por "x" como incógnita. Com isso pode-se dizer que é importante trabalhar com diferentes valores para incógnitas nas aulas de matemática. Isto poderia prepará-los ainda mais para prosseguir nos estudos de graduação.

Ao longo da pesquisa pôde-se notar que os estudantes se empenharam em desenvolver a Matemática existente implicitamente em materiais concretos que podem ser utilizados no processo educativo. Isto constitui um fator relevante para que educadores utilizem recursos alternativos ao livro didático para apresentação de conteúdos de Matemática, tornando as aulas mais produtivas e atrativas.

A dimensão lúdica das aulas despertou a curiosidade e a motivação dos alunos. Com a Torre de Hanói em mãos, as equipes puderam buscar expressões matemáticas que determinassem a quantidade de movimentos necessários para transferência de discos. A partir das descobertas deles procedeu-se à introdução do conceito de Indução Matemática, com discussões acerca de sua utilização para demonstração de afirmações matemáticas. Os grupos puderam trocar experiências e dialogaram acerca das estratégias que condicionavam a realização do jogo Torre de Hanói. Pôde-se notar que a proposta de apresentação do conteúdo de Indução Matemática utilizando material concreto favorece o raciocínio dos alunos.

Pôde-se perceber que para melhorar o desempenho dos estudantes no estudo de assuntos que requerem um nível mais elevado de abstração – como o de Indução Matemática - seria interessante prepará-los com atividades que também

requeiram formas de pensamento mais desafiadoras ao longo de toda a educação básica. Isto facilitaria o desenvolvimento das operações e transformações matemáticas que geraram questionamentos durante os processos de demonstração.

Uma estratégia que contribuiu para o enriquecimento das abordagens da pesquisa foi a apresentação de um contraexemplo que resultava em respostas contraditórias ao enunciado. Para isso a fórmula de Euler, onde $\mathrm{P\ x\ } = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 41$ deveria gerar sempre números primos, foi utilizada e discutida com os participantes. Além de servir como exemplo de falha no processo de generalização, esta expressão também serviu para ampliar o tema da pesquisa por meio da revisão de métodos para se determinar a primalidade dos números naturais, o que despertou o interesse dos alunos que se preparavam para exames de seleção e provas de vestibular.

Os estudantes se empenharam em descobrir a função matemática que associa a quantidade de discos a um número mínimo de movimentos. Um grupo chegou a desenvolver a fórmula $\mathrm{M(n)} = \mathrm{n}^2 - (\mathrm{n} - 1)$, mas ao realizar testes com diferentes números de discos verificou-se que esta proposição matemática só valeria para um número de discos menor ou igual a 3. Daí o mesmo grupo que apresentou a fórmula anterior e outra equipe encontraram a expressão $\mathrm{M\ n\ } = 2^{\mathrm{n}} - 1$. A partir dos testes efetuados em sala, verificou-se que esta função era válida para um número de discos até 6 (o maior número de discos existentes em um dos jogos distribuídos). Com o objetivo de verificar se esta proposição era ou não verdadeira para quaisquer números de discos, procedeu-se à sua demonstração pelo método de Indução Matemática. Para facilitar a compreensão do desenvolvimento algébrico presente no processo de demonstração, fez-se a transferência de peças entre os pinos seguindo as 3 etapas propostas pelo método de Indução Matemática, o que foi um sucesso.

Pode-se dizer que o processo de Indução explicado na pesquisa representou uma oportunidade para os estudantes desenvolverem habilidades matemáticas importantes para o prosseguimento dos estudos. Com a pesquisa os participantes puderam conhecer os processos de generalização existentes, bem como compreender um importante método utilizado pela Matemática para verificar se é possível estabelecer a generalização de afirmações tomadas como verdadeiras no ramo das Ciências Exatas.

Infelizmente não foi possível estender o estudo deste tema por muitas aulas.

Isto porque os alunos participantes da pesquisa encontram-se matriculados num Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio, o que requer deles participação em todas as aulas nos turnos matutino e vespertino, conforme carga horária estabelecida pela instituição.

Contudo, os objetivos delineados foram atingidos. Com a aplicação da Torre de Hanói foi possível apresentar de forma concreta as potencialidades da utilização deste jogo para os diversos níveis de ensino, sobretudo no Ensino Médio. A ludicidade contribuiu para tornar as aulas mais agradáveis e satisfatórias por proporcionar tentativas e descobertas sobre a transferência de peças.

Constata-se, no entanto, que a Torre de Hanói constitui um importante instrumento para enriquecimento das aulas de Matemática. Com a pesquisa verificou-se que o Princípio de Indução Finita (P.I.F.) – ou Indução Matemática – pode ser desenvolvido com estudantes do Ensino Médio. Além disso, o estudo deste conceito pode ampliar o raciocínio acerca de técnicas para generalização de expressões matemáticas a serem aplicadas pelos estudantes.

Por fim, pode-se considerar a relevância da realização desta pesquisa. O estudo desenvolvido servirá de embasamento teórico para outros pesquisadores que tratem do mesmo tema de interesse. Esta investigação contribuirá para expandir as fontes disponíveis para tratamento do tema de Indução Matemática no ensino médio, contribuindo assim para preparar os estudantes para lidarem com a perspectiva de infinito em Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **O Modelo de Romberg e o Percurso Metodológico de uma Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Boletim de Educação Matemática, vol. 21, núm. 29, 2008, p. 175-197.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União,** Brasília, DF, 20 de dezembro de 1996.

BRASIL**. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Volume 2. Brasília, DF, 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2013.

BRAZ, Ricardo Antônio Faustino da Silva. **Uma Proposta de Utilização de Material Manipulativo no Aprendizado da Função Exponencial**. 2007, 125 f. (Dissertação) Mestrado em Ensino das Ciências - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife.

CABRAL, Marcos Aurélio. **A utilização de jogos no ensino de matemática**, Marcos Aurélio Cabral. 2006. 52f. Monografia (Conclusão de Curso) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Departamento de Matemática, Florianópolis.

COELHO, Cristina Lúcia Maia et al. **Torre de Hanói: O Espaço Lúdico como Intervenção Psicopedagógica com Alunos NEES**. In: CONGRESSO INTERNACIONAL TIC E EDUCAÇÃO, 2. 2012, Lisboa, Portugal.

DALFOVO, Michael Samir; LANA, Rogério Adilson; SILVEIRA, Amélia. **Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico**. Revista Interdisciplinar Científica Aplicada, Blumenau, v. 2, n. 4, p. 01-13, Sem II. 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011. Cap. 1, p. 8-13.

EDUARDO, Marcos Fabiano Firbida et al**. Associações Entre Estruturas Algébric**as. In: ENCONTRO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, 2011, Presidente Prudente. Colloquium Exactarum, vol. 3, n. Especial, jul.–dez., 2011. Disponível em <http://www.unoeste.br/site/pos/enapi/2011/suplementos/documentos/Exactarum-PDF/Matem%C3%A1tica.pdf >. Acesso em: 21 out. 2013.

FERNANDES, Angela Maria Vidigal et al. **Fundamentos de Álgebra**. 1ª ed. Atualizada. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. 13 ago. 2008. [S. l]. Disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654.o>. Acesso em: 10 jun 2013.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA. **Projeto Pedagógico Institucional**. São João Evangelista, MG, 2010. 175 f. Disponível em: <http://portal.sje.ifmg.edu.br/images/stories/downloads/ppisje.pdf>. Acesso em 27 set. 2013.

JUNTA, Cristiano Moraes. **John Stuart Mill e a Filosofia das Ciências Sociais**. 2008. 88f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Federal de São Carlos, Centro de Educação e Ciências Humanas, Departamento de Filosofia e Metodologia da Ciência, São Carlos.

KAUARK, Fabiana da Silva; MANHÃES, Fernanda Castro; MEDEIROS, Carlos Henrique. **Metodologia da Pesquisa: Um guia prático**. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

LIMA, Elon Lages**. O Princípio da Indução: Nível Avançado**. [200-]. [S.l.]. Disponível em: <http: http://www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/lista.html>. Acesso em: 25 ago. 2013.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, p. 30.

MORGADO, José. **Indução e Indução Matemática**. Faculdade de Ciências do Porto, Centro de Matemática. Boletim da SPM, n. 17, jun. 1990, p. 23-34.

MOTA, Paula Cristina Costa Leite de Moura**. Jogos no Ensino da Matemática**. 2009, 142f. Dissertação (Mestrado em Matemática/Educação) – Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia, Porto.

PEREIRA, Valberto Rômulo Feitosa. **É Por Indução?** Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 64, p. 1-3, 3º quadrimestre de 2007.

PIRES, Ana Luísa. **Torre de Hanói**, 2007. [S.l.]. Disponível em: <http://aprendendomatematic.blogspot.com.br/2007/06/torre-de-Hanói.html>. Acesso em 08 out. 2013.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J. ; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

RODRIGUES, Caroline. **Efeito dominó**, 2013. [S.l.]. Disponível em: <http://4b-2013-01.bligoo.com.br/efeito-domino>. Acesso em: 28 ago. 2013.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez. **Aspectos da Indução nas Ciências e na Matemática**. [2011]. Minicurso-Universidade Federal da Bahia, Departamento de Matemática. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/5e/docs/mc15.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2013.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho**. A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**, Universidade Federal do Piauí, [200-]. Disponível em: <http://www.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2013.

SHINE, Carlos Yuzo. **A Torre de Hanói** - Colégio Etapa. Artigo baseado em aula ministrada na IV Semana Olímpica, Salvador, 2012. Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/~anachiaradia/Material/FAM%20-%20torre%20de%20Hanói.pdf>. Acesso em 21 out. 2013.

SILVA, Valdeci Borges da; LUZ, Adriana Augusta B. dos Santos**. Jogos e Brincadeiras no Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Cadernos PDE: O Professor PDE e os Desafios da Escola Pública Paranaense. Volume 1. Paraná, 2009. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2009_ufpr_matematica_artigo_valdeci_borges_da_silva.pdf>. Acesso em 21 out. 2013.

SILVEIRA, D. S.; NOVELLO, T. P.; LAURINO, D. P. **O Uso de Materiais Concretos no Ensino da Matemática nas Primeiras Etapas da Escolarização**. Ago. 2011. Disponível em: <http://repositorio.furg.br:8080/jspui/bitstream/1/1085/1/primeiras%20etapas%20de%20escolariza%c3%a7%c3%a3o.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2013.

SIMÕES, Márcio. **O Infinito Começa com a Primeira Peça**. Revista Cálculo. São Paulo, n. 18, ano 2, p. 16-17, jul. 2012.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos.** Tradução Jorge Luiz Calife. 13ª ed. Rio de Janeir: Record, 2008.

VIANA, G. V. R.; PEREIRA; E. S. **O método indutivo**. Revista Científica Faculdade Lourenço Filho, [S. l.], v.5, n.1, 2007.

APÊNDICE A - TERMO DE AUTORIZAÇÃO E COMPROMISSO

Firmam o presente Termo de Autorização e Compromisso, para realização de atividades de pesquisa com alunos do 3° Ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista (IFMG/SJE), Professor e a Direção da Escola, ficando estabelecido:

1) Eu,_____,
   aluno(a) da turma I3B, estou ciente de que participarei das atividades da pesquisa denominada “A TORRE DE HANÓI COMO FERRAMENTA DE ENSINO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO”, comprometendo-me executá-las dentro dos padrões da ética e das boas relações humanas.
2) Eu,_____,
   aluno(a), estou ciente de que minha participação ocorrerá em dois momentos: um em aula normal, no dia 03 de outubro de 2013 das 08h45min às 10h15min, e o outro em horário extra turma no IFMG/SJE, em 10 de outubro de 2013, de 13h00min às 14h00min, bem como, autorizo o uso e a divulgação acadêmica de fotos e/ou vídeos relativos à minha imagem.
3) Eu, DOUGLAS DE MIRANDA BARBOSA, aluno do Curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São Joao Evangelista, comprometo-me a realizar a pesquisa baseando-me nos princípios de ética e nas boas relações humanas. Comprometo-me ainda a zelar pelas produções e imagens dos participantes.
4) Eu, MARCOS ADIR TESSER, Professor de Matemática dos alunos participantes desta pesquisa, estou ciente e de acordo com a mesma.
5) Eu, CLÁUDIA MARISA FERREIRA MACHADO PIMENTA, Diretora do Departamento de Desenvolvimento Educacional do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, estou ciente desta pesquisa no âmbito desta instituição. Autorizo a utilização das dependências internas para os fins da mesma e de eventuais imagens e vídeos da estrutura física.

Assim, por estarem cientes, as partes assinam o presente termo.

São João Evangelista, 03 de outubro de 2013.

_____
Aluno (a)

_____ _____
Diretor/Carimbo Professor(a)

_____
Responsável pela execução da pesquisa

APÊNDICE B – FORMULÁRIO DE ATIVIDADES DE APLICAÇÃO

A TORRE DE HANÓI E O ENSINO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO
DOUGLAS DE MIRANDA BARBOSA

TURMA: I3B **DATA: 03/10/2013**

GRUPO Nº___ - COMPONENTES	
1)	**2)**
3)	**4)**
5)	**6)**

1) Considere as regras básicas da Torre de Hanói e complete a tabela abaixo:

a) Só se pode movimentar um disco por vez;

b) Nunca se pode colocar um disco maior sobre outro menor;

2) Como a equipe encontrou os resultados da tabela acima? Descreva a(s) fórmula(s) e/ou raciocínio(s) desenvolvidos garantir validade da proposição.

n = número de discos	**M = número de movimentos necessários**
$n = 1$	
$n = 2$	
$n = 3$	$M =$ _____
$n = 4$	$M =$ _____
$n = 5$	$M =$ _____
$n = 6$	$M =$ _____
$n = 7$	$M =$ _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

3) Euler (1707-1783) propôs que na sentença $P\ x\ = x^2 + x + 41$ o resultado da substituição de x por quaisquer valores naturais levava **sempre** à obtenção de números primos. Isto é correto? Por quê?

ENUNCIANDO O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Seja $\mathrm{P(n)}$ uma propriedade aplicável aos números do conjunto N (números naturais sem o zero ou dos inteiros positivos). Se

(1) $\mathrm{P(1)}$ (para $\mathrm{n} = 1$) é verdadeira
e se
(2) $\mathrm{P\ k}$ verdadeira acarretar que $\mathrm{P\ k+1}$, ou seja $\mathrm{P\ k} \implies \mathrm{P\ k+1}$, também é verdadeira, para qualquer $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$, então
(3) $\mathrm{P(n)}$ é verdadeira, para qualquer $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$.

EXEMPLO DE PROVA MATEMÁTICA PELO MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Vamos provar, por meio da indução matemática, que a proposição
$1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n\ n+1}}{2}$ é verdadeira para qualquer valor de $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$.

(1) Observamos que $\mathrm{P\ 1}$ é verdadeira, pois para $\mathrm{n} = 1$ temos:

$$\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2} = \frac{1\ 1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \therefore 1 = 1$$

(2) Agora consideremos, por hipótese de indução, que $\mathrm{P\ k}$ é verdadeira:

$$\mathrm{P\ k\ } = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{k} = \frac{\mathrm{k(k+1)}}{2}$$

Devemos provar que a proposição também é válida para $\mathrm{P\ n\ } = \mathrm{k} + 1$:

$$\mathrm{P\ k+1\ } = 1 + 3 + \cdots + \mathrm{k} + \mathrm{k} + 1 = \frac{(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2)}{2}$$

(3) Para isso soma-se $(\mathrm{k}+1)$ a ambos os membros da hipótese de indução:

$$1 + 3 + \cdots + \mathrm{k} + \ \mathrm{k+1}\ = \frac{\mathrm{k}\ \mathrm{k+1}}{2} + \ \mathrm{k+1}$$

$$1 + 3 + \cdots + \mathrm{k} + \ \mathrm{k+1}\ = \frac{\mathrm{k}\ \mathrm{k+1}\ + 2\ \mathrm{k+1}}{2}$$

$$1 + 3 + \cdots + \mathrm{k} + \ \mathrm{k+1}\ = \frac{\mathrm{k+1}\ \ \mathrm{k+2}}{2}\text{, que constitui P k+1 .}$$

Temos, portanto, que pelo Princípio de Indução Finita, a proposição
$1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n\ n+1}}{2}$ é verdadeira para qualquer valor de $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$.